ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Θέμα 1: Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τ.δ. από κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\theta) = (\theta - 1)(1-x)^{\theta-2}\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x),$$

με $\theta > 1$ άγνωστο.

α): Βρείτε μία εκτιμήτρια ροπών $\overline{\theta}$ του θ.

β): Συνάγετε μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του $\eta = 1/\theta$ και εξετάστε αν είναι συνεπής.

γ): Θεωρούμε τον εξής έλεγχο υποθέσεων

$$H_0: \ \theta = 2 \quad \textbf{έναντι της} \quad H_1: \ \theta = 5.$$

Για $\nu = 1$ και ελεγχοσυνάρτηση $X = X_1$ επιλέξτε ποιά απο τις περιοχές $R_1 = \{X \leq c\}$ ή $R_2 = \{X \geq c\}$ είναι λογικό να τεθεί ως κρίσιμη περιοχή C του παραπάνω ελέγχου. Βρείτε το c ώστε το μέγεθος του ελέγχου να είναι 0.1 και στη συνέχεια καθορίστε την ισχύ του.

Θέμα 2: Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;a,b) = ab^a \frac{1}{x^{a+1}}\,\mathbb{1}_{[b,+\infty)}(x),$$

με $a, b > 0$ άγνωστα.

α): Εξετάστε αν η $f(x;a,b)$ ανήκει σε ΕΟΚ.

β): Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το ζεύγος (a,b).

γ): Να βρεθεί η ΕΜΠ για το ζεύγος (a,b).

δ): Για $b = 1$, να εξετάσετε την πληρότητα.

Θέμα 3: Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από $Weibull$ με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F(x;\theta) = 1 - e^{-\theta x^b}, \quad \theta > 0, \ \ x > 0,$$

με b γνωστό.

α): Να βρεθεί η ΕΜΠ της παραμέτρου θ.

β): Να κατασκευαστεί ισχυρότατος έλεγχος με επίπεδο σημαντικότητας α για

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \quad \textbf{έναντι της} \quad H_1: \ \theta = \theta_1 \ \ (\theta_0 < \theta_1).$$

.

γ): Έστω ότι $b = 1$. Να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - \alpha$.

Θέμα 4: Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τ.δ. από ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, e^\theta]$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$ άγνωστο.

α): Να εξεταστεί αν η παραπάνω οικογένεια ομοιόμορφων κατανομών με σ.π.π.

$$f(x;\theta) = e^{-\theta}\,\mathbb{1}_{[0,e^\theta]}(x)$$

αποτελεί ΕΟΚ.

β): Δείξτε ότι η μέγιστη παρατήρηση $T = X_{(\nu)}$ είναι επαρκής σ.σ. για την παράμετρο θ.

γ): Να βρεθεί η ΕΜΠ του θ και να εξεταστεί αν είναι επαρκής.

δ): Αν δεχθούμε ότι η T είναι πλήρης σ.σ., τότε να βρεθεί η α.ε.ε.δ. του θ. [Δίνεται ότι αν $X_i \sim Unif[0,\lambda]$, τότε $f_T(t;\lambda) = \nu t^{\nu-1}\lambda^{-\nu}, \ 0 \leq t \leq \lambda$]

Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ