Ασκ. 11

α) $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow E(X) = np$, άρα

$E(X) = \overline{X} \Leftrightarrow np = \overline{X} \Leftrightarrow p = \frac{\overline{X}}{n}$.

Άρα ε.ρ. του p είναι η $\bar{p} = \frac{\overline{X}}{n}$.

β) λύθηκε στην τάξη (Μαθ. 5)

γ) $X \sim Geo(p)$ στο $\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$, άρα

$E(X) = \overline{X} \Leftrightarrow \frac{1}{p} = \overline{X} \Leftrightarrow p = \frac{1}{\overline{X}}$, άρα

ε.ρ. του p είναι η $\bar{p} = \frac{1}{\overline{X}}$

δ) $X \sim Unif[0,\theta] \Rightarrow E(X) = \frac{\theta}{2}$.

$E(X) = \overline{X} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \overline{X} \Leftrightarrow \theta = 2\overline{X}$, άρα

ε.ρ. του θ είναι η $\bar{\theta} = 2\overline{X}$.

ε) $s = 2$ (2 άγνωστες παράμετροι).

$X \sim Unif[a,b] \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$, $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Άρα $\left.\begin{array}{l} E(X) = \overline{X} \\ Var(X) = M_2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a+b}{2} = \overline{X} \\ \frac{(b-a)^2}{12} = M_2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a+b = 2\overline{X} \\ b-a = \sqrt{12 M_2} \end{array}\right| \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{ll} (-) & 2a = 2\overline{X} - \sqrt{12M_2} \\ (+) & 2b = 2\overline{X} + \sqrt{12M_2} \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = \overline{X} - \sqrt{3}\, M_2 \\ b = \overline{X} + \sqrt{3}\, M_2 \end{array}$.

Συμπεραίνουμε ότι $\bar{a} = \overline{X} - \sqrt{3}\, M_2$ και $\bar{b} = \overline{X} + \sqrt{3}\, M_2$

είναι ε.ρ. των a και b.

Ερ: Πώς θα μπορούσατε να φτιάξετε καλύτερες εκτιμήτριες λαμβάνοντας υπ' όψη ότι το $\underline{\underline{a}}$ και $\underline{\underline{b}}$ εκφράζουν την ελάχιστη και τη μέγιστη αντίστοιχα θεωρητική τιμή της άγνωστης $X \sim Unif[a,b]$?

Ασκ 12

Έστω $\mu_k' = E(X^k)$, οι ροπές κ-τάξης και

$\mu_k = E(X-\mu)^k$, οι κεντρικές ροπές κ-τάξης.

- Έστω ότι υπάρχουν οι μ_k' για $k=1,2,\dots,n$.

Τότε $\boxed{\mu_k} = E(X-\mu)^k = E\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}X^i\mu^{k-i}\right)$

$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}E(X^i)\mu^{k-i} = \boxed{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\mu_i'(\mu_1')^{k-i}}$ (1)

- Έστω τώρα ότι υπάρχουν οι μ_k, για $k=1,2,\dots,n$
($\mu_1 = 0$, όταν υπάρχει η μέση τιμή $\mu = \mu_1'$).

Τότε $\boxed{\mu_k'} = E(X^k) = E(X-\mu+\mu)^k = E\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(X-\mu)^i\mu^{k-i}\right)$

$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}E(X-\mu)^i\mu^{k-i} = \boxed{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu_i\mu^{k-i}}$ (2).

- Η μέθοδος των ροπών λαμβάνει υπ' όψη της, ότι αυτές οι θεωρητικές ροπές είναι συναρτήσεις του θ.

- Η (1) και (2) μας δείχνουν ότι

$\boxed{(\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_n') = f_n(\mu, \mu_2, \dots, \mu_n)}$ (3), όπου

η f_n έχει συνιστώσες τις $f_{n,k}$ όπως υποδεικνύονται απο τη (2) στην έκφραση της μ_k', για $k=1,2,\dots,n$, και η f_n είναι αντιστρέψιμη, λόγω της (1). Έχουμε για τη μεθοδο ροπών

$E_\theta(X^k) = \overline{X^k}$, $k=1,\dots,n$ $\overset{\text{λογω εξαρτ. \% } \theta}{\Longleftrightarrow}$ $\mu_k'(\theta) = \mu_k'(X_\delta)$, $k=1,\dots,n$

αφού $\overline{X^k} = E(X_\delta^k)$, όπου $X_\delta = \begin{cases} X_1, & \text{με πιθ. } \frac{1}{n} \\ \vdots \\ X_n, & \text{με πιθ. } \frac{1}{n} \end{cases}$.

$$\stackrel{(3)}{\Longleftrightarrow} \quad f_n\left(\mu(\theta), \mu_2(\theta), \ldots, \mu_n(\theta)\right) \stackrel{(*)}{=} f_n\left(E(X_\delta), E(X_\delta - E(X_\delta))^2, \ldots, E(X_\delta - E(X_\delta))^n\right)$$

f_n αντιστρέψ. $\Longleftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \mu(\theta) = E(X_\delta) \\ \mu_2(\theta) = E(X_\delta - E(X_\delta))^2 \\ \vdots \\ \mu_n(\theta) = E(X_\delta - E(X_\delta))^n \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{array}{l} E_\theta(X) = \bar{X} \\ Var_\theta(X) = M_2 \\ \vdots \\ E_\theta(X - E(X))^n = \underline{\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{\nu}(X_k - \bar{X})^n} \end{array},$$

και έτσι παίρνουμε τη ζητούμενη ισοδυναμία, όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε ότι $\mu_k'(X) = E(X_\delta^k) = f_{n,k}\left(\mu(X_\delta), \mu_2(X_\delta), \ldots \mu_n(X_\delta)\right)$

και $f_n\left(\mu(X_\delta), \mu_2(X_\delta), \ldots, \mu_n(X_\delta)\right) = \left(f_{n,1}(\mu(X_\delta)), f_{n,2}(\mu(X_\delta), \mu_2(X_\delta)), \ldots f_{n,n}(\cdot)\right)$

$\mu(X_\delta) = E(X_\delta)$, $\mu_2(X_\delta) = E(X_\delta - E(X_\delta))^2, \ldots$, $\mu_n(X_\delta) = E(X_\delta - E(X_\delta))^n$

Παρατήρηση

Η ισοδυναμία προκύπτει ξεκινώντας από ροπές $1^{ης}$ τάξης. Προσέξτε αυτό το παράδειγμα. Έστω τ.δ. από $N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, όπου η μέση τιμή $\mu = 0$, είναι γνωστή. Εφαρμόστε τη μέθοδο των ροπών, για $k = 2$, με μ_2 και μ_2' μόνο.
Τί παρατηρείτε?

Ασκ. 13

Έστω $X \sim Beta(a,b)$. Τότε $E(X) = \frac{a}{a+b}$ και $Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

Για $s=2$, έχουμε

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ Var(X) = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{a+b} = \bar{X} \\ \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (a+b)\bar{X} \\ 1 - \frac{b}{a+b} = \bar{X} \\ \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = (a+b)\bar{X} \\ b = (a+b)(1-\bar{X}) \\ \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{a+b+1} = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (a+b)\bar{X} \\ b = (a+b)(1-\bar{X}) \\ \bar{X}(1-\bar{X})\frac{1}{a+b+1} = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = (a+b)\bar{X} \\ b = (a+b)(1-\bar{X}) \\ a+b+1 = \frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{M_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (a+b)\bar{X} \\ b = (a+b)(1-\bar{X}) \\ a+b = \frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{M_2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = \left(\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{M_2} - 1\right)\bar{X} \\ b = \left(\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{M_2} - 1\right)(1-\bar{X}) \end{cases}$$

. Άρα

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{a} &= \left(\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{M_2} - 1\right)\bar{X} \\ \bar{b} &= \left(\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{M_2} - 1\right)(1-\bar{X}) \end{aligned}}$$

Παρατηρείστε ότι δεν θα είναι εκτιμήτριες, αν $\bar{a} \le 0$ ή $\bar{b} \le 0$

Άρα πρέπει να προσέξουμε $\bar{a} > 0$, και $\bar{b} > 0$, αφού $a, b > 0$.

Πρέπει λοιπόν να ισχύει ο περιορισμός (αφού $0 < \bar{X} < 1$ πάντα)

$$\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{M_2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\bar{X}(1-\bar{X}) > M_2}$$

Πρέπει λοιπόν να ληφθεί υπόψη στην τελική απάντηση.

Ασκ. 14

(i) $$ΜΤΣ(cX) = Var(cX) + b^2(cX) \quad (1).$$

Όμως $b(cX) = E(cX) - \theta = c\cdot\frac{\theta}{2} - \theta = \left(\frac{c}{2}-1\right)\theta$ (2).

$$Var(cX) = c^2 Var(X) = \frac{c^2\theta^2}{12} \quad (3).$$

Απο (2)+(3) η (1) γίνεται

$$ΜΤΣ(cX) = \frac{c^2}{12}\theta^2 + \left(\frac{c}{2}-1\right)^2\theta^2 = \left(\frac{c^2}{12}+\frac{c^2}{4}-c+1\right)\theta^2$$
$$= \left(\frac{c^2}{3}-c+1\right)\theta^2.$$

Αναζητάμε $c_* > 0$: $f(c) = \frac{c^2}{3} - c + 1$ να ελαχιστοποιείται.

Φανερά $c_* = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Άρα

το ελάχιστο ΜΤΣ επιτυγχάνει η εκτιμήτρια $\frac{3}{2}X$,

και είναι $ΜΤΣ\left(\frac{3}{2}X\right) = \frac{\theta^2}{4}$

Είχαμε δεί ότι $ΜΤΣ(X) = ΜΤΣ(2X) = \frac{\theta^2}{3}$

(ii) $ΜΑΣ_\theta(cX) = E|cX-\theta|$. Παίρνουμε $c \geq 1$, $[cX-\theta \geq 0 \Leftrightarrow X \geq \frac{\theta}{c}]$

$$E|cX-\theta| = \int_0^\theta |cx-\theta|\cdot\frac{1}{\theta}dx = \frac{1}{\theta}\left[\int_0^{\frac{\theta}{c}}(\theta-cx)dx + \int_{\frac{\theta}{c}}^{\theta}(cx-\theta)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\theta\cdot\frac{\theta}{c} - c\cdot\frac{\theta^2}{2c^2} + \frac{c}{2}\left(\theta^2-\frac{\theta^2}{c^2}\right) - \theta\cdot\left(\theta-\frac{\theta}{c}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{c}{2}-1+\frac{1}{c}\right)\theta = f(c)\theta, \text{ όπου } f(c) = \frac{c}{2}-1+\frac{1}{c},\ c\geq 1$$

Έχουμε $f'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{c^2} = 0 \Leftrightarrow c^2 = 2 \overset{c\geq 1}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{2}$.

$f''(c) = +\frac{2}{c^3} > 0 \overset{c^{**}=\sqrt{2}}{\Rightarrow} \boxed{ΜΑΣ(\sqrt{2}X) = (\sqrt{2}-1)\theta}$ είναι το ελάχιστο.

• Αν $0<c\leq 1$, τότε επειδή $0\leq X\leq \theta \Rightarrow 0\leq cX\leq \theta$

Άρα $E|cX-\theta| = E(\theta - cX) = \theta - cE(X) = \theta - c\frac{\theta}{2} = (1-\frac{c}{2})\theta$.

Συμπεραίνουμε ότι για $c=1$, επιτυγχάναμε το ελάχιστο που είναι $\text{ΜΑΣ}(X) = \frac{\theta}{2}$. Επειδή $\sqrt{2}-1 < \frac{1}{2}$, συμπεραίνουμε ότι η $\sqrt{2}X$ επιτυγχάνει το <u>ελάχιστο ΜΑΣφ</u>.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Συμπεραίναμε ότι το ΜΤΣφ και το ΜΑΣφ μας οδηγούν σε διαφορετικές βέλτιστες εκτιμήτριες, την $\frac{3}{2}X$ και $\sqrt{2}X$ αντίστοιχα. Αυτός είναι ο κανόνας, και όχι η εξαίρεση. Λόγω της διαφορετικής φύσης των σφαλμάτων (τετραγωνικό & απόλυτο) παίρνουμε στην πλειοψηφία των περιπτώσεων διαφορετικές βέλτιστες εκτιμήτριες ως προς τα δύο αυτά κριτήρια.

2) Επιπλέον $\underset{\tilde{\theta}}{\underset{\shortparallel}{\text{ΜΑΣφ}(2X)}} = \frac{\theta}{2} = \underset{\hat{\theta}}{\underset{\shortparallel}{\text{ΜΑΣ}(X)}}$

Άρα η $\tilde{\theta}$ και η $\hat{\theta}$ έχουν κοινό ΜΑΣφ και ΜΤΣφ.

<u>Η $\tilde{\theta}$ βέβαια είναι αμερόληπτη.</u>

Θα επανέρθουμε στο Παράδειγμα αυτό όταν θα μιλήσουμε για α.ε.ε.δ (αμερόληπτες εκτιμήτριες ελάχιστης διασποράς)

Είναι φανερό ήδη βέβαια ότι η $\tilde{\theta} = 2X$ είναι α.ε.ε.δ. στην κλάση των γραμμικών α.ε (της μορφής cX).

αφού η μόνη α.ε. είναι για $c=2$, άρα τετριμμένα είναι και ελάχιστης διασποράς.

Ασκ. 15

Αναζητούμε α.ε. του p^2 σε τ.δ. απο $Be(p)$ με $\nu=2$.
$\mathcal{U}=\mathcal{U}(X_1,X_2)$, οπότε αρκεί να προσδιοριστούν τα
$\mathcal{U}_{ij}=\mathcal{U}(i,j)$, για $i,j\in\{0,1\}$ (4 άγνωστοι). Έχουμε

$$E(\mathcal{U}(X))=p^2,\ \forall p\in(0,1) \iff \sum_{i,j\in\{0,1\}}\mathcal{U}_{ij}P(X_1=i,X_2=j)=p^2$$

$$\overset{X_1,X_2 \text{ ανεξ. } Be(p)}{\iff} \mathcal{U}_{11}p^2+(\mathcal{U}_{10}+\mathcal{U}_{01})p(1-p)+\mathcal{U}_{00}(1-p)^2=p^2$$

$$\iff \left[1-\mathcal{U}_{11}+(\mathcal{U}_{10}+\mathcal{U}_{01})-\mathcal{U}_{00}\right]p^2+\left[2\mathcal{U}_{00}-(\mathcal{U}_{10}+\mathcal{U}_{01})\right]p-\mathcal{U}_{00}=0$$

$$\overset{\text{ισχύει } \forall p\in(0,1)}{\iff} \begin{cases}\mathcal{U}_{00}=0\\ \mathcal{U}_{10}+\mathcal{U}_{01}=0\\ \mathcal{U}_{11}=1\end{cases} \iff \begin{cases}\mathcal{U}(0,0)=0\\ \mathcal{U}(1,0)=-\mathcal{U}(0,1)\\ \mathcal{U}(1,1)=1\end{cases} \quad (*)$$

(παρατηρείστε ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις!).

<u>Παρατήρηση</u>

Αν $\mathcal{U}(X_1,X_2)=\dfrac{(X_1+X_2)(X_1+X_2-1)}{2}$, για $X_1,X_2 \overset{\text{τ.δ.}}{\sim} Be(p)$

Τότε η παραπάνω $\mathcal{U}$ ικανοποιεί τις σχέσεις (*) με $\mathcal{U}(1,0)=\mathcal{U}(0,1)=0$

Επιπλέον από την (*) η ζητούμενη συνάρτηση $\mathcal{U}(x)$ είναι

$$\mathcal{U}(x)=\mathcal{U}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, & (x_1,x_2)=(0,0)\\ c, & (x_1,x_2)=(0,1)\\ -c, & (x_1,x_2)=(1,0)\\ 1, & (x_1,x_2)=(1,1),\end{cases} \quad (c\in\mathbb{R})$$

όπου πράγματι

$$E[\mathcal{U}(X_1,X_2)]=1\cdot P(X_1=1,X_2=1)+c\,\underbrace{\left[P(X_1=0,X_2=1)-P(X_1=1,X_2=0)\right]}_{=0}$$

$$=p^2,\ \forall p\in(0,1)$$