

Εισαγωγή στην Τοπολογία - Πτυχιακή Εξέταση (7-6-2024)

Θέμα 1ο

(1, 5 + 1, 5 = 3 μον.)

Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathcal{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X , δηλαδή

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Θεωρούμε ακόμη την οικογένεια $\mathcal{C} = \{B \subseteq X : B \text{ άπειρο}\}.$

Αποδείξτε ότι:

- (α) (i) Η οικογένεια $\mathcal{C}$ δεν είναι βάση για κάποια τοπολογία στο X .
- (ii) Αν $\mathcal{T}_C$ είναι η τοπολογία που έχει ως υποβάση την $\mathcal{C}$, τότε $\mathcal{T}_C$ είναι η διακριτή τοπολογία.
- (β) (i) Αν d είναι μια μετρική στο X και $\mathcal{T}_d$ η επαγόμενη τοπολογία, τότε $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$.
- (ii) Ο $(X, \mathcal{T})$ δεν είναι μετριοποιήσιμος.

Θέμα 2ο

(1 + 1 + 1 = 3 μον.)

(α) Αποδείξτε (με πλήρη αιτιολόγηση) ότι ο χώρος $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι διαχωρίσιμος.

(β) Εξετάστε αν οι Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^2$ είναι ομοιομορφικοί.

(γ) Έστω X τοπολογικός χώρος και (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) κάθε A_n είναι συνεκτικό και (ii) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

Αποδείξτε ότι το σύνολο $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ είναι συνεκτικό.

Θέμα 3ο

(1, 5 + 1, 5 = 3 μον.)

(α) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ δύο διαφορετικές τοπολογίες στο X , τέτοιες ώστε καθένας από τους χώρους $(X, \mathcal{T})$ και $(X, \mathcal{T}')$ να είναι συμπαγής και Hausdorff. Αποδείξτε ότι καμία από τις δύο τοπολογίες $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ δεν είναι ασθενέστερη της άλλης.

(β) Έστω $(X, \mathcal{T})$ χώρος Hausdorff και K, F δύο συμπαγή υποσύνολά του με $K \cap F = \emptyset$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν ανοιχτά $U, V \subseteq X$ με $K \subseteq U, F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$.

Θέμα 4ο

(1 + 2 = 3 μον.)

(α) Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $X = \prod_{i \in I} X_i$ ο χώρος γινόμενο. Αν, για κάθε $i \in I$, το A_i είναι κλειστό υποσύνολο του X_i , αποδείξτε ότι το $\prod_{i \in I} A_i$ είναι κλειστό στον X .

(β) Έστω $\mathbb{R}_S$ η ευθεία του Sorgenfrey, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία $\mathcal{T}_S$ που έχει ως βάση την οικογένεια των δεξιά ημιανοιχτών διαστημάτων $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Έστω (x_n) μια γνησίως αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ως υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}_S$ είναι κλειστό, αλλά όχι συμπαγές.

Καλή Επιτυχία!