# Διάλεξη 39

## Επαναληπτική Άσκηση

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$

με $f_\lambda(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

Έστω $N_n$ η τ.μ. που εκφράζει τη συχνότητα εμφάνισης του $0$ σε $n$-παρατηρήσεις και θέτουμε $b = P_\lambda(X_1 = 0) = g(\lambda)$.

(i) Θέτουμε $\bar{b}_n = \dfrac{N_n}{n}$ την εμπειρική εκτιμήτρια του $b$. Υπολογίστε το $MT\Sigma_{\bar{B}_n}(\lambda)$. Είναι συνεπής εκτιμήτρια του $b$?

2

(ii) Υπολογίστε την ε.μ.π. $\hat{\theta}_n$ του $\theta$.
Είναι α.ε. του $\theta$ ?

(iii) Ν.δ.ο. η $\hat{\theta}_n$ είναι είναι ασυμπτωτικά κανονική.
Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι συνεπής ? Ισχυρά συνεπής ? Αν όχι, αιτιολογήστε την ισχυρή συνέπεια.

(iv) Δώστε ένα ασυμπτωτικό $(1-a)$- Δ.Ε. για το $\theta$.

(v) Υπολογίστε το μ.π.-Fisher $I_1(\lambda)$ και βρείτε το κ.φ.-CR για α.ε. του $g(\lambda)$.
Υπολογίστε το για $n = 1$.

(vi) Δείξτε ότι το παραπάνω κ.φ. – CR συμπίπτει με την ασυμπτωτική διασπορά της $\hat{\theta}_n$. Λέμε ότι η $\hat{\theta}_n$ είναι **ασυμπτωτικά αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\theta$.**

(vii) Βρείτε την ασυμπτωτική κατανομή της $\bar{\theta}_n$ και συγκρίνετε τις ασυμπτ. διασπορές των $\hat{\theta}_n$ και $\bar{\theta}_n$.

## Λύση

(i) $\bar{\theta}_n = \dfrac{N_n}{n} \longrightarrow$ ποσοστό εμφανίσεων του 0 σε ένα δείγμα μεγέθους $n$.

$$\bar{\theta}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i=0\}}}{n} = \bar{Y}_n, \quad \text{όπου } Y_n = 1_{\{X_n=0\}} \ (\text{α.1.τ.μ})$$

4

$$MT\Sigma^{1}_{\overline{\theta_n}}(\lambda) = b^{2}_{\overline{\theta_n}}(\lambda) + V_\lambda(\overline{\theta_n})$$

$$E(\overline{\theta_n}) = E_\lambda(\overline{Y_n}) = E_\lambda(Y_1) = e^{-\lambda} = \theta$$

$Y_1 \sim Be(\theta)$, $e^{-\lambda} = P(X_1 = 0)$

όπου $\boxed{\theta = g(\lambda) = e^{-\lambda}}$ $\hookrightarrow$ α.ε. του $g(\lambda) = \theta$.

$$MT\Sigma^{1}_{\overline{\theta_n}}(\lambda) = V_\lambda(\overline{\theta_n}) = V_\lambda(\overline{Y_n}) = \frac{V_\lambda(Y_1)}{n} = \frac{e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{n}$$

$$= \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

Έχουμε $MT\Sigma_{\overline{\theta_n}}(\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall\ \lambda > 0$.

από $\xRightarrow{\text{Ικ. Προτ.}}$ $\overline{\theta_n}$ συνεπής εκτιμήτρια του $\theta$.

συνεπής ?

$\overline{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta = g(\lambda)$ $\left( \forall \lambda > 0 \text{, άρα και } \forall \theta \in (0,1) \right)$

$\left[ \lambda \in (0,+\infty) , \ \theta = e^{-\lambda} \xrightarrow{1-1 \text{ συνάρτ.}} \theta \in (0,1) \right]$

αναπαραμέτρηση

Εκφράζει πιθανότητα.

(ii) $\theta = g(\lambda)$, $\hat{\lambda}_n = \overline{X}_n \Longrightarrow$

ιδιότ. αναλλ. ε.μ.π

η ε.μ.π. του λ.

$\hat{\theta}_n = g(\hat{\lambda}_n) = e^{-\overline{X}_n}$

(6)

Η $g(\lambda) = e^{-\lambda}$ είναι κυρτή συνάρτηση και μάλιστα γνήσια κυρτή στο $(0, +\infty)$

αφού $g''(\lambda) = e^{-\lambda} > 0$, $\forall \lambda \in (0, +\infty)$

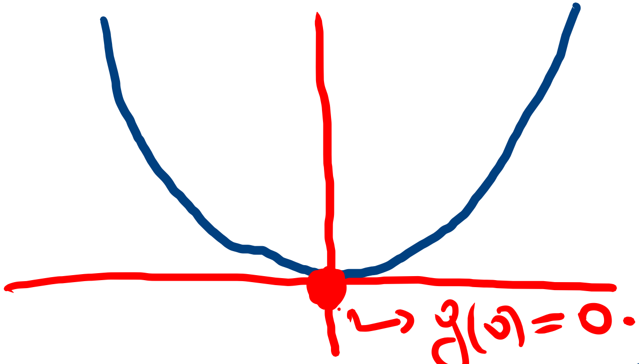
και άρα μόνο με κυρτότητα

$$E(\hat{\theta}_n) = E\left[g(\overline{X}_n)\right] \overset{J.}{>} g(E(\overline{X}_n)) = e^{-\lambda} = \theta$$

και μάλιστα γνήσια ανισότητα αφού $g$ γνήσιο κυρτή και $\overline{X}_n$ όχι εκφυλ. τ.μ.

Τελικά $E(\hat{\theta}_n) > \theta$, $\forall \theta \in (0,1)$ και άρα έχουμε θετική μεροληψία, $b_{\hat{\theta}_n}(\theta) = E_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta > 0 \quad \forall \theta \in (0,1)$.

# Ανισότητα Jensen




$x^2 \rightarrow$ κυρτή.

$$E[g(X)] \geq g(E(X))$$

κυρτή!

$$E(X^2) \geq E^2(X) = (E(X))^2.$$

για κοίλες.

$$E[g(X)] \leq g(E(X)).$$

(iii) $\hat{\theta}_n = g(\overline{X}_n)$

Κ.Ο.Θ.: (ισχύουν οι υποθέσεις)

α.ι. τ.μ. + $0 < V_\lambda(X_1) < +\infty$.

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - E_\lambda(X_1)\right) \xrightarrow{d} N(0, V_\lambda(X_1))$$

$$V_\lambda(X_1) = \lambda, \quad N(0, \lambda).$$

$g$ παραγωγίσιμη. και $g'(\lambda) = -e^{-\lambda}$ $\underline{\forall \lambda > 0}$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Δέλτα.

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) = \sqrt{n}\left(g(\overline{X}_n) - g(\lambda)\right)$$

$$= \sqrt{n}\left(e^{-\overline{X}_n} - e^{-\lambda}\right)$$

Άρα

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{d.} N\Big(\underbrace{0}_{\text{μηδεν. η μέση τιμή.}}, \underbrace{(g'(\lambda))^2 \cdot \lambda}_{\text{ασυμπτωτική διασπορά.}}\Big)$$

$$= N\left(0, e^{-2\lambda} \cdot \lambda\right)$$

$$= \boxed{N\left(0, \theta^2 \cdot (-\log\theta)\right)}$$

διότι $\theta = e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = -\log\theta$

και άρα είναι ασυμπτωτικά κανονική
και επομένως και συνεπής εκτιμήτρια.

$$\left( \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta \quad , \forall \theta \right)$$ → συνέπεια.

$$\Updownarrow$$

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{d.} \theta \quad , \forall \theta .$$

$$\hat{\theta}_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\downarrow \, 0} \underbrace{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}_{\downarrow d \; N(\cdot,\cdot)} + \underbrace{\theta}_{\text{σταθερά}} \xrightarrow{d.} \theta .$$

$$\left[ \underset{\downarrow p.}{X_n} \cdot \underset{\downarrow d.}{Y_n} + \underset{\downarrow p.}{R_n} \right].$$ (Slutsky + ιδιότ. σύγκλισης |p|d.

Συνέπεια $\not\Rightarrow$ ισχυρή συνέπεια.

Η ισχυρή συνέπεια προκύπτει εύκολα.

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} E_\lambda(X_1) = \lambda, \quad \forall \lambda > 0.$$

[Ι.Ν.Μ.Α.] ↳ ισχύουν οι προϋποθ.

$$\hat{b}_n = g(\overline{X}_n) \quad \to \quad g \text{ συνεχής.}$$

Άρα εφαρμογ. Θ.Σ.Α.

$$\hat{b}_n = g(\overline{X}_n) \xrightarrow{a.s.} g(\lambda) = e^{-\lambda} = b, \quad \forall b \in (0,1)$$

(iv) 12

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d.} N\Big(0, \underbrace{(-\log\theta)\,\theta^2}_{\sigma^2(\theta).}\Big)$$

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{(-\log\theta)\,\theta^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\sigma(\theta) \longrightarrow \sigma(\hat{\theta}).$$

Άρα

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{-(\log\hat{\theta}_n)(\hat{\theta}_n)^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

→ ασυμπτωτικά οδηγός.

13

Άρα οδηγούμαστε σε ένα ασυμπτ. $(1-a)$- Δ.Ε.

$$\boxed{\tilde{I}^{\theta}_{1-a} = \hat{\theta}_n \pm z_{a/2} \cdot \sqrt{\frac{(-\log(\hat{\theta}_n))(\hat{\theta}_n)^2}{n}}}$$

(v) $I_1(\lambda) = V_\lambda\left(S'_{X_1}(\lambda)\right) = V_\lambda\left(-1+\frac{X_1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$

Το κ.φ.-CR για α.ε. του $g(\lambda) = e^{-\lambda}$:

$$\frac{(g'(\lambda))^2}{n \cdot I_1(\lambda)} = \frac{e^{-2\lambda}}{n \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda e^{-2\lambda}}{n} = \frac{(-\log\theta)\cdot\theta^2}{n}$$

(vi) Για 1 παρατήρηση

Το κ.φ.-CR είναι $\lambda e^{-2\lambda} = \underline{(-\log\theta)\theta^2}$

Για ασυμπτ. α.ε. παίζει το ρόλο του κ.φ. οριακά
↳ διασπορά.

Αν $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N_\theta(0, h(\theta))$

όπου $h(\theta) =$ κ.φ.-CR, τότε

η $\hat{\theta}_n$ είναι ασυμπτ. αποτελ. εκτιμήτρια.

πράγματι $h(\theta) = \underline{(-\log\theta)\theta^2}$. ✓.

(vii) 15

$$\sqrt{n}\,(\bar{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d.} N(0, \underbrace{\theta(1-\theta)}_{V_\theta(X_1)})$$

$\downarrow$ συγκ. μέσος $\theta e(\theta)$.

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d.} N(0, \theta^2(-\log\theta)),$$

θ.δ.ο.

(α.δ. $\hat{\theta}_n$),

$$\frac{\theta^2(-\log\theta)}{\theta(1-\theta)} < 1 \iff$$

(α.δ. $\bar{\theta}_n$)

$$b(-\log b) < 1 - b \quad , \forall b \in (0,1).$$

$$\Longleftarrow \quad \log \frac{1}{b} < \frac{1}{b} - 1 \quad , \forall b \in (0,1).$$

προφανώς αρκεί $\underline{\log x < x - 1}$, $\forall x \in (1,+\infty)$.
$(\forall x > 1)$

$f(x) = x - \log x - 1$.

$(f(1) = 0.)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$, $\forall x \in (1,+\infty)$

$\Longrightarrow f \uparrow$ και τελικά ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. διότι $f(x) > \underline{f(1) = 0}$.