Διάλεξη 36

1. $$F \sim F_{n_1, n_2} \iff F = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2},$$

$X_1 \sim \chi^2_{n_1}$, $X_2 \sim \chi^2_{n_2}$, $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

2. $\lambda = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ σε 2 ανεξ. τ.δ. $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1,2$.

$\hat{\lambda} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$, τότε $\boxed{\dfrac{\hat{\lambda}}{\lambda} \sim F_{n_1-1, n_2-1}}$

$\dfrac{(n_i - 1) S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2_{n_i - 1}$, $i=1,2$ + ανεξ. μεταξύ $i=1,2$.

2

3

A $E_\theta(T) = c$

B $\boxed{P_\theta\left[X = x \mid T = t\right] = c(x,t)}$

Γ $P_\theta(T = t) = c(t)$

4 Αν εφαρμ. το Π.Κ.Ν. τότε η σ.π.π. $f_\theta(x)$

A $g(T(x);\theta)\cdot h(x)$ ✓

3

5 τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$ ↳ γνωστό

$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ είναι επαρκής για το μ ?

(Α) ΝΑΙ $\boxed{\text{(Β) ΟΧΙ}}$ (Γ) ΑΚΑΘΟΡΙΣΤΟ

Προσοχή! Δεν είναι επαρκής ούτε για το μ^2, ούτε και αν περιορίσουμε για $\mu > 0$.

(4)

(6) S' ελαχιστικά επαρκής,

T επαρκής

• (B) $\underline{S' = g(T)}$ ✓

(7) (διακριτή) συμπληρωματική σ.σ. <u>πρώτης-τάξης</u> V ικανοποιεί:

(A) $E_\theta(V) = c$ (B) $V_\theta(V) = c$,

(Γ) $P_\theta(V = v) = c(v)$

Αν βγεί το πρώτης τάξης, τότε όλα γίνονται σωστά υπό την προϋποθ. ότι $\underline{\exists}$.

8 Μία επαρκής + πλήρης σ.σ. για το θ $\Longrightarrow$ ελαχιστικά επαρκής. 5.

→ θεώρημα Bahadur.

Π.Κ. Neyman → χαρακτηρισμός επάρκειας.

Rao–Blackwell → βελτίωση α.ε. μέσω δέσμευσης με επαρκή σ.σ. (ομοιόμορφα μικρότερη διασπορά)

$\mathcal{U}$, $E[\mathcal{U} \mid T]$ → επαρκής σ.σ.

α.ε. $g(\theta)$

• Δεσμεύοντας με επαρκή ελαττώνουμε το Μ.Τ.Σ.!

6

Lehmann-Scheffe

Επάρκεια + πληρότητα μαζί για κάποια T, μας οδηγεί σε α.ε.ε.δ.

U α.ε. $\xrightarrow{|T}$ $E[U|T]$ → "μοναδική" α.ε.ε.δ.

Basu.

Το οποίο μας λέει ότι αν:

T επαρκής + πλήρης, και V συμπληρωματική σ.σ.

Τότε $\boxed{T \perp\!\!\!\perp V}$ $(\Rightarrow h(T) \perp\!\!\!\perp V)$.

(9) Για να είναι πλήρης η T (7)

μέσω Ε.Ο.Κ. πρέπει

(Γ) $\text{interior}(\Theta) \neq \emptyset$.

Μέσω Ε.Ο.Κ. βγαίνει άμεσα η επάρκεια χωρίς να ισχύει η παραπάνω συνθήκη.

(10) Θεώρημα R–B καλύτερες α.ε. μέσω δέσμευσης με

(A) επαρκείς.

Συνάρτηση Σκορ – Μέτρο πληροφορίας Fisher.

Συνάρτηση πιθανοφάνειας

$L(\theta) \longrightarrow L_X(\theta)$ (Τυχαία συνάρτηση του θ).

$\ell(\theta) \longrightarrow \ell_X(\theta)$ $\left[:= \log L_X(\theta)\right]$, $\theta \in \Theta$.

(λογαριθμοπιθανοφάνειας).

για παραγωγ./διαφορ. συνάρτηση $\ell(\theta)$,

$\ell'(\theta) = 0$ $\quad \left(\nabla_\theta \ell(\theta) = 0\right)$.

↳ εξίσωση πιθανοφάνεια.

↳ $\ell_X'(\theta)$ ή $\boxed{\frac{d}{d\theta} \ell_X(\theta)}$ Παίρνουμε την ε.μ.π.

Θα χρειαστούμε κάποιες συνθήκες ομαλότητας (9.)

Σ.Ο.

(I) $S_f = \{ x \in \mathbb{R}^n : f_\theta(x) > 0 \}$ είναι ανεξάρτητο του θ

και Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(II) $\exists \ \frac{d}{d\theta} \ell_x(\theta)$, $\forall x \in S_f$, $\forall \theta \in \Theta$.

(III). Αν T είναι σ.σ. με $E_\theta |T| < +\infty$, $\forall \theta \in \Theta$, τότε

$$\frac{d}{d\theta} \int_{x \in S_f} T(x) f_\theta(x)\, dx = \int_{x \in S_f} T(x) \frac{d}{d\theta} f_\theta(x)\, dx, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Εναλλακτικά

(III) → $\dfrac{d}{d\theta} E_\theta[T(X)] = E_\theta\left[T(X)\,\underbrace{\dfrac{d}{d\theta}\log f_\theta(X)}\right].$

→ $\left[\dfrac{d}{d\theta} f_\theta(x) = \dfrac{\frac{d}{d\theta} f_\theta(x)}{f_\theta(x)} \cdot f_\theta(x)\right]$

$= \boxed{\dfrac{d}{d\theta}\log f_\theta(x)}$

Ορισμός (συνάρτηση σκορ).

$$\boxed{S_X(\theta) := \frac{d}{d\theta}\ell_X(\theta) = \frac{d}{d\theta}\log f_\theta(x)}$$

↳ είναι και αυτό μια τυχαία συνάρτηση του θ.

↳ πολυδιάστατο $S_x(\theta) = \nabla_\theta \ell_x(\theta)$

Ιδιότητες Σκορ.

11

Κατ' αρχήν αναδιατυπώνουμε τη συνθήκη Σ.Ο.(ΙΙΙ)

① $\frac{d}{d\theta} E_\theta[T(X)] = E_\theta\left[T(X)\cdot S_X(\theta)\right]$

② $E_\theta\left[S_X(\theta)\right] = 0$

[από το (1):

$E_\theta[S_X(\theta)] = E_\theta[\underbrace{1}_{T(X)}\cdot S_X(\theta)] = \frac{d}{d\theta}\underbrace{E_\theta(1)}_{=1} = 0$]

③ $S_X(\theta) = \sum_{i=1}^{n} S_{X_i}(\theta)$

[$X=(X_1,\dots,X_n)$

$S_X(\theta) = \frac{d}{d\theta}\ell_X(\theta) = \frac{d}{d\theta}\sum_{i=1}^{n}\ell_{X_i}(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\theta}\ell_{X_i}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} S_{X_i}(\theta)$]

4 Αν επιπλέον στα παρακάτω επιτρέπεται η εναλλαγή παραγ. & ολοκλήρωσης και $g_x(\theta)$ είναι τυχαία συνάρτηση του θ, τότε αν υπάρχουν οι μέσες τιμές:

$$\boxed{\frac{d}{d\theta}E_\theta\left[g_x(\theta)\right] = E_\theta\left[\frac{d}{d\theta}g_x(\theta)\right] + E_\theta\left[g_x(\theta)\cdot S_x(\theta)\right]}$$

Η παραπάνω ιδιότητα γενικεύει την προηγούμενη με $g_x(\theta) = T(x)$ [αφού τότε $\frac{d}{d\theta}g_x(\theta) = \frac{d}{d\theta}T(x) = 0$]

Απόδειξη (π.χ. για συνεχείς).

$$\frac{d}{d\theta}\int_{S_f} g_x(\theta)\cdot f_\theta(x)\,dx = \int_{S_f}\frac{d}{d\theta}\left(g_x(\theta)\cdot f_\theta(x)\right)dx = \int_{S_f}\left(\frac{d}{d\theta}g_x(\theta)\right)f_\theta(x)\,dx + \int g_x(\theta)S_x(\theta)\,dx$$

Μέτρο Πληροφορίας του Fisher

Κάτω από τις Σ.Ο. μπορούμε να ορίσουμε το μ.π.-F :

$$I(\theta) := E_\theta\left[S'^2_X(\theta)\right]$$

$\longrightarrow$ επειδή $E_\theta(S_X(\theta)) = 0$, έχουμε άμεσα

$$I(\theta) = V_\theta\left[S'_X(\theta)\right]$$

Ιδιότητες

① $I(\theta) \in [0, +\infty]$ $\quad \left(S'^2_X(\theta) \geq 0 \right)$

② Αν $I_n(\theta)$ το μ.π.-F για το $X = (X_1, \dots, X_n)$

και $I_1(\theta)$ μιας παρατήρησης,

τότε $\quad I_n(\theta) = n \cdot I_1(\theta)$

Απόδ.

$$I_n(\theta) = V_\theta\left(S_X(\theta)\right) = V_\theta\left(\sum_{i=1}^{n} S_{X_i}(\theta)\right) \overset{\text{ανεξ.}}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_\theta\left(S_{X_i}(\theta)\right) \overset{\text{ισον.}}{=} n \cdot V_\theta\left(S_{X_1}(\theta)\right) = n \cdot I_1(\theta).$$