

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

31/01/2020

ΘΕΜΑ 1. (1.5 μον) Θεωρούμε ένα άπειρο σύνολο X με την συμπεπερασμένη τοπολογία \mathcal{T} . Νδο για κάθε $x \in X$ η κλειστή θήκη του $X \setminus \{x\}$ συμπίπτει με τον X και να εξετάσετε αν ο (X, \mathcal{T}) είναι T_1, T_2, T_3, T_4 . Είναι ο (X, \mathcal{T}) συμπαγής;

ΘΕΜΑ 2. (2 μον) Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Εφοδιάζουμε τον $X \times Y$ με την τοπολογία-γινόμενο. Νδο $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ και να εξετάσετε αν ισχύουν οι ισότητες $(A \times B)^o = A^o \times B^o$ και $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.

ΘΕΜΑ 3. (1.5 μον) Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής, αν και μόνον αν, για κάθε δίκτυο (x_λ) στο X με $x_\lambda \rightarrow x$, ισχύει $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$. Μπορούν τα δίκτυα να αντικατασταθούν με ακολουθίες;

ΘΕΜΑ 4. (1 μον) Θεωρούμε δύο οικογένειες τοπολογικών χώρων $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}$ και μια οικογένεια συνεχών απεικονίσεων $\{f_i : X_i \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$. Εφοδιάζουμε τα γινόμενα $\prod X_i$ και $\prod Y_i$ με τις αντίστοιχες τοπολογίες-γινόμενα. Νδο η απεικόνιση $\phi : \prod X_i \rightarrow \prod Y_i$ με $\phi(x) = (f_i(x_i))$, για κάθε $x = (x_i)$, είναι συνεχής.

ΘΕΜΑ 5. (1 μον) Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Να εξετάσετε αν ισχύει η ισοδυναμία: $X \times Y$ κατά μονοπάτια συνεκτικός $\Leftrightarrow X$ και Y κατά μονοπάτια συνεκτικοί.

ΘΕΜΑ 6. (1.5 μον) Νδο οι χώροι $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ και $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$, όπου \mathcal{T} η συνήθης τοπολογία και \mathcal{T}_S η τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων, δεν είναι ομοιομορφικοί. Επίσης νδο οι τοπολογικοί υπόχωροι $[0, 1)$ και $(0, 1)$ του \mathbb{R} δεν είναι ομοιομορφικοί.

ΘΕΜΑ 7. (2 μον) Νδο κάθε 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος είναι διαχωρίσιμος και Lindelöf.

ΘΕΜΑ 8. (1.5 μον) Έστω $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ τοπολογίες στο X με $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Αν ο X είναι συμπαγής και Hausdorff και ως προς τις δύο τοπολογίες, νδο $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Να απαντηθούν όλα τα θέματα.

Καλή Επιτυχία !!!