Διάλεξη 38

• Αποτελεσματικότητα [Efficiency]

Ως μέτρο ποιότητας μιας εκτιμήτριας χρησιμοποιείται η έννοια της αποτελεσματικότητας (αποδοτικότητας).

Ορσ: Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες C-R, και $\delta = \delta(X)$ είναι μια α.ε. του $g(\theta)$.

Αν

$$V_\theta[\delta(X)] = \text{Κ.φ.} - CR(g(\theta)) \left(= \frac{(g'(\theta))^2}{I(\theta)} \right)$$

τότε η $\delta(X)$ λέγεται <u>αποτελεσματική (αποδοτική)</u>.

Παραδείγματα

(i) Δείξαμε ότι ο δ.μ. $\overline{X}$ σε τ.δ. από Be(p) πετυχαίνει το κ.φ. – CR $\Longrightarrow$

$\overline{X}$ αποτ. εκτιμήτρια του p.

(ii). σε τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό.

$V_\mu(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$, Είναι ο δ.μ. αποτ. εκτιμ. του μ ?

Επιπλέον, $L_x(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$

$$\Longrightarrow \ell_x(\mu) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\Longrightarrow S_x(\mu) = \frac{d}{d\mu}\ell_x(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{d\mu}S_x(\mu) = -\frac{n}{\sigma^2} \Longrightarrow I(\mu) = E\left[-\frac{d}{d\mu}S_x(\mu)\right] = \frac{n}{\sigma^2} \text{ (σταθ)}$$

3

$$\Rightarrow V_\mu(\overline{X}) = \frac{1}{I(\mu)} = \text{κ.φ.} - CR \quad ✓$$

συμπεραίνουμε ότι ο δ.μ. $\overline{X}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του μ.

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις}}$

1) δ αποτελεσματική $\Longrightarrow$ δ α.ε.ε.δ. του $g(\theta)$,

[ισοδ.] δ όχι α.ε.ε.δ. $\Longrightarrow$ δ όχι αποτελεσματική.

2) δ α.ε.ε.δ. $\overset{\text{γενικά}}{\not\Longrightarrow}$ δ αποτελεσματική

δηλ. μπορεί μία $\delta(X)$ να είναι α.ε.ε.δ. χωρίς να πετυχαίνει το κάτω φράγμα - CR.

4

σημειώνουμε εδώ ότι μπορεί να μην ορίζεται καν το κ.φ.-CR, αφού μπορεί να μην ισχύουν οι υποθέσεις CR, π.χ. σε τ.δ. $\mathcal{U}[0,\theta]$, $\theta>0$.

εδώ υπάρχει α.ε.ε.δ. για το θ, όμως δεν ισχύουν οι υποθέσεις CR, και άρα δεν μπορούμε να μιλήσουμε για αποτελεσματικότητα. Αλλά μπορεί να ισχύουν οι υποθέσεις, και μια α.ε.ε.δ. να ΜΗΝ επιτυγχάνει το κ.φ.-CR. [είναι συχνό].

Ορσ : Ορίζουμε ως **αποτελεσματικότητα** 5 μιας α.ε. $\delta(X)$ του $g(\theta)$ την ποσότητα

$$a(\delta) = \frac{\kappa.\varphi. - CR\left(g(\theta)\right)}{V_\theta[\delta(X)]}, \ \forall \theta \in \Theta.$$

Παρατ. : Όταν ισχύουν οι υποθέσεις – CR, έχουμε $0 \leq a(\delta) \leq 1$ και

$a(\delta) = 1 \iff$ η δ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του $g(\theta)$.

Θεώρημα

Έστω $X = (X_1, \ldots, X_n)$ τ.δ. με σ.π. / σ.π.π. $f_\theta(x)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ και $\delta = \delta(X)$ μία εκτιμήτρια του $g(\theta)$.

Αν ισχύουν οι υποθέσεις CR, τότε

$\delta(X)$ αποτελ. εκτιμήτρια του $g(\theta) \iff \boxed{S_X(\theta) = k(\theta)\left(\delta(X) - g(\theta)\right)}$, όπου $k(\theta) \neq 0$, $\forall \theta \in \Theta$.

Αποδ.

$\Leftarrow)$ πρέπει ν.δ.ο. (i) $\delta(X)$ α.ε. του $g(\theta)$

(ii) $V_\theta[\delta(X)] = $ κ.φ. $- CR(g(\theta))$.

• για το (i):

$$S_X(\theta) = k(\theta)\big(\delta(X) - g(\theta)\big), \ \forall \theta \in \Theta \Rightarrow$$

$$\underbrace{E_\theta\big(S_X(\theta)\big)}_{=0} = k(\theta)\Big(E_\theta\big(\delta(X)\big) - g(\theta)\Big), \ \forall \theta \in \Theta$$

$$\xRightarrow{k(\theta) \neq 0 \ (\forall \theta).} E_\theta[\delta(X)] = g(\theta), \ \forall \theta \in \Theta.$$

• για το (ii):

$$\text{Κ.Φ.-CR}\big(g(\theta)\big) = \frac{\big(g'(\theta)\big)^2}{I(\theta)} = \frac{\left(\frac{d}{d\theta} E_\theta[\delta(X)]\right)^2}{V_\theta\big(S_X(\theta)\big)}$$

$$= \frac{E_\theta^2[\delta(X) S_X(\theta)]}{V_\theta[k(\theta)(\delta(X) - g(\theta))]} = \frac{Cov^2\big(\delta(X), k(\theta)(\delta(X) - g(\theta))\big)}{V_\theta\big[k(\theta)(\delta(X) - g(\theta))\big]}$$

$$= \frac{k^2(\theta)\, V_\theta^2(\delta(X))}{k^2(\theta)\, V_\theta(\delta(X))} = V_\theta[\delta(X)].$$

(θ)

✓

Από τα (i) + (ii) έχουμε την ισχύ του $\Leftarrow$).

$$\left[E_\theta(\delta(X)\cdot S_X(\theta)) \overset{E_\theta(S_X(\theta))=0}{=\!=} E_\theta(\delta(X)\cdot S_X(\theta)) - E_\theta(\delta(X))\cdot \underbrace{E_\theta(S_X(\theta))}_{0} \right.$$

$$\left. = Cov(\delta(X), S_X(\theta)) \right].$$

$\Rightarrow$) $\delta(X)$ αποτ. εκτιμ. του $g(\theta)$, άρα

$E_\theta[\delta(X)] = g(\theta), \ \forall \theta \in \Theta$ και

$$V_\theta[\delta(X)] = \frac{(g'(\theta))^2}{I(\theta)} \overset{\text{απο πριν}}{=} \frac{Cov_\theta^2(\delta(X), S_X(\theta))}{V_\theta(S_X(\theta))} \Longrightarrow$$

$$Cov^2(\delta(X), S_X(\theta)) = V_\theta(\delta(X))\, V_\theta(S_X(\theta)),$$

δηλ. ισχύει η ισότητα στην ανισότητα συνδιακύμανσης

$$|Cov_\theta(\delta(X), S_X(\theta))| \leq \sqrt{V_\theta(\delta(X))}\sqrt{V_\theta(S_X(\theta))}, \ \forall \theta.$$

Απο γνωστό αποτέλ. η ισότητα ισχύει αν $\exists\, k(\theta) \neq 0$ και $\lambda(\theta)$:

$$S_X(\theta) = k(\theta)\,\delta(X) + \lambda(\theta).$$

Όμως $E(S_X(\vartheta)) = 0 \quad , \forall \vartheta \implies$ (10)

$$k(\vartheta)\, \underbrace{E_\vartheta(\delta(X))}_{= g(\vartheta)} + \lambda(\vartheta) = 0 \quad , \forall \vartheta \implies$$

$$\implies \lambda(\vartheta) = - k(\vartheta) \cdot g(\vartheta) .$$

Τελικά

$$S_X(\vartheta) = k(\vartheta)\,\delta(X) - k(\vartheta)\, g(\vartheta)$$

$$= k(\vartheta)\big(\delta(X) - g(\vartheta)\big) \quad , \forall \vartheta .$$

Παρατήρηση.

- $$K(\theta) \overset{(i)}{=} \frac{g'(\theta)}{V_\theta[\delta(X)]} \overset{(ii)}{=} \frac{I(\theta)}{g'(\theta)}.$$

Πράγματι,

$$g'(\theta) = \frac{d}{d\theta} E_\theta[\delta(X)] = Cov(\delta(X), S_X(\theta))$$

$$= Cov(\delta(X), K(\theta)\,\delta(X) - g(\theta))$$

$$= \underset{\sim\sim\sim}{K(\theta)} \cdot V_\theta[\delta(X)].$$

$$\Rightarrow K(\theta) \overset{(i)}{=} \frac{g'(\theta)}{V_\delta(\delta(X))} = \frac{g'(\theta)}{(g'(\theta))^2 / I(\theta)} = \frac{I(\theta)}{g'(\theta)}.$$

Σύνδεση Ε.Ο.Κ. με αποτελεσματικότητα

Θεώρημα :

Έστω $X=(X_1,\dots,X_n)$ τ.δ. με σ.π./σ.π.π. $f_\theta(x)$, $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}$ και $\delta=\delta(X)$ μια εκτιμήτρια του $g(\theta)$.

- Τότε ισχύουν οι συνθήκες-CR και $\delta(X)$ αποτελεσματική εκτιμήτρια του $g(\theta)$ $\Longleftrightarrow$ το τ.δ. X ανήκει σε Ε.Ο.Κ. της μορφής

$$f_\theta(x) = e^{\varphi(\theta)\delta(x)-\beta(\theta)}\cdot h(x)$$

με $\varphi(\theta)$ συνεχώς διαφορίσιμη, $\varphi'(\theta)\neq 0$ και $g(\theta)=\dfrac{\beta'(\theta)}{\varphi'(\theta)}$.

$\Leftarrow$) Αποδ.:

13

Απο Πρόταση που είχαμε δεί σε προηγ. μάθημα έχουμε ότι ισχύουν οι Σ.Ο. και

$$I(\theta) = (\varphi'(\theta))^2 V_\theta[\delta(X)] \quad (*).$$

Επιπλέον $V_\theta[\delta(X)] < +\infty$ [υπάρχουν ροπές οποιασδ. τάξης].

και άρα απο την (*) $I(\theta) < +\infty$, αλλά και $I(\theta) > 0$, $\forall \theta$ (διότι $\varphi'(\theta) \neq 0$).

Άρα λοιπόν η $\delta(X)$ θα είναι αποτελ. εκτιμήτρια.

$\Leftarrow$. $S_X(\theta) = k(\theta)\left(\cancel{\delta(X) -} g(\theta)\right)$.

Πράγματι

$\Leftarrow$) Αποδ.:

Από Πρόταση που είχαμε δεί σε προηγ. μάθημα έχουμε ότι ισχύουν οι Σ.Ο. και

$$I(\theta) = (\varphi'(\theta))^2 V_\theta[\delta(X)] \quad (*).$$

Επιπλέον $V_\theta[\delta(X)] < +\infty$ [υπάρχουν ροπές οποιασδ. τάξης].

και άρα από την (*) $I(\theta) < +\infty$, αλλά και $I(\theta) > 0$, $\forall \theta$ (διότι $\varphi'(\theta) \neq 0$).

Άρα λοιπόν η $\delta(X)$ θα είναι αποτελ. εκτιμήτρια.

$\Leftarrow$). $S_X(\theta) = k(\theta)\left(\delta(X) - g(\theta)\right)$.

Πράγματι

$$S_X(\theta) = \frac{d}{d\theta} l_X(\theta) \underset{\text{από την Ε.Ο.Κ.}}{=} \varphi'(\theta)\,\delta(X) - B'(\theta)$$

$$= \varphi'(\theta)\left(\delta(x) - \frac{B'(\theta)}{\varphi'(\theta)}\right) \qquad (\varphi'(\theta) \neq 0).$$

$$= \varphi'(\theta)\left(\delta(x) - g(\theta)\right)$$

Άρα έχουμε ότι η $\delta(X)$ είναι αποτ. εκτιμ. του $g(\theta)$.

⇒) Άσκηση.

υπόθεση $\Rightarrow$ $S_X(\theta) = k(\theta)\left(\delta(X) - g(\theta)\right)$, $k(\theta) \neq 0$.

$\left(\frac{d}{d\theta} l_X(\theta)\right)$.

Άρα ολοκληρώνουμε για να βρούμε την $f_\theta(x)$.

Σύνδεση αποτελ. εκτιμ. + ε.μ.π.

Πρόταση: Έστω $X=(X_1,\dots,X_n)$ τ.δ. με σ.π./σ.π.π. $f_\theta(x)$.
Αν $\delta=\delta(X)$ είναι αποτελ. εκτιμ. του θ, τότε είναι και ε.μ.π. του θ.

Αποδ:
Εφ' όσον $\delta(X)$ αποτελ. εκτιμ. του $\theta \overset{\text{Θεώρ.}}{\Longrightarrow}$

$$S_X(\theta) = k(\theta)\big(\delta(X)-\theta\big), \ \forall\, \theta\in\Theta.$$

Λόγω παραγωγισ. της λογαριθμοπιθαν. βρίσκουμε ε.μ.π. λύνοντας

$$S_X(\theta)=0 \iff k(\theta)\big(\delta(X)-\theta\big)=0 \overset{k(\theta)\neq 0}{\iff}$$

$$\boxed{\theta^* = \delta(X)} \longrightarrow \text{στάσιμο σημείο.}$$

16

$$K(\theta) = \frac{g'(\theta)}{V_\theta(\delta(x))} = \frac{I(\theta)}{g'(\theta)}$$

$$\Downarrow$$

για μας εδώ $g(\theta) = \theta \Rightarrow g'(\theta) = 1$

άρα $K(\theta) = I(\theta) > 0, \quad \forall \theta \in \Theta$.

Άρα είχαμε $S_x(\theta) = \frac{d}{d\theta} \ell_x(\theta) = k(\theta)\big(\delta(x) - \theta\big)$

$\Rightarrow$ για $\theta < \delta(x)$, $\frac{d}{d\theta}\ell_x(\theta) > 0$, $\ell_x(\theta) \nearrow$

$\theta > \delta(x)$, $\frac{d}{d\theta}\ell_x(\theta) < 0$, $\ell_x(\theta) \searrow$.

17.

Τελικά το $\theta^* = \delta(X)$ είναι θέση ολικού μεγίστου.

και τελικά $\boxed{\hat{\theta} = \delta(X)}$.

Προσοχή.

αν $\hat{\theta}(X)$ είναι ε.μ.π. του θ $\not\Rightarrow$ $\hat{\theta}(X)$ είναι αποτελ. εκτιμήτρια του θ.