# Λύση Εργασίας

(1) Τα 1−α ασυμπτωτικά Δ.Ε. δίνονται από

$$\tilde{I}^{p}_{1-\alpha}(x) = \hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\nu}},$$

ενώ τα "ακριβή" 1−α Δ.Ε. δίνονται από

$$I^{p}_{1-\alpha}(x) = \left[ \frac{1}{1+\frac{\nu-x+1}{x}F_{2(\nu-x+1),2x,\frac{\alpha}{2}}} , \frac{\frac{x+1}{\nu-x}F_{2(x+1),2(\nu-x),\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{x+1}{\nu-x}F_{2(x+1),2(\nu-x),\frac{\alpha}{2}}} \right]$$

- Για τα δεδομένα του πειράματος I−(i) έχουμε

$N=30$, $x=18$, $\hat{p} = 0.6$

| | 95 % | 99 % |
|---|---|---|
| | (LB, UB) | (LB, UB) |
| ασυμπτωτικά | (0.4247, 0.7753) | (0.3696, 0.8304) |
| ακριβή | (0.4060, 0.7734) | (0.3530, 0.8150) |

- Για τα δεδομένα του πειράματος I−(ii) έχουμε

$\nu=30$, $x=14$, $\hat{p} = 0.4667$

| | 95 % | 99 % |
|---|---|---|
| | (LB, UB) | (LB, UB) |
| ασυμπτωτικά | (0.2881, 0.6452) | (0.2320, 0.7013) |
| ακριβή | (0.2834, 0.6567) | (0.2373, 0.7067) |

Σχόλια

1) Είναι φανερό ότι 95%-Δ.Ε. $\subset$ 99% Δ.Ε.
Αύξηση του συντελεστή εμπιστοσύνης $\Longrightarrow$ επιμήκυνση των Δ.Ε.
Αυτό συμβαίνει προφανώς και στα 2 είδη Δ.Ε., όταν συγκρίνονται πάνω στα ίδια σύνολα δεδομένων.

2) Τα αποτελέσματα που παίρνουμε με τα ασυμπτωτικά Δ.Ε. διαφέρουν από τα αντίστοιχα ακριβή, και για $a = 0.01$, αλλά και για $a = 0.05$, π.χ. βλέπουμε ότι στο I-(i), στα 95%-Δ.Ε., το αριστερό άκρο διαφέρει περίπου 0.02, στα δύο είδη Δ.Ε.
Το πώς θα αξιολογήσουμε αυτές τις διαφορές, εξαρτάται από το είδος της εφαρμογής, είναι πάντως μη αμελητέες.

3) Μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ότι τα μήκη των 95%-Δ.Ε. είναι μεγαλύτερα στα ακριβή από ότι στα ασυμπτωτικά.
Αν δεχθούμε ότι τα ακριβή είναι τα σωστά, τότε τα ασυμπτωτικά μας δίνουν μία ακρίβεια εκτίμησης του $p$, που είναι μεγαλύτερη από αυτήν που θα έπρεπε με δεδομένο σ.ε. 0.95.
Κάτι τέτοιο δε συμβαίνει στα 99% Δ.Ε., που τα μήκη είναι περίπου ίδια.

4) Τα ασυμπτωτικά Δ.Ε. είναι συμμετρικά, ενώ τα ακριβή όχι.

5) Η πραγματική τιμή του $p \cong \frac{1}{2} \in (1-a)\cdot 100\%$-Δ.Ε. σε όλες τις περιπτώσεις.

(2) Ενώνοντας τα δύο σύνολα δεδομένων, έχουμε
$\nu = 60$, $x = 32$, $\hat{p} = \underline{\underline{0.5333}}$

| | 95 % (LB, UB) | 99 % (LB, UB) |
|---|---|---|
| ασυμπτωτικά | (0.4071, 0.6596) | (0.3674, 0.6992) |
| ακριβή | (0.4000, 0.6633) | (0.3622, 0.6991) |

<u>Σχόλια</u>

1) αύξηση του μεγέθους δείγματος $\Longrightarrow$ αύξηση ακρίβειας εκτίμησης. Αυτό εκφράζεται απο την ελάττωση των μηκών των Δ.Ε., για $\nu = 60$ συγκριτικά με $\nu = 30$, και για τις δύο τιμές του $\alpha$.

2) Εδώ, πλέον τα ασυμπτωτικά Δ.Ε. είναι πιο κοντά στα ακριβή Δ.Ε και οι διαφορές είναι σχετικά μικρές. Ενώ λοιπόν, για $\nu = 30$ η προσέγγιση δεν είναι και τόσο ικανοποιητική, εδώ είναι σχετικά ικανοποιητική, και φαίνεται η ισχύς του Κ.Ο.Θ.

3) $\frac{1}{2} \in (1-\alpha)100\%$ Δ.Ε. σε όλες τις περιπτώσεις.

3) Στο π.τ. II μετράμε # δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία, και επομένως έχουμε δείγμα απο γεωμετρική κατανομή $Geo(p)$. 4.

Υπολογίζουμε την ε.μ.π. του $p$ σε δείγμα μεγέθους $\nu$.
Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ οι $\nu$-παρατηρήσεις. Βρίσκουμε την ε.μ.π.

<u>συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(p)$:</u>

$$L(p) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i; p) = \prod_{i=1}^{\nu} p(1-p)^{x_i-1} = p^{\nu}(1-p)^{\sum_{i=1}^{\nu} x_i - \nu}$$

(υποθέτουμε ότι $\sum_{i=1}^{\nu} x_i > \nu$, διαφορετικά $\hat{p}=1$). Έχουμε

$$\ell(p) = \log L(p) = \nu \log p + \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i - \nu\right)\log(1-p).$$

$$\ell'(p) = \frac{\nu}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i - \nu}{1-p}.$$ Άρα

$$\ell'(p) = 0 \iff \frac{\nu}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i - \nu}{1-p} \iff \nu(1-p) = p\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i - \nu\right)$$

$$\iff p\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \nu \iff p^* = \frac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}$$

Το $p^*$ είναι το μοναδικό στάσιμο σημείο στο $(0,1)$.
Έχουμε $\ell'(p) > 0 \iff p < p^*$, άρα
$\ell \nearrow$ στο $(0, p^*)$ και $\ell \searrow$ στο $(p^*, 1)$.

Τελικά $\hat{p} = \dfrac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} X_i} = \dfrac{1}{\overline{X}}$ είναι η ε.μ.π. του $p$.

Παρατηρούμε ότι $\hat{p} = g(\overline{X})$, όπου $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 1)$.

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Δέλτα, βρίσκοντας πρώτα ασυμπτωτική κατανομή για το $\overline{X}$. Έχουμε $E(\overline{X}) = E(X_1) = \dfrac{1}{p}$, και

$$Var(\overline{X}) = \frac{Var(X_1)}{\nu} = \frac{1-p}{\nu p^2}.$$ Άρα απο το Κ.Ο.Θ., έχουμε

$$\sqrt{\nu}\,\frac{\overline{X} - \frac{1}{p}}{\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}} \xrightarrow[\nu\to\infty]{d} N(0,1)$$ ή (απ'ευθείας θα μπορούσαμε)

$$\sqrt{\nu}\left(\overline{X} - \frac{1}{p}\right) \xrightarrow[\nu\to\infty]{d} N\left(0, \frac{1-p}{p^2}\right).$$

Απο τη μέθοδο Δέλτα (η $g$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη με $g'(x)\neq 0$)

$$\sqrt{\nu}\left(\frac{1}{\overline{X}}-p\right)=\sqrt{\nu}\left(g(\overline{X})-g\left(\frac{1}{p}\right)\right)\xrightarrow[\nu\to\infty]{d}N\left(0,\left[g'\left(\frac{1}{p}\right)\right]^2\frac{1-p}{p^2}\right)$$

Όμως $g(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{x^2}\xRightarrow{x=\frac{1}{p}}$

$g'\left(\frac{1}{p}\right)=p^2$. Άρα η ασυμπτωτική διασπορά γίνεται

$\left[g'\left(\frac{1}{p}\right)\right]^2\frac{1-p}{p^2}=p^4\cdot\frac{1-p}{p^2}=p^2(1-p)$. Τελικά,

$$\sqrt{\nu}\left(\frac{1}{\overline{X}}-p\right)\xrightarrow[\nu\to\infty]{d}N\left(0,p^2(1-p)\right).$$

Συμπεραίνουμε ότι,

$$\sqrt{\nu}\,\frac{\frac{1}{\overline{X}}-p}{\sqrt{p^2(1-p)}}\xrightarrow[\nu\to\infty]{d}N(0,1),$$

και απο το θεώρημα του Slutsky,

$$\frac{\frac{1}{\overline{X}}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{\nu}}}=\underbrace{\frac{\sqrt{\frac{p^2(1-p)}{\nu}}}{\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{\nu}}}}_{\downarrow p \atop 1}\cdot\underbrace{\frac{\frac{1}{\overline{X}}-p}{\sqrt{\frac{p^2(1-p)}{\nu}}}}_{\downarrow d \atop N(0,1)}\xrightarrow[\nu\to\infty]{d}N(0,1)\quad(*)$$

, αφού $\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}\xrightarrow[\nu\to\infty]{P}p$ $\left(\overline{X}\xrightarrow{P}\frac{1}{p}\text{ απο Α.Ν.Μ.Α}\xRightarrow{g(x)=\frac{1}{x}\text{ συνεχής}}\frac{1}{\overline{X}}\xrightarrow{P}g\left(\frac{1}{p}\right)=p\right)$

Απο το ασυμπτωτικό αποτέλεσμα $(*)$, έχουμε

$$\tilde{I}^{p}_{1-a}(X)=\underset{\frac{1}{\overline{X}}}{\overset{\hat{p}}{\shortparallel}}\pm Z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{\nu}}$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα ασυμπτωτικά Δ.Ε. έχουμε με τα δεδομένα του Π.Τ. II.

$$v = 30 \quad , \quad \hat{p} = \frac{1}{\overline{X}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{6} \frac{v_i}{v} \cdot y_i} = \underline{\underline{0.4839}} ,$$

όπου $v_i$ = # εμφανίσεων της ένδειξης $i$, $y_i = i$. Έχουμε λοιπόν

| | 95 % | 99 % |
|---|---|---|
| ασυμπτωτικά Δ.Ε. | (0.3595 , 0.6083) | (0.3204 , 0.6474) |

• Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση του $p$ είναι αρκετά κοντά στο 0.5, και η ακρίβεια της εκτίμησης για τους 2 συντελεστές εμπιστοσύνης είναι της ίδιας τάξης με αυτήν του Π.Τ. I-(i) και I-(ii) μαζί, δηλ. όταν έχουμε ενώσει τα 2 σύνολα δεδομένων. Η εξήγηση δίνεται στο παρακάτω ερώτημα.

4) Κάθε παρατήρηση στο Π.Τ.-II, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι το αποτέλεσμα πολλαπλών δοκιμών Bernoulli, και έτσι η ερμηνεία του μεγέθους δείγματος στα δύο Π.Τ. είναι διαφορετική. Έχουμε $X_i$ = # δοκιμών Bernoulli μέχρι την $i$-επιτυχία.

Παρατηρείστε ότι $\hat{p} = \dfrac{1}{\overline{X}} = \dfrac{v}{\sum_{i=1}^{v} X_i} = \dfrac{\#\text{ επιτυχιών}}{\#\text{ δοκιμών Bernoulli}} = \dfrac{v}{N}$,

όπου $N = \sum_{i=1}^{v} X_i$, είναι το μέγεθος δείγματος που αντιστοιχεί σε δοκιμές Bernoulli. Αυτή είναι και η ε.μ.π. του $p$, αν θεωρηθεί ως ένα τ.δ. από Bernoulli, και μάλιστα, υποθέτοντας ότι $p \simeq \frac{1}{2}$, έχουμε $E(N) = v\,E(X_1) = 2v$, αφού $X_1 \sim Geo\left(p = \frac{1}{2}\right)$ και $E(X_1) = \dfrac{1}{1/2} = 2$. Αυτό εξηγεί γιατί η ακρίβεια της εκτίμησης του $p$ από δείγμα γεωμετρικής, αναμένεται να είναι της τάξης που αντιστοιχεί σε διπλάσιο δείγμα δοκιμών Bernoulli.

Χρησιμοποιώντας αυτήν την προσέγγιση τα ασυμπτωτικά Δ.Ε. είναι

$$\underbrace{\hat{p} \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}}_{\substack{\shortparallel \\ \text{Bernoulli Δ.Ε.} \\ (1-a \text{ ασυμπτωτικό})}} = \hat{p} \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\frac{v}{N}(1-\hat{p})}{v}} = \underbrace{\hat{p} \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}^2(1-\hat{p})}{v}}}_{\substack{\shortparallel \\ \text{Geometric Δ.Ε.} \\ (1-a \text{ ασυμπτωτικό})}}$$

Άρα με $N = \sum_{i=1}^{30} X_i = 62$, στο Π.Τ. II, εφαρμόζοντας τα 1-α ασυμπτωτικά Δ.Ε. ~~από~~ τ.δ. Bernoulli θα καταλήγαμε στο αποτέλεσμα του 3).

(5) Με τη βοήθεια του ερωτήματος 4) μπορούμε τώρα να δώσουμε μία ακόμα καλύτερη εκτίμηση του $p$, αφού μπορούμε να συνδιάσουμε όλα τα δεδομένα, υποθέτοντας ότι προέρχονται απο ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με ένα κατάλληλο μέγεθος δείγματος. Άρα αν $X_1 = \#$ επιτυχιών στο $I$-(i), $X_2 = \#$ επιτυχιών στο $I$-(ii) και $V = \#$ επιτυχιών στο $II$, $\nu_1 = \nu_2 = 30$, $N \overset{(\text{απο δεδομένα})}{=} 62$, έχουμε

$$\hat{p} = \frac{\#\text{ επιτυχιών}}{\#\text{ δοκιμών Bernoulli}} = \frac{X_1 + X_2 + V}{30+30+62} \overset{\text{δεδομένα}}{=} \frac{18+14+30}{30+30+62} = \underline{\underline{0.5082}}$$

και με $N_{ολ} = \nu_1 + \nu_2 + N = 122$, έχουμε

$$\tilde{I}^{p}_{1-a}(X) = \hat{p} \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N_{ολ}}}$$, και παίρνουμε

| | 95 % | 99 % |
|---|---|---|
| ασυμπτωτικά Δ.Ε | (0.4195, 0.5969) | (0.3916, 0.6248) |

- Παρατηρούμε ότι η ακρίβεια της εκτίμησης αυξάνεται ακόμη περισσότερο σε σχέση με τα προηγούμενα αποτελέσματα και στους δύο σ.ε. Το $\hat{p} = 0.5082$ είναι ακόμα πιο κοντά στο $\frac{1}{2}$. Παρ' όλα αυτά τα μήκη των Δ.Ε. φθίνουν σχετικά αργά, αφού η ελάττωση είναι της τάξης του $\sqrt{\frac{1}{N_{ολ}}}$.