Ασκ. (Αιτιολόγηση Κρίσιμης Περιοχής στο Μάθημα 27).

Σε τ.δ. από $Be(p)$, θέτουμε $H_0 : p = p_0$ vs $H_1 : p \neq p_0$, $p \in (0,1)$. Πώς προκύπτει προσεγγιστικά $C_\alpha = \left\{ x : |Z(x)| \geq z_{\alpha/2} \right\}$

ή $C_\alpha = \left\{ x : |\bar{x} - p_0| \geq z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{\nu}} \right\}$, όπου $Z(x) = \frac{|\bar{x}-p_0|}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{\nu}}}$.

Λύση

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας σε τ.δ. $Be(p)$, γράφεται

$$L(p) = p^{\sum_i x_i} (1-p)^{\nu - \sum_i x_i}$$

Έχουμε $\hat{p} = \bar{X}$ (κατά τα γνωστά), άρα από Γ.Λ.Π. (γενικευμένος λόγος πιθανοφάνειας)

$$\frac{L(p_0)}{L(\hat{p})} \leq k \iff \frac{p_0^{\sum_i x_i} (1-p_0)^{\nu - \sum x_i}}{(\hat{p})^{\sum x_i} (1-\hat{p})^{\nu - \sum x_i}} \leq k \iff \frac{p_0^{\nu \hat{p}} (1-p_0)^{\nu(1-\hat{p})}}{\hat{p}^{\nu\hat{p}} (1-\hat{p})^{\nu(1-\hat{p})}} \leq k$$

$$\iff \nu\hat{p}\left(\log p_0 - \log \hat{p}\right) + \nu(1-\hat{p})\left(\log(1-p_0) - \log(1-\hat{p})\right) \leq \log k$$

$$\iff (*) \; \boxed{\nu\hat{p}\left(\log \hat{p} - \log p_0\right) + \nu(1-\hat{p})\left(\log(1-\hat{p}) - \log(1-p_0)\right) \geq \underbrace{-\log k}_{\geq 0}}$$

Επειδή μας ενδιαφέρουν ασυμπτωτικές προσεγγίσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του λογαρίθμου, ασυμπτωτικά $(x \to x_0)$

$$\log x \cong \log x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0) \quad \left(f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right),$$

για $x_0 = p_0$ και $x_0 = 1 - p_0$ [αυτά δείχνονται αυστηρά ότι ισχύουν και ως στοχαστικές προσεγγίσεις]

Άρα
$$\left.\begin{aligned} \log \hat{p} &\overset{P}{\cong} \log p_0 + \frac{1}{p_0}(\hat{p} - p_0) \\ \log(1-\hat{p}) &\overset{P}{\cong} \log(1-p_0) - \frac{1}{1-p_0}(\hat{p} - p_0) \end{aligned}\right\} \text{για μεγάλο } \nu.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (*), τελικά

$$\frac{(\hat{p} - p_0)^2}{p_0(1-p_0)/\nu} \geq \underbrace{-\log k}_{>0} \iff \boxed{\frac{|\hat{p} - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{\nu}}} \geq c}$$

Λόγω ότι $\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/\nu}} \xrightarrow{d} N(0,1)$, το αποτέλεσμα έπεται άμεσα.