ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2018

ΟΝΟΜΑ:
Α.Μ.:

Θέμα 1: Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις (τουλάχιστον 1 σωστή απάντηση)

1. Αν $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \theta)$, όπου θ παράμετρος ρυθμού, τότε νX, $\nu = 1, 2, \ldots$, ακολουθεί
   ○ $\mathcal{G}(\nu\alpha, \theta)$ ○ $\mathcal{G}(\alpha, \nu\theta)$ ○ $\mathcal{G}(\alpha, \frac{\theta}{\nu})$ ○ $\mathcal{G}(\frac{\alpha}{\nu}, \theta)$
2. Αν $X = Z_1^2 + Z_2^2$, όπου $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, 2$, ανεξάρτητες, τότε
   ○ $X \sim Exp(0.5)$ ○ $X \sim \mathcal{G}(1, 0.5)$ ○ $X \sim \mathcal{G}(2, 0.5)$ ○ $X \sim \chi^2_2$
3. Σε τυχαίο δείγμα από $U(0, \theta)$, $\theta > 0$, ποιές απο τις παρακάτω σ.σ. είναι επαρκείς;
   ○ $\overline{X}$ ○ $X_{(\nu)}$ ○ $(X_{(1)}, X_{(\nu)})$ ○ $(X_1, X_2, \ldots, X_\nu)$
4. Αν για μία εκτιμήτρια U_ν του θ, ισχύει $MSE(U_\nu) \to 0$, τότε η U_ν είναι
   ○ αμερόληπτη ○ ασυμπτωτικά αμερόληπτη ○ συνεπής ○ ασυμπτωτικά κανονική
5. Αν $\widehat{\theta}_\nu$ είναι εκτιμήτρια του θ που είναι συνεπής, τότε:
   ○ είναι αμερόληπτη ○ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη ○ $\widehat{\theta}_\nu \xrightarrow{d} \theta$, $\forall\theta$ ○ $\widehat{\theta}_\nu \xrightarrow{p} \theta$, $\forall\theta$
6. Αν $\sqrt{\nu}(\widehat{\theta}_\nu - \theta) \xrightarrow{d} X$, τότε $\sqrt{\nu}\left((\widehat{\theta}_\nu)^3 - \theta^3\right) \xrightarrow{d}$
   ○ $3\theta X$ ○ $3\theta^2 X$ ○ $9\theta^4 X$ ○ δεν συγκλίνει
7. Όταν αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος, τότε το μήκος ενός $(1-\alpha)-\Delta$.Ε.
   ○ αυξάνεται ○ ελαττώνεται ○ παραμένει σταθερό
8. Αν $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $Exp(\theta)$, με ρυθμό $\theta > 0$, και $\widehat{g(\theta)}$ είναι η ε.μ.π. του $g(\theta)$, τότε
   ○ $\widehat{\theta} = \overline{X}$ ○ $\widehat{\theta} = 1/\overline{X}$ ○ $\widehat{E(X_1)} = \overline{X}$ ○ $\widehat{E(X_1)} = 1/\overline{X}$

Θέμα 2: Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ ένα τυχαίο δείγμα από Γεωμετρική κατανομή $Geo(p)$, όπου $0 < p < 1$, με συνάρτηση πιθανότητας $f(x; p) = p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$. Υποθέτουμε ότι εκφράζουν το πλήθος των ρίψεων ενός νομίσματος μέχρι να εμφανιστεί Γράμματα για πρώτη φορά (ν ανεξάρτητες επαναλήψεις).

(α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια ροπών $\overline{p}_\nu$ του p. Είναι αμερόληπτη;

(β) Γίνεται γνωστό ότι κυκλοφορούν μόνο δύο τύποι νομισμάτων, αμερόληπτα με $p = 1/2$ και κίβδηλα με $p = 1/4$. Διατυπώστε έναν κατάλληλο έλεγχο υποθέσεων, για να ελέγξετε αν το νόμισμα είναι αμερόληπτο. Θεωρούμε ότι χωρίς στοιχεία θα δεχόσασταν ότι είναι αμερόληπτο. Καθορίστε μία ελεγχοσυνάρτηση και τη μορφή της κρίσιμης περιοχής.

(γ) Προσδιορίστε την κρίσιμη περιοχή ασυμπτωτικά σε ε.σ.σ. α.

Θέμα 3: Έστω $X_1,\ldots,X_\nu$ ένα τυχαίο δείγμα απο κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\sigma^2>0$ με συνάρτηση πυκνότητας $f(x;\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\{-0.5\,x^2/\sigma^2\}$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω

$$M_\nu=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}X_i^2}{\nu}\quad \text{και}\quad T_\nu=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\overline{X})^2}{\nu-1}$$

δύο εκτιμήτριες του σ^2. Θεωρείται γνωστό ότι $(\nu-1)T_\nu/\sigma^2\sim\chi^2_{\nu-1}$.

(α) Εξετάστε αν οι M_ν και T_ν είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες του σ^2.

(β) Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του σ^2.

(γ) Υπολογίστε τα ΜΤΣ (MSE) των M_ν και T_ν. Ποιά είναι καλύτερη από τις δύο με βάση αυτό το κριτήριο;

Θέμα 4: Έστω $Y\sim G(3,\theta)$ και $Z\sim G(2,2\,\theta)$ δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα με τις αντίστοιχες παραμέτρους και $\theta>0$ άγνωστη παράμετρος. Δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας τ.μ. που ακολουθεί $G(k,\theta)$, $k=1,2,\ldots,$

$$f(u;\theta)=\frac{1}{(k-1)!}\,\theta^k\,u^{k-1}\,e^{-\theta u},\qquad u>0.$$

(α) Να δείξετε ότι το ζεύγος $X=(Y,Z)$ ανήκει σε Ε.Ο.Κ. και να τεθεί σε κανονική μορφή.

(β) Να κατασκευαστεί ένα ακριβές $(1-\alpha)-$Δ.Ε. $I_{1-\alpha}(X)$ για το θ.

(γ) Πώς θα μπορούσαμε να πραγματοποιήσουμε έναν έλεγχο υποθέσεων $H_0:\theta=\theta_0$ έναντι της $H_1:\theta\neq\theta_0$ σε ε.σ.σ. α με τη βοήθεια του παραπάνω $(1-\alpha)-$Δ.Ε.;

Θέμα 5: Έστω $X_1,\ldots,X_\nu$ ένα τυχαίο δείγμα απο ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}[-\theta,\theta^2]$, $\theta>0$ με συνάρτηση πυκνότητας $f(x;\theta)=(\theta^2+\theta)^{-1}\mathbb{1}_{[-\theta,\theta^2]}(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(α) Βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας $\widehat{\theta}$ του θ.

(β) Προτείνετε μία συνεπή εκτιμήτρια του θ.

Θέμα 6: Έστω X_i, $1\le i\le\nu$, τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν το προσημασμένο κέρδος μίας εταιρείας σε ν διαδοχικές μέρες λειτουργίας της. Υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $X_i\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, όπου $\sigma^2>0$ γνωστό. Έστω $p=P(X_i>0)$, δηλ. η πιθανότητα η εταιρεία να κλείσει με κέρδος την $i-$μέρα και Φ η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής.

(α) Βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας $\widehat{p}_\nu$ του p. Δεχόμαστε ότι $\widehat{\mu}_\nu=\overline{X}_\nu$.

(β) Να κατασκευαστεί ένα ακριβές $(1-\alpha)-$Δ.Ε. $I_{1-\alpha}(X)$ για το p.

(γ) Προτείνετε ένα ασυμπτωτικό $(1-\alpha)-$Δ.Ε. $\widetilde{I}_{1-\alpha}(X)$ για το p.

Να απαντήσετε όλοι στο Θέμα 1

Επιλέξτε 2 από τα Θέματα 2-4 και 1 από τα Θέματα 5-6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ