Εργασία 3

Επιλέγοντας την κλασική μορφή της $\mathcal{E}xp(\theta)$ $\xrightarrow{}\theta>0$ παράμ. ρυθμού οδηγούμαστε σε ε.ρ. $\frac{1}{\overline{X}_\nu}$. Επειδή ο $\overline{X}_\nu$ ακολουθεί κατανομή Γάμμα με κατάλληλες παραμέτρους, είναι εφικτό να υπολογίσαμε με ακρίβεια $E\left(\frac{1}{\overline{X}_\nu}\right)$ και $Var\left(\frac{1}{\overline{X}_\nu}\right)$ και έτσι να έχουμε ακριβείς εκφράσεις για το $b(\overline{\theta}_\nu)$ και $MSE(\overline{\theta}_\nu)$.

Το ανάλογο της εκθετικής κατανομής στις διακριτές κατανομές είναι η γεωμετρική κατανομή $Geo(p)$, $0<p<1$.

Αν κάνουμε αναπαραμέτρηση με $\mu=\frac{1}{p}$, δηλ. τη μέση τιμή, και ορίσουμε $Geo(\mu)$, με $P(X=x)=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{x-1}$, $x=1,2,\ldots$ τότε η $\overline{\mu}_\nu=\overline{X}_\nu$ είναι α.ε. του μ, συνεπής και ασυμπτωτικά κανονική.

Ας μείνουμε όμως στην αρχική "κλασική" παραμέτρηση.

Η ε.ρ. του p, $\overline{p}_\nu=\frac{1}{\overline{X}_\nu}$ (βασισμένοι σε τ.δ. $X_1,\ldots,X_\nu \sim Geo(p)$).

(i) Υπολογίστε το $b(\overline{p}_\nu)$, υπολογίζοντας ακριβώς τη $E\left(\frac{1}{\overline{X}_\nu}\right)$.

(ii) Υπολογίστε επίσης το $MSE(\overline{p}_\nu)$.

(iii) Αναζητείστε αμερόλ. εκτιμήτρια του p, που να είναι της μορφής $h(T_\nu)$, όπου $T_\nu=\sum_{i=1}^{\nu}X_i$

(iv) Συγκρίνετε τα $MSE(\overline{p}_\nu)$ και $MSE(h(T_\nu))=Var[h(T_\nu)]$

(v) Δείξτε ότι η $\overline{p}_\nu$ είναι συνεπής και ασυμπτωτικά κανονική.

(vi) Έστω $X_1,\ldots,X_\nu$ τ.δ. από $NegBin(n,p)$, με n-γνωστό. Εφ' όσον για $n=1$, έχουμε $Geo(p)$, μπορείτε να γενικεύσετε τα αποτελέσματά σας, απαντώντας στα (i) $\overset{\text{έως}}{-}$ (v) για τη $NegBin(n,p)$?