Ασκ. 8 (i) Έστω $X \sim P(\lambda)$. Τότε $\gamma_1(X) = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ (1).

$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = E(X-\lambda)^3 = E(X^3) - 3\lambda E(X^2) + 3\lambda^2 \underbrace{E(X)}_{=\lambda} - \lambda^3$$

$$= E(X^3) - 3\lambda\big(\underbrace{Var(X)}_{=\lambda} + \underbrace{E^2(X)}_{=\lambda^2}\big) + 3\lambda^3 - \lambda^3$$

$$= E(X^3) - 3\lambda^2 - \cancel{3\lambda^3} + \cancel{3\lambda^3} - \lambda^3 = E(X^3) - \lambda^3 - 3\lambda^2. \quad (2).$$

• Για τον υπολογισμό της $E(X^3)$, χρησιμοποιούμε ότι

$$x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x^2 - 2x \quad (3).$$

$$E[X(X-1)(X-2)] = \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)(x-2)\, P(X=x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)(x-2)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=3}^{+\infty} \frac{\cancel{x(x-1)(x-2)}}{\cancel{x(x-1)(x-2)}} \cdot \frac{\lambda^x}{(x-3)!} = e^{-\lambda}\lambda^3 \sum_{x=3}^{+\infty} \frac{\lambda^{x-3}}{(x-3)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^3 \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!}}_{=e^{\lambda}} = \lambda^3 \quad (4).$$

Απο (3) + (4) ⇒

$$E(X^3) = E[X(X-1)(X-2)] + 3E(X^2) - 2E(X)$$

$$= \lambda^3 + 3(\lambda + \lambda^2) - 2\lambda = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας στη (2),

$$\boxed{\mu_3 = \lambda}$$

(Παρατηρείστε ότι $E(X) = \lambda$, $\mu_2 = Var(X) = \lambda$, $\mu_3 = \lambda$)

Άρα απο την (1), και επειδή $\sigma = \sqrt{Var X} = \sqrt{\lambda}$

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\lambda}{(\sqrt{\lambda})^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$$

(ii) Έστω $X \sim \mathcal{E}xp(\theta)$. Θα υπολογίσουμε $\gamma_1(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ (1)

Ομοίως έχουμε $E(X-\mu)^3 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^2 E(X) - E^3(X)$.

Άρα
$$\mu_3 = E(X^3) - 3\cdot\frac{1}{\theta}\left(Var(X) + E^2(X)\right) + 3\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^3}$$
$$= E(X^3) - \frac{3}{\theta}\left(\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}\right) + \frac{3}{\theta^3} - \frac{1}{\theta^3}$$
$$= E(X^3) - \frac{4}{\theta^3} \quad (2)$$

$$E(X^3) = \int_0^{+\infty} x^3 f(x;\theta)\,dx = \int_0^{+\infty} x^3 \theta e^{-\theta x}\,dx =$$
$$-\int_0^{+\infty} x^3 (e^{-\theta x})'\,dx = -\underbrace{\left[x^3 e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty}}_{0} + 3\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x}\,dx$$
$$= \frac{3}{\theta}\underbrace{\int_0^{+\infty} x^2 \theta e^{-\theta x}\,dx}_{E(X^2),\ X\sim \mathcal{E}xp(\theta)} = \frac{3}{\theta}\left(\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{6}{\theta^3} \quad (3).$$

Λόγω (3) η (2) γίνεται

$$\boxed{\mu_3 = \frac{2}{\theta^3}}$$

. Τελικά, αφού $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{1}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta}$

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{2}{\cancel{\theta^3}}}{\frac{1}{\cancel{\theta^3}}} = 2}$$

(Παρατηρείστε ότι ο συντελεστής λοξότητας γ_1 της $\mathcal{E}xp(\theta)$, είναι ανεξάρτητος της παραμέτρου θ)

Άσκ. 9.

Θα δείξουμε ότι $\kappa(X)=3$, όταν $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

$$K = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 = EZ^4, \text{ όπου } Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

Άρα $\kappa = E\left[\left(Z^2\right)^2\right] = E\left(Y^2\right)$, όπου $Y=Z^2$ (Το τετράγωνο μιας τυπικής κανονικής).

Θα υπολογίσουμε την κατανομή της Z^2 που θα φανεί, ιδιαίτερα χρήσιμη και στα επόμενα. Προφανώς $Y=Z^2\geq 0$, και για $y>0$, έχουμε

$$F_Y(y)=P\left(Y\leq y\right)=P\left(Z^2\leq y\right)=P\left(-\sqrt{y}\leq |Z|\leq \sqrt{y}\right)\overset{Z \text{ συνεχής τ.μ.}}{=}$$

$$P\left(-\sqrt{y}< Z\leq\sqrt{y}\right)=F_Z(\sqrt{y})-F_Z(-\sqrt{y})=\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})$$

$$=\Phi(\sqrt{y})-\left(1-\Phi(\sqrt{y})\right)=2\Phi(\sqrt{y})-1, \text{ όπου}$$

Φ η σ.κ. της τυπικής κανονικής που ικανοποιεί $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ (λόγω συμμετρίας). Τώρα υπολογίζουμε τη σ.π.π. της $Y=Z^2$

Άρα $$f_Y(y)=F_Y'(y)=\left(2\Phi(\sqrt{y})-1\right)'=\frac{2}{2\sqrt{y}}\phi(\sqrt{y})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}=\boxed{\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}},\ \forall y>0},$$

όπου ϕ η σ.π.π. της $N(0,1)$, όπου $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $$f_Y(y)\underset{(\text{ανάλογη})}{\propto} y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}y}=y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y}=y^{\alpha-1}e^{-\theta y}$$

με $\alpha=\frac{1}{2}$, και $\theta=\frac{1}{2}$ $\Longrightarrow Y=Z^2\sim G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ($\equiv \mathcal{X}_1^2 \to$ θα το δούμε αργότερα)

[Παρατήρηση: Η σταθερά κανονικοποίησης προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι πρέπει να είναι σ.π.π. Εδώ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\Rightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$)

Εφ' όσον $Y \sim G\left(\underset{\alpha}{\frac{1}{2}}, \underset{\theta}{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow E(Y) = \frac{\alpha}{\theta} = 1$, και

$$Var(Y) = \frac{\alpha}{\theta^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 .$$ Άρα

$$\boxed{K = E(Y^2) = Var(Y) + E^2(Y) = 2 + 1 = 3.}$$

Άσκ. 10

(α) Μπορούμε να κάνουμε πράξεις ...

Αλλά υπάρχει ένα πιο γρήγορος τρόπος.

Θεωρούμε 2 ανεξάρτητες τ.μ. $X, Y \sim \text{discr. Unif}(\{x_1, \ldots, x_\nu\})$

Τότε προφανώς $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0$ (αφού είναι ισόνομες)

$$\Rightarrow E\left[(X-Y)^2\right] \overset{E(X-Y)=0}{=} Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\underbrace{Cov(X,Y)}_{0}$$

$$\underset{X,Y \text{ ανεξ.}}{=} Var(X) + Var(Y) = 2\,Var(X)$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{\nu} (x_i - x_j)^2 \underbrace{P(X=x_i, Y=x_j)}_{1/\nu^2} = 2\,\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2}{\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{\nu}(x_i - x_j)^2}{2\nu} = \sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2}{\nu - 1} = \frac{\sum_{i,j=1}^{\nu}(x_i - x_j)^2}{2\nu(\nu-1)}$$

$$\overset{\text{τ.μ.}}{\Longrightarrow} S^2 = \frac{1}{2\nu(\nu-1)} \sum_{i,j=1}^{\nu}(X_i - X_j)^2$$

(β)

$$S^2 = \frac{1}{2\nu(\nu-1)} \sum_{i,j}' (X_i - X_j)^2 = \frac{1}{2\nu(\nu-1)} \left[\sum_{i,j}' (X_i - \mu + \mu - X_j)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2\nu(\nu-1)} \left[\sum_{i,j}' (X_i-\mu)^2 + \sum_{i,j}' (X_j-\mu)^2 - 2\sum_{i,j}' (X_i-\mu)(X_j-\mu) \right]$$

$$= \frac{1}{2\nu(\nu-1)} \left[\underbrace{\nu \sum_i' (X_i-\mu)^2 + \nu \sum_j' (X_j-\mu)^2 - 2\sum_i' (X_i-\mu)^2}_{=} - 2\sum_{i\neq j}' (X_i-\mu)(X_j-\mu) \right]$$

$$= \frac{1}{2\nu(\nu-1)} \left[2(\nu-1)\sum_i' (X_i-\mu)^2 - 2\sum_{i\neq j}' (X_i-\mu)(X_j-\mu) \right] =$$

$$\frac{\sum_i' (X_i-\mu)^2}{\nu} - \frac{\sum_{i\neq j}' (X_i-\mu)(X_j-\mu)}{\nu(\nu-1)} \Longrightarrow$$

$$Var(S^2) = \frac{1}{\nu^2}\nu \cdot Var(X-\mu)^2 + \frac{1}{\nu^2(\nu-1)^2} Var\left[\sum_{i\neq j}' (X_i-\mu)(X_j-\mu) \right]$$

$$-2\, Cov\left[\frac{\sum_i (X_i-\mu)^2}{\nu}, \frac{\sum_{i\neq j}' (X_i-\mu)(X_j-\mu)}{\nu(\nu-1)} \right] \quad (1).$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο τελευταίος όρος είναι μηδενικός, αφού λόγω διγραμμικότητας και ότι

$$Cov\left[(X_i-\mu)^2, (X_i-\mu)(X_j-\mu)\right] = E\left[(X_i-\mu)^3(X_j-\mu)\right] - E\left[(X_i-\mu)^2\right]\underbrace{E\left[(X_i-\mu)(X_j-\mu)\right]}_{=0}$$

$$= E(X_i-\mu)^3 \underbrace{E(X_j-\mu)}_{=0} = 0 \text{, όλοι οι όροι είναι } 0.$$

Επίσης $Var\left[\sum_{i\neq j}' (X_i-\mu)(X_j-\mu)\right] = 4\sum_{1\leq i<j\leq n}' Var\left[(X_i-\mu)(X_j-\mu)\right]$, αφού

$$Cov\left[(X_i-\mu)(X_j-\mu), (X_i-\mu)(X_k-\mu)\right] = 0 \quad \text{(όπως παραπάνω)}. \text{ (για } j\neq k).$$

και $\sum_{i\neq j}' (X_i-\mu)(X_j-\mu) = 2\sum_{1\leq i<j\leq n}' (X_i-\mu)(X_j-\mu)$

Τελικά, λόγω (1) και των παραπάνω

$$Var(S^2) = \frac{Var(X-\mu)^2}{\nu} + \frac{2\nu(\nu-1)}{\nu^2(\nu-1)^2} Var[(X-\mu)(Y-\mu)],$$

όπου X, Y ανεξάρτητα αντίγραφα των X_i, $1 \le i \le \nu$.

$$\Rightarrow Var(S^2) = \frac{Var(X-\mu)^2}{\nu} + \frac{2}{\nu(\nu-1)} Var[(X-\mu)(Y-\mu)]. \quad (2).$$

Όμως $Var(X-\mu)^2 = E(X-\mu)^4 - E^2(X-\mu)^2 = \mu_4 - \sigma^4 \quad (3)$

και
$$Var[(X-\mu)(Y-\mu)] = E[(X-\mu)^2(Y-\mu)^2] - E^2\underbrace{[(X-\mu)(Y-\mu)]}_{=0}$$
$$= E(X-\mu)^2 E(Y-\mu)^2 = Var(X)\,Var(Y) = \sigma^4 \quad (4).$$

Από (3) + (4), η (2) γίνεται

$$Var(S^2) = \frac{\mu_4-\sigma^4}{\nu} + \frac{2\sigma^4}{\nu(\nu-1)} = \frac{1}{\nu}\left(\mu_4 - \frac{\nu-3}{\nu-1}\sigma^4\right)$$

γ) Αντικαθιστώντας $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \Rightarrow \mu_4 = (\gamma_2+3)\sigma^4$, έχουμε

$$Var(S^2) = \frac{\sigma^4}{\nu}\left(\gamma_2 + 3 - \frac{\nu-3}{\nu-1}\right) = \sigma^4\left(\frac{\gamma_2}{\nu} + \frac{3(\nu-1)-\nu+3}{\nu(\nu-1)}\right)$$
$$= \sigma^4\left(\frac{\gamma_2}{\nu} + \frac{2}{\nu-1}\right)$$

δ) Αν $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $P(\lambda)$, τότε

$$Var(\hat{\lambda}) = Var(\overline{X}) = \frac{Var(X)}{\nu} = \frac{\lambda}{\nu}$$

$$Var(S^2) \overset{(\gamma)}{=} \sigma^4\left(\frac{\gamma_2}{\nu} + \frac{2}{\nu-1}\right). \qquad (\sigma^2 = \lambda)$$

Μπορείτε να δείξετε ότι $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$ (υπόδειξη: υπολογίστε $E[X(X-1)(X-2)(X-3)]$ ...)

Τότε
$$Var(S^2) = \lambda^2\left(\frac{1}{\lambda\nu} + \frac{2}{\nu-1}\right) = \frac{\lambda}{\nu} + 2\frac{\lambda^2}{\nu-1}, \quad \lambda > 0.$$

Είναι φανερό ότι $Var(S^2) > \frac{\lambda}{\nu} = Var(\hat{\lambda})$, και άρα η $\hat{\lambda}$ είναι "καλύτερη" εκτιμήτρια.