

Εισαγωγή στην Τοπολογία
Ενδιάμεση Εξέταση (13-12-2025)

Θέμα 1ο

(1, 5 + 1 = 2, 5 μον.)

(α) Έστω X τοπολογικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο X είναι χώρος Hausdorff.

(ii) Για κάθε $x \in X$, ισχύει $\{x\} = \bigcap \{ \bar{U} : U \text{ περιοχή του } x \}$.

(β) Έστω X τοπολογικός χώρος, $\mathcal{C}$ μια υποβάση για την τοπολογία του X και $D \subseteq X$. Εξετάστε αν είναι αληθής η πρόταση:

Το D είναι πυκνό στον X αν και μόνο αν, για κάθε μη κενό $U \in \mathcal{C}$ είναι $U \cap D \neq \emptyset$.

Θέμα 2ο

(1 + 1 + 0, 7 + 0, 8 = 3, 5 μον.)

Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την κλάση

$$\mathcal{T} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, εξετάστε αν ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ είναι (i) T_1 , (ii) 2ος αριθμήσιμος.

(β) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, προσδιορίστε την κλειστή θήκη $\bar{A}$ του A ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$.

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεχής και ως συνάρτηση από τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

(δ) Αποδείξτε ότι οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις από τον $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι οι σταθερές.

Θέμα 3ο

(1 + 2 = 3 μον.)

(α) Αποδείξτε ότι κάθε κλειστός υπόχωρος ενός φυσιολογικού (T_1 και T_4) χώρου είναι φυσιολογικός.

(β) Έστω I υπεραριθμήσιμο σύνολο και, για κάθε $i \in I$, X_i ένας T_1 τοπολογικός χώρος με $|X_i| \geq 2$. Αποδείξτε ότι ο χώρος γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος (επομένως ούτε μετριοποιήσιμος).

Θέμα 4ο

(1 + 2 = 3 μον.)

(α) Στο $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, θεωρούμε το υποσύνολό του

$$A = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{το σύνολο τιμών } f(\mathbb{R}) \text{ της } f \text{ είναι πεπερασμένο} \right\}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο A είναι πυκνό στον $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ με την τοπολογία γινόμενο.

(β) Συμβολίζουμε με c_0 το σύνολο των πραγματικών ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0, δηλαδή

$$c_0 = \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}.$$

Αποδείξτε ότι στον χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την box τοπολογία το σύνολο c_0 είναι και ανοιχτό και κλειστό.

Καλή Επιτυχία!