4.2 Το Λήμμα του Urysohn το Λήμμα της εμφύτευσης και το θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn.

Ο κύριος στόχος αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη ενός θεμελιώδους αποτελέσματος γνωστού ως το Λήμμα του Urysohn.

Το αποτέλεσμα αυτό εγγυάται την ύπαρξη συνεχών μη σταθερών πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων επί ενός τ. χ. X, υπό την προϋπόθεση ότι ο X είναι φυσιολογικός. Το Λήμμα του Urysohn έχει σημαντικές συνέπειες όπως είναι το θεώρημα επέκτασης του Tietze και το θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn.

Θεώρημα 4.18 (Λήμμα του Urysohn) Έστω X χώρος Hausdorff. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Ο X είναι φυσιολογικός

(β) Για κάθε ζεύγος ξένων και κλειστών υποσυνόλων A, B του X, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{X} \to [0,1]$ η οποία ονομάζεται συνάρτηση Urysohn, έτσι ώστε

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathrm{A} \text{ και } f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathrm{B}.$$

Απόδειξη .(β) $\Rightarrow$(α) Έστω A και B ξένα (μη κενά) κλειστά υποσύνολα του X. Θεωρούμε μια συνάρτηση Urysohn f για αυτό το ζεύγος. Τότε τα σύνολα, $U = \left\{ x \in \mathrm{X} : f(x) < \frac{1}{2} \right\}$ και $V = \left\{ x \in \mathrm{X} : f(x) > \frac{1}{2} \right\}$, είναι ξένα και ανοικτά τα οποία περιέχουν τα A και B αντίστοιχα.

(α) $\Rightarrow$(β). Για κάθε ρητό αριθμό r του διαστήματος $[0,1]$ θα ορίσουμε ένα ανοικτό σύνολο $V_r \subseteq \mathrm{X}$ ώστε να ισχύουν:

(1) $$\overline{V_r} \subseteq V_s, \text{ αν } r < s \text{ και}$$

(2) $$\mathrm{A} \subseteq V_0, \mathrm{B} = \mathrm{X} \setminus V_1.$$

Τα σύνολα V_r θα ορισθούν με επαγωγή. Έστω $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, μια 1-1 αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$ ώστε $r_1 = 0$ και $r_2 = 1$. Πρώτα θέτουμε $V_1 = \mathrm{X} \setminus \mathrm{B}$. Επειδή το σύνολο A είναι κλειστό, $\mathrm{A} \subseteq V_1$ με το V_1 ανοικτό και ο X είναι φυσιολογικός, από την πρόταση 4.6 (β) υπάρχει ανοικτό σύνολο V_0 ώστε $\mathrm{A} \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V_1$.

Ας συμβολίσουμε με $\mathrm{I}_n, n \geq 2$, την ακόλουθη συνθήκη,

(I_n) $\overline{V_{r_i}} \subseteq V_{r_s}$, οποτεδήποτε $r_i < r_j$ και $i, j \leq n$. Έπεται τότε από τα παραπάνω ότι η συνθήκη (2) καθώς και η I_2 ικανοποιούνται.

Έστω $n \geq 2$. Υποθέτουμε ότι τα σύνολα V_{r_i} έχουν οριστεί για $i \leq n$ και ικανοποιούν την I_n. Το σύνολο $\{r_1,...,r_n\}$ περιέχει τα σημεία $r_1 = 0$ και $r_2 = 1$, και άρα είναι μια διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$. Έτσι ο ρητός r_{n+1} ανήκει σε ένα μοναδικό διάστημα, έστω (r_l, r_m), αυτής της διαμέρισης. Επειδή, $r_l < r_m$, έπεται από την I_n ότι $\overline{V_{r_l}} \subseteq V_{r_m}$.

Επειδή ο X είναι φυσιολογικός έπεται (πάλι) από την πρόταση 4.6 (β) η ύπαρξη ενός ανοικτού συνόλου U ώστε $V_{r_l} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V_{r_m}$. Θέτουμε $V_{r_{n+1}} = U$ και παρατηρούμε ότι τα σύνολα $V_{r_1},...,V_{r_{n+1}}$, ικανοποιούν την I_{n+1}. (Έστω s,t δύο διαφορετικά σημεία του $\{r_1,...,r_{n+1}\}$. Αν και τα δύο ανήκουν στο $\{r_1,...,r_n\}$ τότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε το συμπέρασμα. Υποθέτουμε τώρα ότι ένα από τα δύο έστω το $t = r_{n+1}$ και το άλλο, δηλαδή το s ανήκει στο $\{r_1,...,r_n\}$. Τότε, είτε $s \leq r_l$, επομένως $\overline{V_s} \subseteq \overline{V_{r_l}} \subseteq V_{r_{n+1}}$ ή $r_m \leq s$, οπότε $\overline{V_{r_{n+1}}} \subseteq V_{r_m} \subseteq V_s$. Έτσι η I_{n+1} ικανοποιείται.)

Η επαγωγή μας είναι πλήρης, και έτσι η ακολουθία $V_{r_1},...,V_{r_n},...$ που κατασκευάσαμε ικανοποιεί τις (1) και (2)

Η ζητούμενη συνάρτηση $f : \mathrm{X} \to [0,1]$ ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο,

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\}, & \text{αν } x \in V_1 \\ 1 & , \text{αν } x \in \mathrm{X} \setminus V_1 \end{cases}$$

Από την (2) έπεται ότι $f(\mathrm{A}) = \{0\}$ και $f(\mathrm{B}) = \{1\}$.

Η συνέχεια της f αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της κατασκευής μας, δηλαδή την (1). Για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι οι αντίστροφες εικόνες μέσω της f των διαστημάτων $[0,a)$ και $(b,1]$, όπου $a \leq 1$ και $b \geq 0$, είναι ανοικτά υποσύνολα του X. (Είναι προφανές ότι $f(\mathrm{X}) \subseteq [0,1]$.)

Η ανισότητα $f(x) < a$ ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει (ρητός) r με $r < a$ ώστε $x \in V_r$, επομένως το σύνολο $f^{-1}([0,a)) = \bigcup \{V_r : r < a\}$ είναι ανοικτό. Επίσης, η ανισότητα $f(x) > b$ ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει $r' > b$ ώστε $x \notin V_{r'}$, το οποίο, από την (1), σημαίνει ότι υπάρχει $r > b$ ώστε $x \notin \overline{V_r}$. Επομένως το σύνολο

$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup \left\{ \mathrm{X} \setminus \overline{V_r} : r > b \right\} = \mathrm{X} \setminus \bigcap \left\{ \overline{V_r} : r > b \right\}$$

είναι ομοίως ανοικτό.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

…………………………………………………

Το <u>θεώρημα επέκτασης του Tietze</u> είναι ένας ακόμη χαρακτηρισμός των φυσιολογικών χώρων στην απόδειξη του οποίου το κρίσιμο εργαλείο είναι το Λήμμα του Urysohn . Παραθέτουμε αυτό το αποτέλεσμα χωρίς απόδειξη για την οποία παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία.

<u>Θεώρημα</u> 4.19 (Επέκτασης του Tietze) Έστω X ένας χώρος Hausdorff. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Ο X είναι φυσιολογικός.

(β) Για κάθε κλειστό $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to R$ έχει μια συνεχή επέκταση $F : \mathrm{X} \to R$. (Αν $|f(x)| < c$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ τότε η F μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $|F(x)| < c$ για κάθε $x \in \mathrm{X}$.)

<u>Παρατήρηση</u> 4.20 . 1) Αν X και Y τ.χ., $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ και $f:\mathrm{A} \to \mathrm{Y}$ συνεχής συνάρτηση, μια συνεχής συνάρτηση $F:\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ ώστε $F\Big|_{\mathrm{A}} = f$ λέγεται μια <u>συνεχής επέκταση</u> της f .

2) Είναι εύκολο να αποδείξουμε την συνεπαγωγή (β) $\Rightarrow$(α) του θεωρήματος του Tietze :

Έστω A και B κλειστά ξένα (και μη κενά) υποσύνολα του X. Ορίζουμε μία συνάρτηση $f:\mathrm{A}\bigcup \mathrm{B} \to R$ θέτοντας $f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ και $f(y)=1$ για κάθε $y \in \mathrm{B}$.

Η f είναι τότε συνεχής συνάρτηση στον υπόχωρο $\mathrm{A}\bigcup \mathrm{B}$ του X (γιατί;), η οποία από την υπόθεσή μας επεκτείνεται σε μια συνεχή συνάρτηση $F:\mathrm{X} \to R$. Έπεται ότι, αν U και V είναι ξένες ανοικτές περιοχές των 0 και 1στο R τότε οι $F^{-1}(U)$ και $F^{-1}(V)$ είναι ξένα ανοικτά υποσύνολα του X, έτσι ώστε $\mathrm{A} \subseteq F^{-1}(U)$ και $\mathrm{B} \subseteq F^{-1}(V)$.

Το αποτέλεσμα αυτό μας λέει ακόμη ότι το Λήμμα του Urysohn μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του θεωρήματος επέκτασης του Tietze.

3)Στην παρατήρηση 4.11 δώσαμε μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος 4.10, το οποίο ισχυρίζεται ότι κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος είναι φυσιολογικός. Η παρατήρηση αυτή είναι ουσιαστικά μια απόδειξη του Λήμματος του Urysohn στην περίπτωση που ο X είναι μετρικοποιήσιμος.

……………………………………………

<u>Ορισμός</u> 4.21. Έστω $f_i:\mathrm{Y} \to \mathrm{X}_i, i \in \mathrm{I}$, οικογένεια συναρτήσεων. Η <u>αποτίμηση</u> e αυτής της οικογένειας είναι η συνάρτηση

$$e:\mathrm{Y} \to \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$$

που σε κάθε $y \in \mathrm{Y}$ ορίζεται ως $e(y) = \left(f_i(y)\right)_{i \in \mathrm{I}}$.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1)Κάθε συνάρτηση $F:\mathrm{Y} \to \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση αποτίμησης μιας κατάλληλης οικογένειας συναρτήσεων. Πράγματι, αρκεί να θέσουμε $f_i = \pi_i o F$, για κάθε $i \in \mathrm{I}$, τότε προφανώς $F(x) = \left(f_i(x)\right)_{i \in \mathrm{I}}$.

2) Υποθέτουμε τώρα ότι Y και $\mathrm{X}_i, i \in \mathrm{I}$, είναι τοπολογικοί χώροι. Τότε μια συνάρτηση $F : \mathrm{Y} \to \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$, είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $f_i = \pi_i o F$ είναι συνεχείς για κάθε $i \in \mathrm{I}$ (πρβλ. πρόταση 2.10 (β)).

<u>Λήμμα </u>4.22 (Το Λήμμα της Εμφύτευσης).

Έστω $\mathrm{Y}, \mathrm{X}_i, i \in \mathrm{I}$, τοπολογικοί χώροι, $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ και για κάθε $i \in \mathrm{I}$ έστω $f_i : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_i$ μία συνάρτηση. Έστω ακόμη $e : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ η συνάρτηση αποτίμησης της οικογένειας $\{ f_i : i \in \mathrm{I} \}$ δηλαδή, $e(y) = \left(f_i(y) \right)_{i \in \mathrm{I}}$, για $y \in \mathrm{Y}$. Υποθέτουμε ότι:

(α) Κάθε f_i είναι συνεχής.

(β) Η οικογένεια $\{ f_i : i \in \mathrm{I} \}$ <u>διαχωρίζει τα σημεία</u> του Y, δηλαδή αν $y_1, y_2 \in \mathrm{Y}$ και $y_1 \neq y_2$, τότε υπάρχει $i \in \mathrm{I}$ ώστε $f_i(y_1) \neq f_i(y_2)$

(γ) Η οικογένεια $\{ f_i : i \in \mathrm{I} \}$ διαχωρίζει <u>σημεία και κλειστά</u> σύνολα του Y, δηλαδή αν $y \in \mathrm{Y}$ και $F \subseteq \mathrm{Y}$ κλειστό με $y \notin F$ υπάρχει $i \in \mathrm{I}$ ώστε $f_i(y) \notin \overline{f_i(F)}$.

Τότε η απεικόνιση e είναι ένας ομοιομορφισμός του Y και του υποχώρου $e(\mathrm{Y})$ του χώρου X.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $y_1 \neq y_2$ στοιχεία του Y. Τότε υπάρχει $j \in \mathrm{I}$: $f_j(y_1) \neq f_j(y_j)$. Κατά συνέπεια

$$e(y_1) = \left(f_i(y_1) \right)_{i \in \mathrm{I}} \neq \left(f_i(y_2) \right)_{i \in \mathrm{I}} = e(y_2)$$

Άρα η e είναι $1-1$.

Από τις παρατηρήσεις (1) και (2) μετά τον ορισμό 4.21 έπεται ότι η απεικόνιση e είναι συνεχής.

Για να αποδείξουμε ότι η e είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ Y και $e(\mathrm{Y})$, είναι αρκετό να δειχθεί ότι αν $U \subseteq \mathrm{Y}$ είναι ανοικτό στον Y τότε το $e(U)$ είναι ανοικτό στον υπόχωρο $e(\mathrm{Y})$ του X.

Έστω λοιπόν $U \subseteq \mathrm{Y}$ ανοικτό και $y \in U$ τότε $y \notin \mathrm{Y} \setminus U$ και $\mathrm{Y} \setminus U$ κλειστό. Από την συνθήκη (γ) της υπόθεσης θα υπάρχει i_0 ώστε $f_{i_0}(y) \notin \overline{f_{i_0}(\mathrm{Y} \setminus U)}$.

Θέτουμε, $$V = \pi_{i_0}^{-1}\left(\mathrm{X}_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(\mathrm{Y} \setminus U)}\right).$$

Είναι σαφές ότι $e(y) \in V$ και ότι το V είναι βασικό ανοικτό στον X ως αντίστροφη εικόνα ανοικτού μέσω προβολής.

Παρατηρούμε ότι $e(y) \in V \bigcap e(\mathrm{Y}) \subseteq e(U)$. Πράγματι έστω $x \in V \bigcap e(\mathrm{Y})$ τότε $x = \left(f_i(z)\right)_{i \in \mathrm{I}}$ για κάποιο $z \in \mathrm{Y}$. Έπεται ότι, $f_{i_0}(z) \notin \overline{f_{i_0}(\mathrm{Y} \setminus U)}$, που σημαίνει ότι $z \notin \mathrm{Y} \setminus U \Leftrightarrow z \in U$, άρα $x = e(z) \in e(U)$.

Συνοψίζοντας, δοθέντος $y \in U$, βρήκαμε ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο V του X ώστε $e(y) \in V \bigcap e(\mathrm{Y}) \subseteq e(U)$. Επομένως το $e(U)$ είναι ανοικτό στον $e(\mathrm{Y})$ και έτσι έχουμε το συμπέρασμα.

<u>Παρατήρηση</u> 4.23. Είναι σαφές ότι αν ο χώρος Y είναι Hausdorff τότε (επειδή τα πεπερασμένα υποσύνολα του Y είναι κλειστά, πρβλ. παρατήρηση 4.5) η συνθήκη (β) του λήμματος της εμφύτευσης μπορεί να παραληφθεί, εφόσον καλύπτεται από την συνθήκη (γ).

……………………………………………

Πρόκειται να αποδείξουμε τώρα το δεύτερο σημαντικότερο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου. Το αποτέλεσμα αυτό μας δίνει συνθήκες κάτω από τις οποίες ένας τοπολογικός χώρος είναι (διαχωρίσιμος και) μετρικοποιήσιμος και το οποίο αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως το <u>θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn</u>.

<u>Θεώρημα</u> 4.24 (Μετρικοποίησης του Urysohn) Κάθε κανονικός χώρος X με αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του είναι μετρικοποιήσιμος.

<u>Απόδειξη.</u> Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι ο X είναι ομοιομορφικός με ένα υπόχωρο του κύβου του Hilbert $[0,1]^{\mathrm{N}}$. Από το λήμμα της εμφύτευσης και την παρατήρηση 4.23 έπεται ότι για να αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό, αρκεί να βρούμε μια αριθμήσιμη οικογένεια

συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to [0,1], n \in N$, με την ιδιότητα να διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του X.

Έστω $B = \{B_n : n \geq 1\}$ μια αριθμήσιμη βάση για τον X. Για κάθε ζεύγος $n, m \in N$, ώστε να ισχύει, $\overline{B_n} \subseteq B_m$, και επειδή ο X είναι από το θεώρημα 4.13 φυσιολογικός χώρος, εφαρμόζουμε το Λήμμα του Urysohn και επιλέγουμε μια συνεχή συνάρτηση $g_{n,m} : X \to [0,1]$, έτσι ώστε $g_{n,m}\left(\overline{B_n}\right) = \{1\}$ και $g_{n,m}(X \setminus B_m) = \{0\}$. Τότε η αριθμήσιμη οικογένεια συναρτήσεων $\{g_{n,m} : n, m \in N\}$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας.

Πράγματι, έστω $x_0 \in X$ και U ανοικτό υποσύνολο του X με $x_0 \in U$. Τότε υπάρχει ένα μέλος της βάσης B έστω B_m ώστε $x_0 \in B_m \subseteq U$. Επειδή ο X είναι κανονικός χώρος υπάρχει $n \in N$ ώστε $x_0 \in \overline{B_n} \subseteq B_m$ (πρβλ. πρόταση 4.6 (α)).

Θεωρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση $g_{n,m}$ και παρατηρούμε ότι, $g_{n,m}(x_0) = 1$ και $g_{n,m}(x) = 0$ για κάθε $x \in X \setminus U$. Έτσι αποδείξαμε ότι $g_{n,m}(x_0) = 1 \notin \overline{g_{n,m}(X \setminus U)} = \{0\}$ που ήταν και το ζητούμενο.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.