

Εισαγωγή στην Τοπολογία - Περίοδος Σεπτεμβρίου 2024 (6-9-2024)

Θέμα 1ο

(0,5 + 1 + 1 + 0,5 = 3 μον.)

Έστω X ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο και

$$\mathcal{T}_{cc} = \{U \subseteq X : \text{το } X \setminus U \text{ είναι το πολύ αριθμήσιμο}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Αποδείξτε ότι:

- (α) Η οικογένεια $\mathcal{T}_{cc}$ είναι μια τοπολογία στο X (η οποία λέγεται *συναριθμήσιμη τοπολογία*).
- (β) Ο χώρος $(X, \mathcal{T}_{cc})$ είναι T_1 , αλλά δεν είναι T_2 (Hausdorff).
- (γ) Οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις από τον $(X, \mathcal{T}_{cc})$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι οι σταθερές.
- (δ) Κάθε υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X είναι πυκνό στον $(X, \mathcal{T}_{cc})$.

Θέμα 2ο

(1,5 + 1,5 = 3 μον.)

- (α) Έστω $(X, \mathcal{T})$ χώρος Hausdorff και $f : X \rightarrow X$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το σύνολο των σταθερών σημείων της f , δηλαδή το $K = \{x \in X : f(x) = x\}$ είναι κλειστό.
- (β) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι 2ος αριθμήσιμος.

Θέμα 3ο

(2 + 1 = 3 μον.)

- (α) Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, $X = \prod_{i \in I} X_i$ ο χώρος γινόμενο και, για κάθε $i \in I$, έστω $A_i \subseteq X_i$.
 - (i) Αποδείξτε ότι $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.
 - (ii) Αποδείξτε ότι γενικά **δεν** ισχύει $(\prod_{i \in I} A_i)^\circ = \prod_{i \in I} A_i^\circ$.
- (β) Έστω $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ο χώρος των πραγματικών ακολουθιών με την τοπολογία γινόμενο και έστω $c_{00} = \{x = (x(n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \ \forall n \geq k\}$, το σύνολο των τελικά μηδενικών ακολουθιών. Εξετάστε αν το σύνολο c_{00} είναι πυκνό στον χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Θέμα 4ο

(1 + 1 + 1 = 3 μον.)

- (α) Έστω X τοπολογικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
 - (i) Ο X είναι συνεκτικός.
 - (ii) Δεν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ (όπου το $\{0, 1\}$ έχει τη διακριτή τοπολογία).
- (β) Έστω X τοπολογικός χώρος και (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) κάθε A_n είναι συνεκτικό και (ii) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ είναι συνεκτικό.
- (γ) Έστω S^1 ο μοναδιαίος κύκλος ως υπόχωρος του Ευκλείδειου επιπέδου. Αποδείξτε ότι ο S^1 δεν είναι ομοιομορφικός με κανέναν υπόχωρο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Καλή Επιτυχία!