6 Συνεκτικοί τοπολογικοί χώροι

Έστω $\mathrm{I} \subseteq R$ διάστημα και $f : \mathrm{I} \to R$ συνεχής συνάρτηση τότε, όπως γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, η f έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσου τιμής. Η ιδιότητα αυτή δεν εξαρτάται μόνο από την συνέχεια της f αλλά και από μία ιδιότητα του τοπολογικού χώρου I η οποία καλείται συνεκτικότητα. Διαισθητικά ένας χώρος είναι συνεκτικός αν δεν μπορεί να διαχωρισθεί σε δύο ''μεγάλα'' κομμάτια. Λαμβανομένου υπόψιν ότι ''μεγάλα'' θεωρούνται τα ανοικτά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 6.1. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται ότι είναι συνεκτικός αν δεν είναι ένωση δύο ξένων ανοικτών και μη κενών υποσυνόλων του. (Δηλαδή δεν υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U και V του X ώστε $U \neq \varnothing \neq V, U \bigcap V = \varnothing$ και $\mathrm{X} = U \bigcup V$.)

Ένα υποσύνολο $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ λέγεται ότι είναι συνεκτικό αν είναι συνεκτικό ως υπόχωρος του X. (Δηλαδή, το A εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία είναι συνεκτικός χώρος.)

Προφανώς τα μονοσύνολα κάθε τ.χ. X είναι συνεκτικά σύνολα.

Παραδείγματα 6.2. 1)Ο χώρος του Sierpinski $\mathrm{X} = \{\alpha, b\}$ είναι συνεκτικός, εφόσον μόνη διαμέριση του X είναι τα $\{\alpha\}$ και $\{b\}$, όμως το $\{b\}$ δεν είναι ανοικτό (Πρβλ. παράδειγμα 1.2 (4).)

2)Έστω X άπειρο σύνολο με την συμπεπερασμένη τοπολογία τότε ο X είναι συνεκτικός χώρος, εφόσον αν U και V είναι ανοικτά μη κενά υποσύνολα του X τότε $U \bigcap V \neq \varnothing$.

(Πρβλ. παράδειγμα 1.2 (5)).

3)Ο χώρος R_S δεν είναι συνεκτικός, εφόσον τα σύνολα $(-\infty,\alpha)$ και $[\alpha,+\infty)$ είναι και τα δύο ανοικτά στον R_S (Πρβλ. παράδειγμα 1.33 (2).)

4)Ο χώρος των ρητών $Q\subseteq R$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του R. Πράγματι τα $\left(\sqrt{2},+\infty\right)\bigcap Q$ και $\left(-\infty,\sqrt{2}\right)\bigcap Q$ συνιστούν μια διαμέριση του Q σε δύο (σχετικά) ανοικτά μη κενά σύνολα.

<u>Θεώρημα</u> 6.3 . (Συνεκτικότητα των διαστημάτων). Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του R με περισσότερα από ένα στοιχεία είναι τα διαστήματα (ανοικτά, κλειστά, ημιανοικτά, φραγμένα η μη φραγμένα). Ιδιαίτερα ο R είναι συνεκτικός χώρος.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω I ένα συνεκτικό υποσύνολο του R με $|\mathrm{I}|\geq 2$. Αν το I δεν είναι διάστημα τότε θα υπάρχουν $\alpha,b\in\mathrm{I}$ με $\alpha<b$ και κάποιο $c\in(a,b)$ ώστε $c\notin\mathrm{I}$, είναι τότε σαφές ότι τα σύνολα $(-\infty,c)\bigcap\mathrm{I}$ και $(c,+\infty)\bigcap\mathrm{I}$ συνιστούν μια διαμέριση του I σε δύο (σχετικά) ανοικτά μη κενά σύνολα, το οποίο αντιφάσκει στην υπόθεση.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι I είναι ένα διάστημα του R. Αν το I δεν ήταν συνεκτικό υποσύνολο του R, τότε $\mathrm{I}=U\bigcup V$,όπου U και V ξένα , ανοικτά στο I μη κενά σύνολα. Έστω $\alpha\in U$ και $b\in V$ τότε $\alpha\neq b$. Ας υποθέσουμε (όπως μπορούμε) ότι $\alpha<b$. Θέτουμε $a_0=\sup\{x\in R:[a,x)\subseteq U\}$, τότε $a_0\leq b$ και επειδή το I είναι διάστημα $a_0\in\mathrm{I}$. Παρατηρούμε ότι $a_0\in cl_{\mathrm{I}}U=\mathrm{I}\bigcap\overline{U}$, όμως το U είναι κλειστό στο I (εφόσον $U=\mathrm{I}\setminus V$) επομένως $a_0\in U$ και $a_0<b$. Επειδή το U είναι ανοικτό στο διάστημα I, $\alpha_0\in U,a,b\in\mathrm{I}$ και $\alpha\leq a_0<b$, έπεται ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε $[a_0,\alpha_0+\delta)\subseteq U\Rightarrow[a,a_0+\delta)\subseteq U$ το οποίο αντιφάσκει με τον ορισμό του a_0.

……………………………………………………….

Ο ορισμός της συνεκτικότητας μπορεί να επαναδιατυπωθεί με τους ακόλουθους πιο εύχρηστους τρόπους.

<u>Πρόταση </u>6.4 Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι για ένα τοπολογικό χώρο X.

(α) Ο X είναι συνεκτικός.

(β) Τα μόνα υποσύνολα του X τα οποία είναι ανοικτά και συγχρόνως κλειστά είναι τα $\varnothing$ και X.

(γ) Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{X}\to\{0,1\}$ επί του $\{0,1\}$, όπου ο χώρος $\{0,1\}$ έχει την διακριτή τοπολογία.

<u>Απόδειξη.</u> (α) $\Rightarrow$(β) Αν $U\subseteq\mathrm{X}$ είναι ανοικτό και κλειστό και $U\neq\varnothing,\mathrm{X}$, τότε $\mathrm{X}=U\bigcup(\mathrm{X}\setminus U)$ από όπου έπεται ότι ο X δεν είναι συνεκτικός.

(β) $\Rightarrow$(γ) Αν $f:\mathrm{X}\to\{0,1\}$ ήταν μια συνεχής συνάρτηση του X επί του $\{0,1\}$, τότε $f^{-1}(\{0\})\neq\varnothing,\mathrm{X}$ και επειδή το $\{0\}$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του (διακριτού) χώρου $\{0,1\}$ το σύνολο $f^{-1}(\{0\})$ είναι ανοικτό και κλειστό στον X, άτοπο.

(γ) $\Rightarrow$(α) Αν ο X δεν ήταν συνεκτικός τότε $\mathrm{X}=U\bigcup V$ με $U\neq\varnothing\neq V$, $U\bigcap V=\varnothing$ και U,V ανοικτά στον X. Τότε τα U και V είναι επίσης κλειστά στον X και η χαρακτηριστική συνάρτηση $x_U:\mathrm{X}\to\{0,1\}$ είναι συνεχής και επί του $\{0,1\}$, άτοπο.

<u>Πρόταση </u>6.5 Η συνεχής εικόνα συνεκτικού χώρου είναι συνεκτικό σύνολο. Δηλαδή, αν $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ είναι συνεχής και X συνεκτικός χώρος τότε το $f(\mathrm{X})$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του χώρου Y.

<u>Απόδειξη .</u>Η απεικόνιση $f:\mathrm{X}\to f(\mathrm{X})$ είναι συνεχής (πρβλ. πρόταση 1.45(γ)) έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{Y}=f(\mathrm{X})$. Αν ο Y δεν ήταν συνεκτικός τότε από την

προηγούμενη πρόταση θα υπήρχε μια συνεχής συνάρτηση $g:\mathrm{Y}\to\{0,1\}$ με $g(\mathrm{Y})=\{0,1\}$. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $gof:\mathrm{X}\to\{0,1\}$ θα ήταν συνεχής και επί του $\{0,1\}$, το οποίο αντιφάσκει με την συνεκτικότητα του X.

……………………………………..

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα καταλήγουμε στην ακόλουθη γενίκευση του θεωρήματος ενδιαμέσου τιμής του Απειροστικού Λογισμού

Θεώρημα 6.6 (Ενδιαμέσου τιμής). Έστω X συνεκτικός χώρος και $f:\mathrm{X}\to R$ συνεχής συνάρτηση, τότε η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών της .

Απόδειξη. Έπεται προφανώς από το προηγούμενο αποτέλεσμα και τον χαρακτηρισμό των συνεκτικών υποσυνόλων του R (θεώρημα 6.3).

Λήμμα 6.7. Έστω $\{\mathrm{A}_i : i\in\mathrm{I}\}$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X ώστε $\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i\neq\varnothing$, τότε η ένωση $\mathrm{A}=\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.

Απόδειξη. Έστω $x_0\in\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i$ και $f:\mathrm{A}\to\{0,1\}$ τυχούσα συνεχής συνάρτηση. Επειδή κάθε A_i είναι συνεκτικό η $f|\mathrm{A}_i$ δεν μπορεί να είναι επί του $\{0,1\}$ και επειδή $x_0\in\mathrm{A}_i$ για κάθε $i\in\mathrm{I}$, έχουμε ότι $f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathrm{A}_i$ και κάθε $i\in\mathrm{I}$, δηλαδή $f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$. Επομένως η f δεν μπορεί να είναι επί του $\{0,1\}$ και έτσι από την πρόταση 6.4 το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.

…………………………………………..

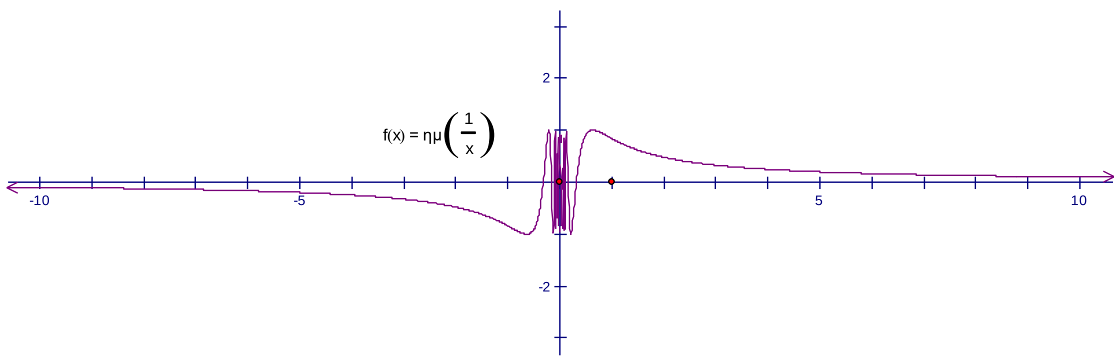
<u>Πρόταση</u> 6.8. Έστω $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ συνεκτικό σύνολο και $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \subseteq \overline{\mathrm{A}}$, τότε το B είναι συνεκτικό σύνολο. Ιδιαίτερα , η κλειστότητα ενός συνεκτικού συνόλου είναι συνεκτικό.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $f : \mathrm{B} \to \{0,1\}$ συνεχής συνάρτηση. Επειδή το A είναι συνεκτικό η $f|\mathrm{A}$ δεν είναι επί του $\{0,1\}$. Επειδή $cl_{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B}$, η συνέχεια της f επί του B συμπεραίνει ότι $f(\mathrm{B}) = f(cl_{\mathrm{B}}\mathrm{A}) \subseteq \overline{f(\mathrm{A})} = f(\mathrm{A})$, επομένως η f δεν είναι επί του $\{0,1\}$ και άρα το B είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.

<u>Παράδειγμα</u> 6.9 Έστω S το ακόλουθο υποσύνολο του Ευκλειδείου επιπέδου, $S = \left\{(x,y) : y = \eta\mu\frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\right\}$. Επειδή το S είναι εικόνα του διαστήματος $(0,1]$ μέσω της συνεχούς απεικόνισης $\varphi : x \in (0,1] \to \varphi(x) = \left(x, \eta\mu\frac{1}{x}\right) \in R^2$ το S είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^2. Επομένως η κλειστότητα του S στο R^2 είναι επίσης συνεκτικό σύνολο. Παρατηρούμε ότι $\overline{S} = S \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ και ακόμη ότι για κάθε υποσύνολο $\mathrm{Z} \subseteq \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ το σύνολο $\overline{S} \setminus \mathrm{Z}$ είναι επίσης συνεκτικό.

(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.) . Το σύνολο $\overline{S}$ είναι ένα κλασσικό παράδειγμα στην τοπολογία και ονομάζεται the <u>topologist's sine curve.</u>

Το S είναι βέβαια το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}, x \in (0,1]$.



<u>Θεώρημα</u> 6.10. Το καρτεσιανό γινόμενο συνεκτικών χώρων είναι συνεκτικός χώρος αν και μόνο αν κάθε παράγων του γινομένου είναι συνεκτικός.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια και $X = \prod_{i \in I} X_i$ με την τοπολογία γινόμενο.

'' $\Rightarrow$'' Έστω ότι ο X είναι συνεκτικός χώρος. Επειδή κάθε προβολή $\pi_i : X \to X_i$ είναι συνεχής και επί του X_i, από την πρόταση 6.5 έχουμε το συμπέρασμα.

'' $\Leftarrow$'' Αποδεικνύουμε πρώτα ότι το γινόμενο δύο συνεκτικών χώρων X και Y είναι συνεκτικός χώρος. Η απόδειξη αυτή είναι απλή αν σκεφθούμε με γεωμετρικούς όρους.

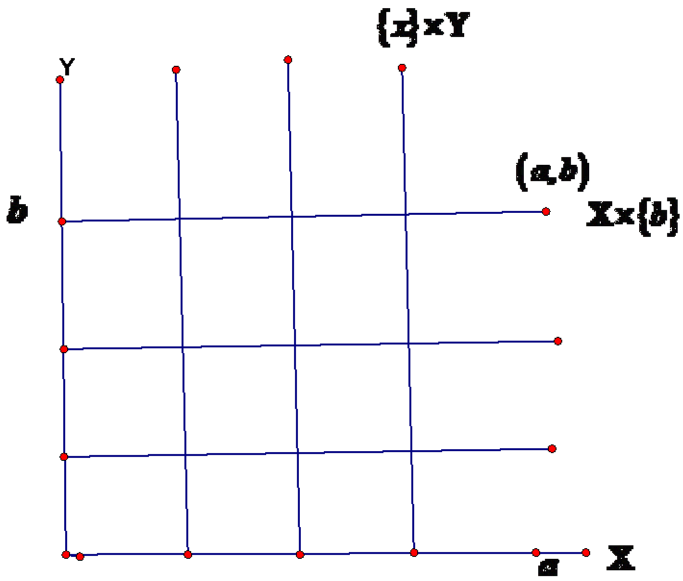
Έστω (a,b) ένα σημείο του γινομένου $X \times Y$ το οποίο σταθεροποιούμε. Παρατηρούμε ότι η « οριζόντια» ευθεία $X \times \{b\}$ είναι συνεκτικό σύνολο ως ομοιομορφική με το χώρο X και κάθε «κατακόρυφη» ευθεία $\{x\} \times Y$ είναι συνεκτική ως ομοιομορφική με τον Y

Έπεται από το λήμμα 6.7 ότι το σύνολο

$$T_x = \left(X \times \{b\}\right) \cup \left(\{x\} \times Y\right), x \in X$$

είναι συνεκτικό , αφού είναι ένωση δύο συνεκτικών συνόλων που έχουν ως κοινό σημείο το (x,b). Από το ίδιο λήμμα έπεται ότι η ένωση $\bigcup_{x \in X} T_x$ είναι συνεκτικό σύνολο, αφού το (a,b) είναι κοινό σημείο των συνεκτικών συνόλων $T_x, x \in X$.

Επειδή αυτή η ένωση ισούται προφανώς με $X \times Y$ έπεται ότι ο χώρος $X \times Y$ είναι συνεκτικός.



Η απόδειξη ότι κάθε πεπερασμένο γινόμενο συνεκτικών χώρων είναι συνεκτικός χώρος έπεται με επαγωγή στο πλήθος των παραγόντων. Με χρήση της απλής παρατήρησης ότι ο $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{n+1}$ είναι ομοιομορφικός με τον $(X_1 \times \ldots \times X_n) \times X_{n+1}$.

Η γενική περίπτωση της τυχούσας οικογένειας $\{X_i : i \in I\}$ συνεκτικών τοπολογικών χώρων αποδεικνύεται ως ακολούθως.

Επιλέγουμε ένα σημείο $b = (b_i)_{i \in I}$ του $X = \prod_{i \in I} X_i$. Συμβολίζουμε με Γ την οικογένεια των πεπερασμένων υποσυνόλων του I και για κάθε $F \in \Gamma$ έστω $C_F = \prod_{i \in F} A_i$, όπου $A_i = \{b_i\}$ αν $i \notin F$ και $A_i = X_i$ αν $i \in F$.

Ισχυριζόμαστε ότι κάθε C_F είναι ομοιομορφικός με τον χώρο $X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_n}$ όπου $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Πράγματι, η απεικόνιση

$$X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_n} \ni (x_{a_1}, \ldots, x_{a_n}) \to (y_a)_{a \in I} \in C_F$$

Όπου $y_a = x_a$, αν $\alpha \in F$ και $y_a = b_a$ όταν $\alpha \in I \setminus F$ είναι $1-1$ και επί και επιπλέον μεταφέρει τα βασικά ανοικτά του $X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_n}$ σε βασικά ανοικτά του C_F.

Από την πεπερασμένη περίπτωση του θεωρήματος μας η οικογένεια $\{C_F : F \in \Gamma\}$ αποτελείται από συνεκτικούς χώρους.

Επειδή $b = (b_i)_{i\in I} \in \bigcap_{F\in\Gamma} C_F$, έπεται από το λήμμα6.7 ότι η ένωση $C = \bigcup_{F\in\Gamma} C_F$ είναι συνεκτικός υπόχωρος του X. Αλλά είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ο C είναι πυκνός υπόχωρος του X (πρβλ. και την άσκηση 1 (δ) των παραγράφων 2.1,2.2). Έτσι από την πρόταση 6.8 συμπεραίνουμε ότι ο X είναι συνεκτικός.

<u>Παραδείγματα </u>6.11 Από το προηγούμενο θεώρημα καθώς και το θεώρημα 6.3 έπεται ότι οι ακόλουθοι τοπολογικοί χώροι είναι, με την τοπολογία γινόμενο, συνεκτικοί.

(α) Ο ευκλείδειος χώρος R^n και οι κύβοι $[0,1]^n$ και $[0,1]^N$.

(β) Γενικότερα ο χώρος R^Γ και ο κύβος $[0,1]^\Gamma$, όπου Γ τυχόν μη κενό σύνολο.

Η <u>συνεκτική συνιστώσα</u> $C(x)$ ενός σημείου x σε έναν τοπολογικό χώρο X είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του X τα οποία περιέχουν το σημείο x .

Από το λήμμα 6.7 και την πρόταση 6.8 έπεται προφανώς ότι οι συνεκτικές συνιστώσες είναι συνεκτικά και κλειστά υποσύνολα του X. Είναι σαφές ότι οι συνεκτικές συνιστώσες $C(x)$ και $C(y)$ δύο διαφορετικών σημείων x και y του X είτε συμπίπτουν ή είναι ξένα σύνολα. Έτσι το σύνολο όλων των διαφορετικών συνεκτικών συνιστωσών του χώρου X συνιστά μια <u>διαμέριση </u>του χώρου X σε (ανά δύο ξένα) <u>κλειστά</u> και <u>συνεκτικά</u> υποσύνολά του. Ακόμη σημειώνουμε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα $C(x)$ του X είναι ένα <u>μεγιστικό </u>συνεκτικό υποσύνολο του X: Δηλαδή, δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του X που να περιέχει γνήσια την $C(x)$ (γιατί;).

<u>Πρόταση</u> 6.12 Η συνεκτική συνιστώσα ενός σημείου $x=(x_i)$ στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathrm{X}=\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_i$ ταυτίζεται με το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in\mathrm{I}}C_i$, όπου C_i είναι η συνεκτική συνιστώσα του σημείου x_i στον χώρο X_i.

<u>Απόδειξη</u> Έστω C η συνεκτική συνιστώσα του x στον X. Επειδή για κάθε $i\in\mathrm{I}$ η προβολή $\pi_i(C)$ είναι συνεκτικό σύνολο και $x_i\in\pi_i(C)$, έχουμε ότι $\pi_i(C)\subseteq C_i, i\in\mathrm{I}$. Κατά συνέπεια $C\subseteq\prod_{i\in\mathrm{I}}C_i$ και βέβαια το γινόμενο $\prod_{i\in\mathrm{I}}C_i$ είναι από το θεώρημα 6.10, συνεκτικό σύνολο. Από το γεγονός ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι $C=\prod_{i\in\mathrm{I}}C_i$.

……………………………………

<u>Παραδείγματα</u> 6.13. 1) Έστω $\mathrm{X}=\{0\}\cup(0,1)\cup[2,3)$, θεωρούμενος ως υπόχωρος του R, τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του X είναι τα διαστήματα $[0,1)$ και $[2,3)$.

2) Αν ο τοπολογικός χώρος X έχει την διακριτή τοπολογία τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του X είναι τα μονοσύνολα του X (γιατί;).

3) Έστω $Q\subseteq R$ ο υπόχωρος των ρητών αριθμών. Αν $\varnothing\neq\mathrm{A}\subseteq Q$ και A είναι συνεκτικό υποσύνολο του Q τότε βέβαια το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του R και άρα από το θεώρημα 6.3 είναι ένα διάστημα. Έπεται προφανώς ότι το A είναι αναγκαία ένα μονοσύνολο. Παρατηρούμε ότι , αν και ο Q δεν έχει την διακριτή τοπολογία, οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι τα μονοσύνολα. Σημειώνουμε ότι ένας τ.χ. X λέγεται <u>ολικά μη</u> <u>συνεκτικός</u> αν $C(x)=\{x\}$, για κάθε $x\in\mathrm{X}$. Έτσι ο υπόχωρος Q του R είναι ολικά μη συνεκτικός.

4)Έστω $\mathrm{X}=\{0,1\}^N$ το σύνολο Cantor (με την τοπολογία γινόμενο) έπεται τότε από την πρόταση 6.12 και το παράδειγμα (2) ότι ο X είναι ολικά μη συνεκτικός χώρος. Σημειώνουμε ότι, το παρόν παράδειγμα (αλλά και το παράδειγμα (3) μας δείχνουν ότι οι συνεκτικές συνιστώσες δεν είναι αναγκαία ανοικτά σύνολα.

……………………………………………

Στο υπόλοιπο αυτό του κεφαλαίου θα συζητήσουμε (κυρίως) τη σχέση συνεκτικότητας και κυρτότητας σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα. Όσοι από τους αναγνώστες δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτή την έννοια, μπορούν να υποθέτουν οποτεδήποτε αναφερόμαστε σε έναν χώρο με νόρμα X, ότι στην θέση του X είναι ο ευκλείδειος χώρος R^n.

<u>Ορισμός</u> 6.14 Έστω X διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathrm{K}=R$ ή C. (Ο X υποτίθεται είτε πραγματικός η μιγαδικός διανυσματικός χώρος.)

(α) Έστω $a,b\in\mathrm{X}$ το (προσανατολισμένο) <u>ευθύγραμμο τμήμα</u> από το a στο b είναι το σύνολο

$$[a,b]=\{(1-t)a+tb : t\in[0,1]\}.$$

Αν $a\neq b$, τότε το $[a,b]$ είναι ένα διάστημα της ευθείας $\varphi(t)=a+t(b-a), t\in R$ (η οποία διέρχεται από το σημείο a και έχει την διεύθυνση του διανύσματος $b-a$) του χώρου X.

(β) Ένα υποσύνολο $\mathrm{K}\subseteq\mathrm{X}$ λέγεται κυρτό αν για κάθε $a,b\in\mathrm{K}$ ισχύει ότι $[a,b]\subseteq\mathrm{K}$.

(Παρατηρούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα a και b του X είναι κυρτό υποσύνολο του X.)

(γ) Έστω $a_0,a_1,\ldots,a_m$ σημεία του X. Η πολυγωνική γραμμή με κορυφές $a_0,a_1,\ldots,a_m$ είναι το σύνολο

$$\mathrm{P}=[\alpha_0,\alpha_1]\cup[\alpha_1,\alpha_2]\cup\ldots\cup[\alpha_{m-1},a_m].$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ μετρικοποιείται με την μετρική : $d(x,y)=\|x-y\|, x,y\in \mathrm{X}$. Τότε οι πράξεις του X, δηλαδή η διανυσματική πρόσθεση $(x,y)\in \mathrm{X}\times\mathrm{X}\to x+y\in\mathrm{X}$ καθώς και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός $(\lambda,x)\in \mathrm{K}\times\mathrm{X}\to \lambda x\in\mathrm{X}$, είναι συνεχείς απεικονίσεις (όπου ο $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ και ο $\mathrm{K}\times\mathrm{X}$, έχουν ο καθένας την αντίστοιχη τοπολογία γινόμενο).

<u>Πρόταση</u> 6.15. Έστω $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα. Τότε ισχύουν:

(α) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα και γενικότερα κάθε πολυγωνική γραμμή στον X είναι σύνολα συνεκτικά

(β) Κάθε κυρτό $\mathrm{K}\subseteq\mathrm{X}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Ιδιαίτερα ο X είναι συνεκτικός χώρος.

<u>Απόδειξη.</u> α) Έστω $a,b\in\mathrm{X}$, τότε η απεικόνιση $\varphi: R\to \mathrm{X}:\varphi(t)=a+t(b-a)$ είναι συνεχής και $\varphi([0,1])=[a,b]$. Επομένως το $[a,b]$ είναι συνεκτικό σύνολο. Επειδή $\varphi(R)$ είναι επίσης συνεκτικό σύνολο, έχουμε ότι και η ευθεία ε με εξίσωση $\varphi(t)=a+t(b-a)$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Το γεγονός ότι μια πολυγωνική γραμμή P είναι συνεκτικό σύνολο αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών της (αν έχει δύο κορυφές τότε είναι ευθύγραμμο τμήμα και είναι άρα συνεκτικό σύνολο). Για το επόμενο βήμα της επαγωγής χρησιμοποιούμε το λήμμα 6.7.

(β) Έστω $\mathrm{K}\subseteq\mathrm{X}$ κυρτό σύνολο. Επιλέγουμε $\alpha\in\mathrm{K}$. Επειδή το K είναι κυρτό ισχύει ότι $[\alpha,x]\subseteq\mathrm{K}$ για κάθε $x\in\mathrm{K}$ επομένως $\mathrm{K}=\bigcup\{[a,x]:x\in\mathrm{K}\}$.Επειδή το α ανήκει σε κάθε $[\alpha,x]$ και από τον ισχυρισμό (α) τα ευθύγραμμα τμήματα είναι σύνολα συνεκτικά, από το 6.7 έπεται το συμπέρασμα. Ο ίδιος ο χώρος X είναι προφανώς κυρτό σύνολο και άρα είναι συνεκτικός χώρος.

……………………. ………………………………

Παραδείγματα 6.16. 1) από την προηγούμενη πρόταση έχουμε μια ακόμη απόδειξη ότι ο ευκλείδειος χώρος R^n και ο κύβος $[0,1]^n$ είναι συνεκτικά σύνολα, εφόσον είναι κυρτά σύνολα. (Πρβλ. το παράδειγμα 6.11 (α)).

2)Στο ευκλείδειο επίπεδο R^2 έχουμε ότι κάθε δίσκος (ανοικτός ή κλειστός) και κάθε κυρτό πολύγωνο (τρίγωνο τετράπλευρο κ.τ.λ.) είναι κυρτό σύνολο.

(Ο ισχυρισμός ισχύει τόσο για το εσωτερικό ενός κυρτού πολυγώνου όσο και για ένα κλειστό πολύγωνο, δηλαδή το εσωτερικό μαζί με το σύνορό του.). Τα ίδια ισχύουν και για τις ελλείψεις του επιπέδου. Σημειώνουμε ακόμη ότι ανάλογα ισχύουν και για τον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο R^3.

3) Αν $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα τότε κάθε σφαίρα ανοικτή ή κλειστή του X είναι κυρτό σύνολο. Αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα για την κλειστή σφαίρα $\hat{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$, η απόδειξη για την ανοικτή σφαίρα $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ είναι ανάλογη. Έστω $a,b\in\hat{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ αν $z=(1-t)a+tb$, όπου $t\in[0,1]$ τότε

$$\|z-x\|=\|(1-t)(a-x)+t(b-x)\|\leq(1-t)\|a-x\|+t\|b-x\|\leq(1-t)\varepsilon+t\varepsilon=\varepsilon .$$

Άρα $z\in\hat{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$ και έτσι $[a,b]\subseteq\hat{\mathrm{B}}(x,\varepsilon)$.

Έστω Y ένα υποσύνολο του ευκλειδείου επιπέδου για το οποίο ισχύει ότι κάθε ζεύγος σημείων του a και b μπορούν να συνδεθούν με μία πολυγωνική γραμμή $\mathrm{P}\subseteq\mathrm{Y}$.

(Παραδείγματα τέτοιων συνόλων είναι τα κυρτά υποσύνολα του R^2 ή το σύνολο $R^2\setminus\{(0,0)\}$.) Είναι τότε εύκολο να αποδείξουμε ότι το Y είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^2. Η ιδέα αυτή οδηγεί σε μια ισχυροποίηση της συνεκτικότητας η οποία περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο.

<u>Ορισμός</u> 6.17. Έστω X τοπολογικός χώρος. Αν $x, y \in \mathrm{X}$, μια ʹʹ διαδρομήʹʹ ή ʹʹμονοπάτιʹʹ από το x στο y, είναι μια συνεχής απεικόνιση $f : [a,b] \subseteq R \to \mathrm{X}$ ώστε $f(a) = x$ και $f(b) = y$.

Ο X λέγεται ότι είναι <u>ʹʹκατά τόξα συνεκτικόςʹʹ</u>, αν κάθε ζεύγος σημείων του μπορούν να συνδεθούν με μία συνεχή απεικόνιση (διαδρομή) όπως παραπάνω.

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι αν ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός χώρος τότε είναι συνεκτικός: Έστω $\mathrm{X} = U \bigcup V$ μια διαμέριση του X σε ξένα ανοικτά μη κενά σύνολα. Θεωρούμε $f : [a,b] \subseteq R \to \mathrm{X}$ τυχούσα συνεχής απεικόνιση. Το σύνολο $f([a,b])$ είναι τότε συνεκτικό υποσύνολο του X και έτσι θα πρέπει να περιέχεται είτε στο U ή στο V. Επομένως δεν υπάρχει (συνεχής) διαδρομή η οποία να συνδέει ένα σημείο A του U με ένα σημείο B του V, το οποίο αντιφάσκει με την υπόθεση ότι ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, ένας συνεκτικός χώρος δεν είναι αναγκαία κατά τόξα συνεκτικός, όπως θα διαπιστώσουμε με τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Ένας ισοδύναμος τρόπος περιγραφής της έννοιας, που περιγράψαμε παραπάνω διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

<u>Πρόταση</u> 6.18.Έστω X τ.χ. και x_0 τυχόν στοιχείο του X. Ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός αν και μόνο αν κάθε $x \in \mathrm{X}$ μπορεί να συνδεθεί με το x_0 με μια συνεχή διαδρομή.

<u>Απόδειξη</u> . Αν ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός το αποτέλεσμα είναι προφανές. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η συνθήκη ικανοποιείται για το x_0 και ότι μας έχουν

δοθεί τα σημεία x και x' του X. Έστω $f:[0,1]\to \mathrm{X}$ μια συνεχής διαδρομή από το x στο x_0 και $g:[0,1]\to \mathrm{X}$ μια συνεχής διαδρομή από το x_0 στο x'. Τότε η απεικόνιση

$$\varphi(t)=\begin{cases} f(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής (στο $t=\frac{1}{2}$, έχουμε $f(1)=g(0)=x_0$,πρβλ. την πρόταση 1.47) και συνδέει το x $(\varphi(0)=x)$ με το x' $(\varphi(1)=x')$.

<u>Παραδείγματα</u> 6.19 1) Ο χώρος $\mathrm{X}=\overline{S}$ του παραδείγματος 6.9 είναι συνεκτικός αλλά όχι κατά τόξα συνεκτικός, εφόσον δεν υπάρχει συνεχής διαδρομή $f:[0,1]\to \mathrm{X}$ με $f(0)=(0,0)$ και $f(1)=\left(\frac{1}{\pi},0\right)$. Πράγματι μια απεικόνιση $f:[0,1]\to \mathrm{X}\subseteq R^2$ είναι συνεχής αν και μόνο αν οι $\pi_1 o f$ και $\pi_2 o f$ είναι συνεχείς (πρβλ. πρόταση2.10 (β)).

Έτσι αν η f ήταν συνεχής ώστε να συνδέει το σημείο $(0,0)$ με το $\left(\frac{1}{\pi},0\right)$, τότε η $\pi_1 o f$ θα έπαιρνε όλες τις τιμές $\frac{1}{n\pi}, n=1,2,\ldots,$ και η $\pi_2 o f$ θα έπαιρνε τις τιμές 1 και -1 σε κάθε περιοχή $[0,\delta)$ ($\delta>0$) του μηδενός. Έτσι δεν υπάρχει $\delta>0$ ώστε το διάστημα $[0,\delta)$ να απεικονίζεται στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ μέσω της $\pi_2 o f$ και η $\pi_2 o f$ δεν μπορεί να είναι συνεχής.

Σημειώνουμε ότι ο S είναι κατά τόξα συνεκτικός χώρος (γιατί;)

2)Κάθε κυρτό υποσύνολο του ευκλείδειου χώρου R^n (και γενικότερα ενός διανυσματικού χώρου με νόρμα) είναι προφανώς κατά τόξα συνεκτικός χώρος.

3)Έστω α ένα σημείο του R^n $(n \geq 2)$ τότε ο υπόχωρος $\mathrm{X} = R^n \setminus \{\alpha\}$ του R^n είναι κατά τόξα συνεκτικός χώρος (προφανώς όχι κυρτός). Πράγματι, αν x και y είναι σημεία του R^n διαφορετικά του α, μπορούμε να συνδέσουμε τα x και y με το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$ αν αυτό δεν περιέχει το σημείο α. Διαφορετικά, επιλέγουμε ένα σημείο z που δεν βρίσκεται στην ευθεία που συνδέει τα x και y και θεωρούμε την πολυγωνική γραμμή $P = [x, z] \cup [z, y]$. Επειδή η P είναι μια συνεχής διαδρομή από το x στο y (γιατί;) έπεται το συμπέρασμα.

Από το παράδειγμα 6.19 (3) έπεται το ακόλουθο ενδιαφέρον αποτέλεσμα.

Πρόταση 6.20. Οι χώροι R και R^n $(n \geq 2)$ δεν είναι ομοιομορφικοί.

Απόδειξη .Υποθέτουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $\varphi : R^n \to R$. Αν εξαιρέσουμε ένα σημείο α του χώρου R^n τότε προφανώς έχουμε τον ομοιομορφισμό $\varphi : R^n \setminus \{\alpha\} \to R \setminus \{\varphi(\alpha)\}$. Αυτό όμως είναι αδύνατο καθώς ο χώρος $R^n \setminus \{\alpha\}$ είναι από το παράδειγμα 6.19 (3) συνεκτικός ενώ ο χώρος $R \setminus \{\varphi(\alpha)\}$ δεν είναι συνεκτικός

(πρβλ. το θεώρημα 6.3).

Το θεώρημα ότι ο R^n δεν είναι ομοιομορφικός με τον R^m $(n \neq m)$ είναι επίσης αληθές, αλλά απαιτεί για την απόδειξή του λεπτότερες τεχνικές και έτσι παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία.

Σχετικά με το παράδειγμα 6.19 (3) παρατηρούμε ότι αν F πεπερασμένο υποσύνολο του R^n $(n \geq 2)$ τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι ο $R^n \setminus F$ είναι κατά τόξα συνεκτικός χώρος. Ισχύει ένα ακόμη ισχυρότερο αποτέλεσμα το οποίο είναι το ακόλουθο.

<u>Θεώρημα</u> 6.21. Έστω F ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του $R^n \left(n \geq 2\right)$ τότε ο $R^n \setminus F$ είναι κατά τόξα συνεκτικός χώρος.

<u>Απόδειξη</u> . Επιλέγουμε ένα σημείο $\alpha \in R^n \setminus F$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in R^n \setminus F$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $P \subseteq R^n \setminus F$ η οποία συνδέει το a με το x. Επειδή η P είναι μια συνεχής διαδρομή από το σημείο a στο σημείο x θα έχουμε το αποτέλεσμα (πρβλ. την πρόταση 6.18). Θεωρούμε , δοθέντος του x, το ευθύγραμμο τμήμα $\left[a,x\right]$ και έστω ℓ τυχόν ευθύγραμμο τμήμα (έστω μήκους ίσου με 1) το οποίο τέμνει το $\left[a,x\right]$ σε ακριβώς ένα σημείο διαφορετικό από τα a και x . Για κάθε $z \in \ell$ θεωρούμε την πολυγωνική γραμμή $P_z = \left[a,z\right] \bigcup \left[z,x\right]$. Κάθε P_z είναι συνεκτικό σύνολο και αν z_1, z_2 είναι διαφορετικά σημεία του ℓ τότε οι πολυγωνικές P_{z_1} και P_{z_2} τέμνονται μόνο στα σημεία a και x. Παρατηρούμε ότι τουλάχιστον μια P_z πρέπει να περιέχεται στον χώρο $R^n \setminus F$. Πράγματι αν $P_z \bigcap F \neq \varnothing$ για κάθε $z \in \ell$, τότε επειδή τα σημεία τομής για διαφορετικά z είναι και αυτά διαφορετικά, θα προέκυπτε μια $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ ενός υποσυνόλου του αριθμήσιμου συνόλου F και των σημείων του ℓ συμπέρασμα το οποίο αντιφάσκει με την αριθμησιμότητα του F

<u>Παρατηρήσεις</u> 6.22 1) Έστω $\left(\mathrm{X}, \|\cdot\|\right)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα για τον οποίο υποθέτουμε ότι $\dim \mathrm{X} \geq 2$, αν είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος. Παρατηρούμε τα ακόλουθα.

(α) Το θεώρημα 6.21 ισχύει (με ουσιαστικά την ίδια απόδειξη) και στον X.

(β) Έστω A υποσύνολο του X με την ιδιότητα ότι για κάθε $a,b \in \mathrm{A}$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $P = \left[z_0, z_1\right] \bigcup ... \bigcup \left[z_{m-1}, z_m\right]$ώστε $z_0 = a, z_m = b$ και $P \subseteq \mathrm{A}$. Τότε ο A είναι ένας κατά τόξα συνεκτικός υπόχωρος του X. (Την παρατήρηση αυτή την έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει .) Πράγματι η P μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής διαδρομή από το a στο b θέτοντας

$f(t) = (\lambda+1-t)z_{\lambda} + (t-\lambda)z_{\lambda+1}, t \in [\lambda, \lambda+1], \lambda = 0,1,\ldots,m-1$.

Παρατηρούμε ότι τότε, $f([\lambda, \lambda+1)) = [z_{\lambda}, z_{\lambda+1}]$.

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε ότι ένας χώρος X με την διακριτή τοπολογία και τουλάχιστον δύο σημεία δεν είναι συνεκτικός. Επίσης αποδείξτε ότι ένα πεπερασμένο υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff με τουλάχιστον δύο σημεία δεν είναι συνεκτικό.

2)Αποδείξτε ότι η επεκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών (παράδειγμα 1.38 (2)) είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος ο οποίος δεν είναι ομοιομορφικός με τον χώρο R των πραγματικών αριθμών.

3)Έστω X άπειρο σύνολο με την συμπεπερασμένη τοπολογία. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{X} \to R$ είναι σταθερή.

4)Έστω (X, τ) συνεκτικός τ.χ. και τ_1 μια τοπολογία στον X ώστε $\tau_1 \subseteq \tau$. Αποδείξτε ότι ο (X, τ_1) είναι συνεκτικός τ.χ..

5)Έστω $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n, \ldots$ ακολουθία συνεκτικών υποσυνόλων του χώρου X ώστε $\mathrm{A}_n \bigcap \mathrm{A}_{n+1} \neq \emptyset, n = 1,2,\ldots$ Αποδείξτε ότι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.

[<u>Υπόδειξη.</u> Τα σύνολα $\mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2 \bigcup \mathrm{A}_3, \ldots$, είναι συνεκτικά.]

6)Έστω $\{\mathrm{A}_i : i \in \mathrm{I}\}$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του χώρου X και A συνεκτικό υποσύνολο του X ώστε $\mathrm{A}_i \bigcap \mathrm{A} \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \mathrm{I}$. Αποδείξτε ότι η ένωση $\mathrm{A} \bigcup \left(\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i \right)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X. [<u>Υπόδειξη</u> Τα σύνολα $\mathrm{A}_i \bigcup \mathrm{A}, i \in \mathrm{I}$, είναι συνεκτικά.].

7)Έστω $\{A_i : i \in I\}$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του χώρου X ώστε κάθε δύο από αυτά να τέμνονται. Αποδείξτε ότι η ένωση $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.

[Υπόδειξη. Έστω $i_0 \in I$, τότε $A_i \bigcap A_{i_0} \neq \varnothing$ για κάθε $i \in I$.]

8)Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο X είναι συνεκτικός χώρος τότε το γράφημα $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ της f είναι συνεκτικό υποσύνολο του $X \times Y$ το οποίο είναι ομοιομορφικό με τον χώρο X.

(β) Αν ο X είναι ένας ανοικτός δίσκος του R^2 και $Y = R$ τότε η επιφάνεια $S = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^3.

9)Αποδείξτε ότι η S^n είναι συνεκτικός τ.χ. . Ισχύει αυτό το αποτέλεσμα για την επιφάνεια S_x της μοναδιαίας σφαίρας ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$;

[Υπόδειξη. Η απεικόνιση $x \in R^{n+1} \setminus \{0\} \to \dfrac{x}{\|x\|_2} \in S^n$ είναι συνεχής.]

10) Αποδείξτε ότι τα διαστήματα $[0,1], (0,1), [0,1)$ είναι ανά δύο μη ομοιομορφικοί τοπολογικοί χώροι.

[Υπόδειξη. Αν π.χ. υπήρχε ομοιομορφισμός $\varphi : [0,1] \to (0,1)$ τότε οι χώροι $(0,1)$ και $(0, \varphi(0)) \cup (\varphi(0), 1)$ θα ήταν ομοιομορφικοί.]

11)Αποδείξτε ότι το διάστημα $I = [0,1]$ δεν είναι ομοιομορφικό με τον μοναδιαίο κύκλο S^1 του R^2 και ότι το $[0, 2\pi)$ δεν είναι ομοιομορφικό με τον S^1.

12)Αποδείξτε ότι οι χώροι $S^n \, (n \geq 2)$ και S^1 δεν είναι ομοιομορφικοί

13) Στον Ευκλείδειο χώρο $R^n \, (n \geq 2)$, αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α)Αν $A_1 = \{x \in R^n : \text{όλες οι συντεταγμένες του } x \text{ είναι ρητοί}\}$, τότε το $R^n \setminus A_1$ είναι συνεκτικός χώρος.

(β) Αν $A_2 = \{x \in R^n : \text{όλες οι συντεταγμένες του } x \text{ είναι άρρητοι}\}$, τότε το A_2 δεν είναι συνεκτικός χώρος.

(γ) Αν $A_3 = \{x \in R^n : \text{τουλάχιστον μια συντεταγμένη του } x \text{ είναι άρρητος}\}$, τότε το A_3 είναι συνεκτικός χώρος.

14) Έστω U ανοικτό υποσύνολο του R^n. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του U είναι ανοικτό στον R^n.

(β) Το U έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών.

15) Έστω U ανοικτό υποσύνολο του R^n.Αποδείξτε ότι το U είναι συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε ζεύγος σημείων του συνδέεται με μια πολυγωνική γραμμή $P \subseteq U$ ($\Leftrightarrow$ το U είναι κατά τόξα συνεκτικός χώρος). Εξετάστε αν ισχύει αυτό το αποτέλεσμα σε έναν διανυσματικό χώρο με νόρμα.

[<u>Υπόδειξη</u>. Έστω U ανοικτό και συνεκτικό στον R^n. Αν $a \in U$ αποδείξτε ότι το σύνολο V εκείνων των σημείων b του U για τα οποία υπάρχει πολυγωνική $P \subseteq U$ από το a στο b, είναι μη κενό ανοικτό και κλειστό ως προς U .]

16) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ κυρτό. Αποδείξτε ότι αν $a \in A^o$ (= το εσωτερικό του A) και $b \in \overline{A}$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[\alpha, b) \subseteq A^o$.

[<u>Υπόδειξη</u>. Εξετάστε πρώτα την περίπτωση $b \in A$.]

17) Έστω $\alpha, b \in R^n \; (n \geq 2)$ ώστε $\|\alpha\|_2 < 1$ και $\|b\|_2 > 1$. Αποδείξτε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[\alpha, b]$ τέμνει την S^{n-1} σε ένα μόνο σημείο. Γενικεύστε το αποτέλεσμα σε έναν διανυσματικό χώρο με νόρμα.

[<u>Υπόδειξη</u>. Η απεικόνιση $g(t)=\|(1-t)a+tb\|_2$, $t\in[0,1]$ είναι συνεχής.]

18) Έστω X τελείως κανονικός χώρος με τουλάχιστον δύο σημεία. Αποδείξτε ότι αν ο X είναι συνεκτικός τότε ο πληθάριθμος $|\mathrm{X}|\geq c$ (όπου c =ο πληθάριθμος του συνεχούς).

19) Στον τ.χ. X ορίζουμε, $x\sim y$ αν τα x και y περιέχονται στο ίδιο συνεκτικό σύνολο. Αποδείξτε ότι η $x\sim y$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στον X. Ποιες είναι οι συνεκτικές συνιστώσες;