Θέμα 1 (Λύσεις Φλεβ. 2017).

α) Γνωρίζουμε ότι αν $\hat{\sigma}_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu_x} (X_i - \bar{X})^2}{\nu_x - 1}$, τότε

η $\hat{\sigma}_x^2$ είναι α.ε. του σ_x^2.

Πράγματι $(\nu_x - 1)\dfrac{\hat{\sigma}_x^2}{\sigma_x^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu_x} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_x^2} = \sum_{i=1}^{\nu_x} \left(\dfrac{X_i - \bar{X}}{\sigma_x}\right)^2 \sim \chi^2_{\nu_x - 1}$ (1)

$\Rightarrow E\left((\nu_x-1)\dfrac{\hat{\sigma}_x^2}{\sigma_x^2}\right) = E\left(\chi^2_{\nu_x-1}\right) = \nu_x - 1 \Rightarrow E\left(\hat{\sigma}_x^2\right) = \sigma_x^2.$

Παρόμοια $\nu_y \dfrac{\hat{\sigma}_y^2}{\sigma_y^2} = \sum_{i=1}^{\nu_y}\left(\dfrac{Y_i - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2 \underset{(\mu_y=0)}{=} \sum_{i=1}^{\nu_y}\left(\dfrac{Y_i}{\sigma_y}\right)^2 \sim \chi^2_{\nu_y}$, (2)

όπου $\hat{\sigma}_y^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu_y} Y_i^2}{\nu_y}$. Άρα $E(\hat{\sigma}_y^2) = \sigma_y^2$.

β) Θέτουμε $\lambda = \dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$. Αν $\hat{\lambda} = \dfrac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_y^2}$, όπως παραπάνω, τότε

$$\frac{\hat{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dfrac{\hat{\sigma}_x^2}{\sigma_x^2}}{\dfrac{\hat{\sigma}_y^2}{\sigma_y^2}} \overset{(1),(2)}{\sim} \frac{\dfrac{\chi^2_{\nu_x-1}}{\nu_x-1}}{\dfrac{\chi^2_{\nu_y}}{\nu_y}} + \underline{\text{ανεξ.}} \equiv F_{\nu_x-1,\,\nu_y},$$

όπου $\hat{\sigma}_x^2$ και $\hat{\sigma}_y^2$ είναι ανεξάρτητες, λόγω της ανεξ. των τυχαίων δειγμάτων $X_1, \ldots, X_{\nu_x}$ και $Y_1, \ldots, Y_{\nu_y}$.

Άρα για $c_1 = F_{\underbrace{\nu_x-1,\,\nu_y,\,1-\frac{a}{2}}}$ και $c_2 = F_{\underbrace{\nu_x-1,\,\nu_y,\,\frac{a}{2}}}$, έχουμε

($1-\frac{a}{2}$ και $\frac{a}{2}$ άνω ποσοστιαία σημεία της $F_{\nu_x-1,\,\nu_y}$)

$$P\left(c_1 < \frac{\hat{\lambda}}{\lambda} < c_2\right) = 1 - a \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{\hat{\lambda}}{c_2} < \lambda < \frac{\hat{\lambda}}{c_1}\right) = 1 - a \Rightarrow I_{1-a}^{\lambda = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}} = \left(\frac{\hat{\lambda}}{c_2}, \frac{\hat{\lambda}}{c_1}\right).$$

$1-a$ δ.ε. για το λ

Θέμα 2

α) Έστω $x = (x_1, \dots, x_\nu)$, με $x_i > 0$, $1 \le i \le \nu$.

$$L(\theta) = f(x;\theta) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} (i\theta)\, e^{-i\theta x_i} = \nu!\, \theta^{\nu} e^{-\theta \sum_{i=1}^{\nu} i x_i}$$

Έχουμε $\ell(\theta) = \log L(\theta) = \log \nu! + \nu \log\theta - \theta \sum_{i=1}^{\nu} i x_i$, $\theta > 0$.

Είναι παραγωγίσιμη και $\ell'(\theta) = \dfrac{\nu}{\theta} - \sum_{i=1}^{\nu} i x_i$.

$$\ell'(\theta) = 0 \iff \theta^* = \frac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} i x_i}$$ μοναδικό στάσιμο σημείο.

$\ell''(\theta) = -\dfrac{\nu}{\theta^2} < 0$, $\forall \theta > 0$, άρα $\boxed{\hat{\theta} = \dfrac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} i X_i}}$ είναι η ε.μ.π. του θ.

Παρατήρηση

Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι αν $X_i \sim \mathcal{E}xp(i\theta) \Rightarrow iX_i \sim \mathcal{E}xp(\theta)$, και άρα τα $Y_i = iX_i$, $1 \le i \le \nu$ είναι τυχαίο δείγμα (α.ι.τ.μ.). Ισοδύναμα λοιπόν η ε.μ.π. του θ, βρίσκεται ως η εμ.π. σε τ.δ. από $\mathcal{E}xp(\theta)$ που είναι $\hat{\theta} = \dfrac{1}{\bar{Y}} = \dfrac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} i X_i}$.

β)
$$E(T^{k}) = \int_0^{\infty} t^{k} \frac{\theta^{a}}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\theta t}\, dt = \theta^{-k} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{a+k}}{\Gamma(a)} t^{a+k-1} e^{-\theta t}\, dt$$

$$= \frac{\theta^{-k}\,\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \underbrace{\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{\theta^{a+k}}{\Gamma(a+k)} t^{a+k-1} e^{-\theta t}}_{\text{σ.π.π. } G(a+k,\,\theta)}\, dt}_{=1} = \theta^{-k} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

$(k > -a)$.

γ) Αν $T = \sum_{i=1}^{\nu} i X_i$, τότε $T \sim G(\nu, \theta)$ $\left(T = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i,\ \text{όπου } Y_i \overset{\text{''}}{=} iX_i \sim \mathcal{E}xp(\theta)\right.$ και ανεξάρτητες$\left.\right)$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\nu}{T} = \nu T^{-1}, \text{ με } T \sim G(\nu,\theta).$$

Από το β) για $k = -1$ $(-1 > -\nu \iff \nu > 1)$, $E(T^{-1}) = \dfrac{\theta\,\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu)}$

$$= \theta \cdot \frac{(\nu-2)!}{(\nu-1)!} = \frac{\theta}{\nu-1} \Longrightarrow E(\hat{\theta}) = \frac{\nu}{\nu-1}\theta, \ \forall \theta > 0.$$

Άρα η $\hat{\theta}$ δεν είναι α.ε., και $b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = \left(\dfrac{\nu}{\nu-1} - 1\right)\theta = \dfrac{\theta}{\nu-1}$.

$(\forall \theta > 0)$.

Παρατήρηση (β' τρόπος).

Θα μπορούσατε να δείξετε ότι δεν είναι α.ε. και ως εξής.

$$\hat{\theta} = \frac{\nu}{\sum_{i=1}^{\nu} i X_i} = \frac{1}{\overline{Y}} \quad , \text{όπου} \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} Y_i}{\nu} \quad , \text{με } Y_i = iX_i \sim \mathcal{E}xp(\theta).$$

α.ι.τ.μ.

$$\text{Άρα} \quad E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{1}{\overline{Y}}\right) = E[g(\overline{Y})] \overset{\text{Jensen}}{\geq} g(E(\overline{Y})) = g[E(\mathcal{E}xp(\theta))]$$

$$= g\left(\frac{1}{\theta}\right) = \theta \quad , \quad (\forall \theta > 0). \quad \text{για } g(y) = \frac{1}{y} \quad , \quad y > 0,$$

που είναι κυρτή συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ και άρα εφαρμόζεται η ανισότητα Jensen. Επίσης η ανισότητα είναι γνήσια αφού η $\overline{Y}$ δεν είναι εκφυλισμένη τ.μ. και η g είναι γνήσια κυρτή.

Συνέπεια (α' τρόπος).

$$Var(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta})^2 - E^2(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\nu}{T}\right)^2 - \left(\frac{\nu}{\nu-1}\theta\right)^2 \quad (1).$$

$$E\left(\frac{\nu}{T}\right)^2 = \nu^2 \cdot E(T^{-2}) \underset{(\nu>2)}{\overset{(\beta)}{=}} \nu^2 \theta^2 \frac{\Gamma(\nu-2)}{\Gamma(\nu)} = \frac{\nu^2}{(\nu-2)(\nu-1)}\theta^2 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{\nu^2}{(\nu-2)(\nu-1)}\theta^2 - \frac{\nu^2}{(\nu-1)^2}\theta^2 = \frac{\nu^2}{\nu-1}\left(\frac{1}{\nu-2} - \frac{1}{\nu-1}\right)\theta^2$$

$$= \frac{\nu^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}\theta^2 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \quad . \quad (\forall \theta > 0).$$

Επειδή $\hat{\theta}$ είναι ασυμπτωτικά α.ε. $\left(b(\theta) = \frac{\theta}{\nu-1} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0\right)$,

και $Var(\hat{\theta}) \xrightarrow[(\forall\theta>0)]{} 0$, από γνωστή Πρόταση είναι συνεπής.

β' τρόπος.

$\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{Y}}$. Όμως $\overline{Y} \xrightarrow[\nu\to\infty]{P} E(Y) = E(\mathcal{E}xp(\theta)) = \frac{1}{\theta}$, $\forall \theta > 0$.

από τον Α.Ν.Μ.Α.

Άρα από Θ.Σ.Α. (θεώρημα συνεχούς απεικόνισης), έχουμε για $g(y) = \frac{1}{y}$ που είναι συνεχής στο $(0, \infty)$, ότι.

$\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{Y}} = g(\overline{Y}) \xrightarrow[\nu\to\infty]{P} g\left(\frac{1}{\theta}\right) = \theta$, $\forall \theta > 0$, και άρα $\hat{\theta}$ συνεπής.

Θέμα 3

(α) H_0 : "$\lambda = \lambda_0$" vs H_1 : "$\lambda = \lambda_1$" $(\lambda_1 < \lambda_0)$ σε τ.δ. διπλ. εκθ.(λ).

Εφαρμόζουμε Neyman-Pearson.

$$\frac{L(\lambda_0)}{L(\lambda_1)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum_1 |x_i|}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum |x_i|}} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n e^{-(\lambda_0-\lambda_1)\sum_1 |x_i|}$$

Άρα $\frac{L(\lambda_0)}{L(\lambda_1)} \leq k \iff \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n e^{-(\lambda_0-\lambda_1)\sum|x_i|} \leq k \iff$

$$n \log\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - (\lambda_0-\lambda_1)\sum|x_i| \leq \log k \overset{\lambda_1<\lambda_0}{\iff} \sum_1 |x_i| \geq c.$$

Άρα έχουμε ελεγχοσυνάρτηση $T = \sum_{i=1}^n |X_i|$ και κρίσιμη περιοχή

$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \geq c \right\}$. Για ε.σ.σ. a, έχουμε

$$P_{\lambda_0}(X \in C_a) = a \iff P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^n |X_i| \geq c_a\right) = a.$$

Εύκολα βγαίνει $|X_i| \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \overset{+\text{ ανεξ.}}{\Longrightarrow} T = \sum_{i=1}^n |X_i| \sim G(n, \lambda)$

$$\Rightarrow 2\lambda T \sim G\left(n, \tfrac{1}{2}\right) = G\left(\tfrac{2n}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \equiv \chi^2_{2n}.$$

Άρα $P_{\lambda_0}(T \geq c_a) = a \iff P_{\lambda_0}(\underbrace{2\lambda_0 T}_{\chi^2_{2n}} \geq 2\lambda_0 c_a) = a \iff$

$$2\lambda_0 c_a = \chi^2_{2n,a} \iff c_a = \frac{\chi^2_{2n,a}}{2\lambda_0}$$

κοινή και

Είναι προφανώς Ο.Ι.Ε. αφού η κρίσιμη περιοχή είναι ανεξάρτητη του λ_1.

β) Η μηδενική υπόθεση απορρ. σε ε.σ.σ. 0.05, αν

$$T \geq c_{0.05} = \frac{\chi^2_{20,0.05}}{2\cdot\frac{1}{2}} = 31,41,$$

ενώ απορρίπτεται σε ε.σ.σ. 0.025, αν

$$T \geq c_{0.025} = \frac{\chi^2_{20,0.025}}{2\cdot\frac{1}{2}} = 34,17.$$

Άρα λοιπόν η λύση είναι το διάστημα $[31,41\,,\,34,17)$.

γ) Απο το α) $2\lambda T \sim \chi^2_{2n}$. Θέλουμε

$$P(c_1 < \lambda < c_2) = 0.95 \iff$$

$$P(2c_1T < \underbrace{2\lambda T}_{\chi^2_{2n}} < 2c_2T) = 0.95 \iff$$

$n=10$

$$2c_1T = \chi^2_{2n,0.975} \quad \text{και} \quad 2c_2T = \chi^2_{2n,0.025} \iff$$

$$c_1 = \frac{\chi^2_{20,0.975}}{T} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{\chi^2_{20,0.025}}{T}, \text{ άρα } I^{\lambda}_{0.95} = \left(\frac{9,951}{T}, \frac{34,17}{T}\right)$$

<u>Θέμα 4</u>:

(α) Αν $(x = x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$, τότε

$$f(x;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} k_i\,\theta^{k_i}\,x_i^{-k_i-1}\,\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x_i)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{\nu} k_i\right)\theta^{\sum_{i=1}^{\nu}k_i}\left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i^{-k_i-1}\right)\prod_{i=1}^{\nu}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x_i) = \left(\prod k_i\right)\theta^{\sum_{i=1}^{\nu}k_i}\left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i^{-k_i-1}\right)\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x_{(1)})$$

, αφού $x_i \geq \theta,\ \forall\, 1 \leq i \leq \nu \iff x_{(1)} \geq \theta$.

Τελικά $f(x;\theta) = g(T(x);\theta)\,h(x)$, όπου

$$g(T(x);\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{\nu}k_i}\cdot\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x_{(1)}), \quad h(x) = \left(\prod_{i=1}^{\nu}k_i\right)\prod_{i=1}^{\nu}x_i^{-k_i-1}$$

και άρα η $T(X) = X_{(1)} = \min_{1\leq i\leq \nu}\{X_i\}$, είναι <u>επαρκής σ.σ.</u> για το θ σύμφωνα με το Π.Κ.Ν.

<u>Πληρότητα</u>

Βρίσκουμε την κατανομή της $T = X_{(1)}$.

$X_i \geq \theta$ με πιθ. 1 $\Rightarrow$ $X_{(1)} \geq \theta$ με πιθ. 1.

Για $t > \theta$ έχουμε

$$F_T(t;\theta) = P(T \leq t;\theta) = P(X_{(1)} \leq t;\theta) = 1 - P(X_{(1)} > t;\theta)$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{\nu} P(X_i > t;\theta) = 1 - \prod_{i=1}^{\nu}\left(1 - P(X_i \leq t;\theta)\right) \quad (1).$$

Έχουμε $f_{X_i}(x_i;\theta) = k_i\,\theta^{k_i}\,x_i^{-k_i-1}$, για $x_i > \theta$. $\Rightarrow$

$$P(X_i > t;\theta) = \int_t^{\infty} f(x;\theta)\,dx = \int_t^{\infty} k_i\,\theta^{k_i}\,x^{-k_i-1}\,dx$$

$$= k_i\,\theta^{k_i}\left[\frac{x^{-k_i}}{-k_i}\right]_t^{\infty} = \frac{\cancel{k_i}\,\theta^{k_i}}{-\cancel{k_i}}\left(0 - t^{-k_i}\right) = \left(\frac{\theta}{t}\right)^{k_i}.$$

Άρα από (1), για $t > \theta$, $F_T(t;\theta) = 1 - \prod_{i=1}^{\nu}\left(\frac{\theta}{t}\right)^{k_i} = 1 - \left(\frac{\theta}{t}\right)^{k}$, όπου $k = \sum_{i=1}^{\nu} k_i$.

Τελικά $f_T(t;\theta) = k\,\theta^{k}\,t^{-k-1}$, $t > \theta$ $\left(k = \sum_{i=1}^{\nu} k_i\right)$, και 0 διαφορετικά!

(η επιλογή $t \geq \theta$, μας οδηγεί σε ισόνομη τ.μ.).

Θέλουμε $E[h(T)] = 0$, $\overset{\forall \theta > 0}{\Longrightarrow}$ $h = 0$ (με πιθ. 1).

$$E[h(T)] = \int_{\theta}^{\infty} h(t)\,k\,\theta^{k}\,t^{-k-1}\,dt = k\,\theta^{k}\int_{\theta}^{\infty} h(t)\,t^{-k-1}\,dt$$

Άρα $E[h(T)] = 0 \overset{\forall \theta > 0}{\Longrightarrow} \int_{\theta}^{\infty} h(t)\,t^{-k-1}\,dt = 0 \Rightarrow$

$$-h(\theta)\,\theta^{-k-1} = 0 \Rightarrow h(\theta) = 0,\ \forall \theta > 0 \Rightarrow h = 0$$ στο $(0,\infty)$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η $T = X_{(1)}$ είναι πλήρης σ.σ. για το θ.

β) Έστω $x = (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$: $x_i > 0$, $\forall\, 1 \le i \le \nu$.
(η ενδιαφέρουσα περίπτωση).

Απο το α), $L(\theta) = f(x;\theta) = \left(\prod_{i=1}^{\nu} k_i\right) \theta^{k} \left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i^{-k_i - 1}\right) \mathbb{1}_{[\theta, +\infty)}(x_{(1)})$,

οπου $k = \sum_{i=1}^{\nu} k_i$. Είναι φανερό ότι αν $\theta \le X_{(1)}$, τότε $L(\theta) \nearrow$

και 0, για $\theta > X_{(1)}$

Άρα $\hat{\theta} = X_{(1)}$ είναι η ε.μ.π. του θ.

(γ) Απο Lehmann-Scheffe, αρκεί h :

$E[h(T)] = \theta^r$, $\forall\, \theta > 0$, αφού $T = X_{(1)}$ είναι

επαρκής και πλήρης σ.σ.

Όμως απο (β), $E[h(T)] = k\theta^k \int_\theta^\infty h(t)\, t^{-k-1} dt$. Έχουμε.

$$k\theta^k \int_\theta^\infty h(t)\, t^{-k-1} dt = \theta^r \Rightarrow \int_\theta^\infty h(t)\, t^{-k-1} dt = \frac{\theta^{r-k}}{k} \xRightarrow{d/d\theta}$$

$$-h(\theta)\,\theta^{-k-1} = \frac{r-k}{k}\,\theta^{r-k-1} \Rightarrow$$

$$h(\theta) = \frac{k-r}{k}\,\theta^r = \left(1 - \frac{r}{k}\right)\theta^r. \Rightarrow$$

$$h(T) = \left(1 - \frac{r}{k}\right) T^r = \left(1 - \frac{r}{k}\right) X_{(1)}^r,$$

είναι α.ε.ε.δ. του θ^r

[εύκολα βλέπουμε ότι πρέπει $r < k$ (για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα)]