Λύσεις Θεμάτων

Θέμα 1 : $\boxed{(\alpha)}$ $E_\theta(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x;\theta)\, dx = \int_0^1 x\, (\theta-1)\, (1-x)^{\theta-2}\, dx$

$$\underset{(dy=-dx)}{\overset{y=1-x}{=}} -(\theta-1)\int_1^0 (1-y)\, y^{\theta-2}\, dy = (\theta-1)\int_0^1 (1-y)\, y^{\theta-2}\, dy =$$

$$(\theta-1)\left[\frac{y^{\theta-1}}{\theta-1} - \frac{y^\theta}{\theta}\right]_0^1 = (\theta-1)\left(\frac{1}{\theta-1} - \frac{1}{\theta}\right) = 1 - \frac{\theta-1}{\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

Άρα $E_\theta(X) = \frac{1}{\theta} \xRightarrow{\text{(για εύρεση εκτιμήτριας)}} \overline{X} = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{\overline{X}}$

$\Longrightarrow$ εκτιμήτρια ροπών $\boxed{\overline{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}}$

$\boxed{(\beta)}$ Από το (α), $E_\theta(X) = \frac{1}{\theta} \Rightarrow E_\theta(\overline{X}) = E_\theta(X) = \frac{1}{\theta}$

Άρα ο δ.μ. $\overline{X}$ είναι α.ε. του $\eta = \frac{1}{\theta}$.

εξέταση συνέπειας

α' τρόπος : από τον Α.Ν.Μ.Α. (ασθενής νόμος μεγάλων αριθμών)

$\overline{X} \xrightarrow{P} E_\theta(X) = \frac{1}{\theta}$, άρα είναι και συνεπής εκτιμήτρια.

β τρόπος : Εφ' όσον είναι α.ε. αρκεί $Var_\theta(\overline{X}) \longrightarrow 0$, καθώς $\nu \to \infty$.

Πράγματι, $Var_\theta(\overline{X}) = \frac{Var_\theta(X)}{\nu} \longrightarrow 0$, καθώς $\nu \to \infty$,

αφού $Var_\theta(X) < \infty$ (Το στήριγμα της X είναι φραγμένο διάστημα)

$\boxed{(\gamma)}$ • $E_\theta(X) = \frac{1}{\theta}$, άρα μικρές τιμές για το X είναι πιο πιθανό να προέρχονται από μεγάλες τιμές του θ.

Επειδή $\theta_0 = 2 < 5 = \theta_1$, η $H_0: \theta = 2$ θα απορρίπτεται έναντι της $H_1: \theta = 5$ για επαρκώς μικρές τιμές του X.

Αυτό οδηγεί σε κρίσιμη περιοχή $R_1 = \{X \leq c\}$.

- Αναζητούμε c : $P_{H_0}(X \le c) = 0.1$ (το μέγεθος του ελέγχου)

ή $P_2(X \le c) = 0.1$.

Όμως $P_2(X \le c) \overset{\theta=2}{=} \int_0^c 1\, dx = c$ $\left(\text{για } \theta=2,\ X \sim Unif(0,1)\right)$.

Συμπεραίνουμε ότι $\boxed{c = 0.1}$.

- Επίσης ισχύς ελέγχου $= P_{H_1}(X \le c) = P_5(X \le 0.1)$.

$$= \int_0^{0.1} 4\,(1-x)^3\, dx \overset{y=1-x}{=} \int_1^{0.9} 4y^3(-dy) = 4\int_{0.9}^{1} y^3\, dy$$

$$= \left[y^4\right]_{0.9}^{1} = 1 - 0.9^4.$$

<u>Θέμα 2</u> :

$\boxed{(a)}$ Το στήριγμα της κατανομής είναι το $[b, +\infty)$, δηλ. εξαρτάται από την παράμετρο, και άρα <u>δεν ανήκει σε ΕΟΚ</u>.

$\boxed{(\beta)}$ $f(x_1,\dots,x_\nu; a,b) = \prod_{i=1}^{\nu} a\, b^a \left(\frac{1}{x_i}\right)^{a+1} 1_{[b,+\infty)}(x_i) =$

$$a^\nu b^{\nu a} \left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i\right)^{-(a+1)} 1_{[b,+\infty)}(x_{(1)}) \quad \left(\text{όπου } x_{(1)} = \min\{x_1,\dots,x_\nu\}\right)$$

$$= g\left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i,\ x_{(1)}; a, b\right) \overset{\Pi.K.N}{\Longrightarrow} T = \left(\prod_{i=1}^{\nu} X_i,\ X_{(1)}\right)$$

είναι επαρκής σ.σ. για το ζεύγος (a,b) (και άλλες επιλογές προφανώς υπάρχουν)

$\boxed{(\gamma)}$ Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για το ν-δείγμα γράφεται

$$\mathcal{L}(\theta) = L(a,b) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i; a,b) = a^\nu b^{\nu a} \left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i\right)^{-(a+1)} 1_{[b,+\infty)}(x_{(1)}),$$

ακριβώς όπως στο (β), με $a, b > 0$ (από υπόθεση).

Η $L(\theta)$ δεν είναι συνεχής και θέλει προσοχή!

Μεγιστοποιούμε πρώτα ως προς b. Για σταθερό a,

η $L(\theta)$ μηδενίζεται για $b > X_{(1)}$, και είναι

$\nearrow$ ως προς b για $0 < b \leq X_{(1)}$. Συμπεραίνουμε ότι

$\boxed{\hat{b} = X_{(1)}}$. Άρα

$$\max_{a,b} L(a,b) = \max_{a} L(a, X_{(1)}). \text{ Θέτουμε}$$

$$g(a) = L(a, X_{(1)}) = a^{\nu} \left(X_{(1)}\right)^{\nu a} \left(\prod_{i=1}^{\nu} X_i\right)^{-(a+1)} \text{ για } a > 0,$$

και έχουμε ότι $\log g(a) = \nu \log a + \nu a \log X_{(1)} - (a+1) \sum_{i=1}^{\nu} \log X_i$

Βρίσκουμε στάσιμα σημεία μέσω $\frac{d \log g(a)}{da} = 0$ (είναι παραγωγ. στο $(0,+\infty)$)

Άρα $\frac{d \log g(a)}{da} = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{\nu}{a} + \nu \log X_{(1)} - \sum_{i=1}^{\nu} \log X_i = 0 \Rightarrow$

$$a^* = \frac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} \log X_i - \nu \log X_{(1)}}$$ (μοναδικό στάσιμο σημείο)

Όμως $\frac{d^2 \log g(a)}{da^2} \overset{(*)}{=} -\frac{\nu}{a^2} < 0$. Άρα το a^* είναι

θέση τοπικού μεγίστου, και από γνωστή Πρόταση τελικά θέση ολικού μεγίστου.

Συμπεραίνουμε ότι $\hat{a} = \frac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} \log X_i - \nu \log X_{(1)}}$ και έτσι

Το ζεύγος $(\hat{a}, \hat{b})$, όπως παραπάνω είναι η ζητούμενη ΕΜΠ.

$\boxed{(\delta)}$ Για $b = 1$, $f(x; a) = a \frac{1}{x^{a+1}} \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x) =$

$$e^{\eta(a) T(x) - \beta(a)} h(x), \text{ όπου } \begin{aligned} \eta(a) &= -(a+1) \\ T(x) &= \log x \\ \beta(a) &= -\log a \\ h(x) &= \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x). \end{aligned}$$

Επειδή και το στήριγμα είναι

ανεξάρτητο της παραμέτρου

συμπεραίνουμε ότι αποτελεί ΕΟΚ.

Απο γνωστή Πρόταση για ΕΟΚ η

$$T^* = \sum_{i=1}^{\nu} T(X_i) = \sum_{i=1}^{\nu} \log X_i$$ είναι <u>πλήρης</u> σ.σ. (και επαρκής)

για την παράμετρο a.

<u>Παρατήρηση</u>

1) Αν κάποιος έδειξε την πληρότητα της επαρκούς σ.σ. που προέκυψε απο το (β), δηλ. της $T^{**} = \prod_{i=1}^{\nu} X_i$, το είναι προφανώς δεκτό, όπως και για οποιαδήποτε άλλη που είναι πλήρης $\left[T^{**} = e^{T^*} \right]$. Το ίδιο ισχύει και για κάποιον που έδειξε την πληρότητα της οικογένειας κατανομών

2) Αν κάποιος έδειξε την πληρότητα της ΕΜΠ που προκύπτει απο το (γ), τότε διευκρινίστηκε στην εξέταση, ότι η ΕΜΠ για το a, αλλάζει για το b σταθερό, και έτσι χρειαζόταν να βρεθεί η καινούρια ΕΜΠ.

$\boxed{\text{Θέμα 3}}$

(α) Υπολογίζουμε πρώτα τη σ.π.π. της Weibull.

$$f(x;\theta) = \frac{dF(x;\theta)}{dx} = b\theta x^{b-1} e^{-\theta x^b}, \quad x > 0 \quad (\theta > 0).$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = b^{\nu} \theta^{\nu} \left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i\right)^{b-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{\nu} x_i^b}, \quad \theta > 0.$$

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = \nu \log b + \nu \log \theta + (b-1) \sum_{i=1}^{\nu} \log x_i - \theta \sum_{i=1}^{\nu} x_i^b.$$

Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και έχουμε

$$\ell'(\theta) = \frac{\nu}{\theta} - \sum_{i=1}^{\nu} x_i^b.$$

εξίσωση $\ell'(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta^* = \dfrac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^b}$ (μοναδικό στάσιμο σημείο)

έλεγχος δεύτερης παραγώγου: $\ell''(\theta) = -\dfrac{\nu}{\theta^2} < 0$.

Άρα με παρόμοιο επιχείρημα όπως στο Θέμα 2, $\hat{\theta} = \dfrac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^b}$ ΕΜΠ.

(β) Σχηματίζουμε λόγο πιθανοφάνειας:

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \overset{(a)}{=} \frac{b^v \theta_0^v \left(\prod_i x_i\right)^{b-1} e^{-\theta_0 \sum_i x_i^b}}{b^v \theta_1^v \left(\prod_i x_i\right)^{b-1} e^{-\theta_1 \sum_i x_i^b}} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^v e^{(\theta_1-\theta_0)\sum_i x_i^b}$$

Εφαρμόζουμε Λήμμα Neyman-Pearson:

Θέλαμε $\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq k \iff \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^v e^{(\theta_1-\theta_0)\sum_i x_i^b} \leq k \iff$

$$e^{(\theta_1-\theta_0)\sum_i x_i^b} \leq \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^v k \overset{\theta_1>\theta_0}{\iff} \boxed{\sum_i x_i^b \leq \frac{v\log\frac{\theta_1}{\theta_0} + \log k}{\theta_1-\theta_0}}$$

Άρα η ισχυρότατη κ.π. είναι της μορφής

$$\boxed{C = \left\{ x \in \mathbb{R}^v : \sum_{i=1}^{v} x_i^b \leq c \right\}}$$ και το c

επιλέγεται έτσι ώστε

$$P_{\theta_0}(X \in C) = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{v} X_i^b \leq c\right) = \alpha$$

Όμως αν $X \sim f(x;\theta)$ και $Y = X^b$, τότε

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|, \; y>0, \text{ όπου } y = g(x) = x^b$$

$$\Rightarrow \quad x = g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{b}} \quad \text{Άρα}$$

$$f_Y(y) = b\theta \left(y^{\frac{1}{b}}\right)^{b-1} e^{-\theta\left(y^{\frac{1}{b}}\right)^b} \frac{1}{b} y^{\frac{1}{b}-1} = \theta e^{-\theta y}, \; y>0,$$

δηλ. $\boxed{Y \sim \mathcal{E}xp(\theta), \; \theta>0}$

Τελικά $\sum_{i=1}^{v} X_i^b \overset{\{X_i\} \text{ ανεξ.}}{\sim} Gamma(v,\theta)$. Έτσι έχουμε

$$2\theta \sum_{i=1}^{v} X_i^b \sim Gamma\left(v, \tfrac{1}{2}\right) \equiv \chi^2_{2v}.$$

Άρα $P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{v} X_i^b \leq c\right) = \alpha \Rightarrow P_{\theta_0}\left(\underbrace{2\theta_0 \sum_{i=1}^{v} X_i^b}_{\chi^2_{2v}} \leq 2\theta_0 c\right) = \alpha$

$$\Rightarrow 2\theta_0 c = \chi^2_{2v,1-\alpha} \Rightarrow \boxed{c = \frac{\chi^2_{2v,1-\alpha}}{2\theta_0}}$$

$\boxed{(\gamma)}$ Απο το (β), $2\theta \sum_{i=1}^{\nu} X_i^{b} \sim \chi^2_{2\nu}$, άρα για $b=1$,

$2\theta \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim \chi^2_{2\nu}$. Αναζητώ c_1 και c_2 :

$P\left(c_1 < 2\theta \sum_{i=1}^{\nu} X_i < c_2 \right) = 1-a$. Απο τα παραπάνω

για $\boxed{c_1 = \chi^2_{2\nu,\, 1-\frac{a}{2}} \quad \text{και} \quad c_2 = \chi^2_{2\nu,\, \frac{a}{2}}}$ προφανώς ικανοποιείται.

Με αυτές τις επιλογές έχουμε $P\left(\frac{c_1}{2\sum_{i=1}^{\nu} X_i} < \theta < \frac{c_2}{2\sum_{i=1}^{\nu} X_i} \right) = 1-a$

και άρα Δ.Ε. $\boxed{I_{1-a} = \left(\frac{c_1}{2\sum_{i=1}^{\nu} X_i} , \frac{c_2}{2\sum_{i=1}^{\nu} X_i} \right)}$.

Θέμα 4

(α) Το στήριγμα είναι $[0, e^{\theta}]$, και αφού εξαρτάται από την παράμετρο θ, η οικογένεια αυτή <u>δεν αποτελεί ΕΟΚ</u>.

(β) $f(x_1,\ldots,x_\nu;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} e^{-\theta} 1_{[0,e^{\theta}]}(x_i) = e^{-\nu\theta} 1_{(-\infty, e^{\theta}]}(x_{(\nu)}) \underbrace{1_{[0,+\infty)}(x_{(1)})}_{h(x)}$

$= g(X_{(\nu)};\theta)\, h(x)$, με $x = (x_1,\ldots,x_\nu)$.

Απο το Π.Κ.Ν. είναι η <u>$X_{(\nu)}$ είναι επαρκής σ.σ.</u>

(γ) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) \overset{(\beta)}{=} e^{-\nu\theta} 1_{(-\infty, e^{\theta}]}(X_{(\nu)}) 1_{[0,+\infty)}(X_{(1)})$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Για παρατηρήσεις $x_1,\ldots,x_\nu \geq 0$ και εφ' όσον

$X_{(\nu)} \leq e^{\theta} \iff \log X_{(\nu)} \leq \theta$, ως συνάρτηση του θ

η $L(\theta)$ γράφεται $L(\theta) = e^{-\nu\theta} 1_{[\log X_{(\nu)}, +\infty)}(\theta)$.

Επειδή $L(\theta) \searrow$ στο $[\log X_{(\nu)}, +\infty)$, συμπεραίνουμε ότι

η ΕΜΠ $\boxed{\hat{\theta} = \log(X_{(\nu)})}$.

Επειδή $\hat{\theta} = g(T) = g(X_{(\nu)})$, όπου $g(x) = \log x$

είναι συνάρτηση "1-1", και $T = X_{(\nu)}$ είναι επαρκής σ.σ. συμπεραίνουμε ότι η $\hat{\theta}$ είναι επαρκής σ.σ.

Παρατήρηση

Τα ερωτήματα (α) - (γ) παραπάνω λύνονται και με αναπαραμέτρηση του μοντέλου με $\lambda = e^{\theta} > 0$ και μεταφέροντας κατάλληλα τα αποτελέσματα από το λ, στο θ.

$\boxed{(\delta)}$ Λόγω του (β) και της υπόθεσης για το (δ), η $T = X_{(\nu)}$ είναι επαρκής και πλήρης σ.σ.

Από το πόρισμα του Θεωρήματος Lehmann-Scheffé, βρίσκουμε την α.ε.ε.δ. (αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς) του θ, λύνοντας $E(h(T)) = \theta$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Όμως $E(h(T)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) f_T(t;\theta)\, dt = \int_0^{e^{\theta}} h(t) \nu t^{\nu-1} e^{-\nu\theta} dt$

$$= \nu e^{-\nu\theta} \int_0^{e^{\theta}} h(t)\, t^{\nu-1} dt$$ Άρα

$$E[h(T)] = \theta \iff \int_0^{e^{\theta}} h(t)\, t^{\nu-1} dt = \frac{\theta e^{\nu\theta}}{\nu}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Με παραγώγιση (% θ) έχουμε, $e^{\theta} h(e^{\theta}) (e^{\theta})^{\nu-1} = \dfrac{e^{\nu\theta} + \nu\theta e^{\nu\theta}}{\nu} \Rightarrow$

$$\cancel{e^{\nu\theta}} h(e^{\theta}) = \cancel{e^{\nu\theta}} \left(\frac{1+\nu\theta}{\nu} \right) \overset{t = e^{\theta}}{\Longrightarrow}$$

$$h(t) = \frac{1}{\nu} + \log t .$$

Συμπεραίνουμε ότι η $\boxed{h(T) = \log T + \frac{1}{\nu} = \log X_{(\nu)} + \frac{1}{\nu}}$

είναι η αεεδ του θ.