Γραμμικές εξισώσεις διαφορών $1^{ης}$ τάξης

27/2/2024

Εξετάζουμε την εξίσωση διαφορών (με $A \neq 0$)

$$y_{k+1} = A y_k + B \quad , k \in \mathbb{N}_0.$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση γιά $k = 0, 1, 2, \ldots$

$k=0$: $\quad y_1 = A y_0 + B$

$k=1$: $\quad y_2 = A y_1 + B = A(Ay_0 + B) + B = A^2 y_0 + AB + B.$

$k=2$: $\quad y_3 = A y_2 + B = A(A^2 y_0 + AB + B) + B$

$$= A^3 y_0 + A^2 B + AB + B.$$

Επαγωγικά:

$$y_k = A^k y_0 + A^{k-1} B + A^{k-2} B + \cdots + B$$

$$= A^k y_0 + B(1 + A + \cdots + A^{k-1}).$$

Έχουμε: $\quad 1 + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1-A^k}{1-A} & A \neq 1. \\ k & A = 1. \end{cases}$

Άρα $\quad y_k = \begin{cases} A^k y_0 + \dfrac{1-A^k}{1-A} B & (A \neq 1) \\ \cancel{= A^k y_0 + kB} & \\ = y_0 + kB & (A = 1). \end{cases}$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η εξίσωση $y_{k+1} = 2 y_k + 1 \quad , k \in \mathbb{N}_0$

Θέτοντας $A = 2$, $B = 1$: $\quad y_k = 2^k y_0 + \dfrac{1-2^k}{1-2} \cdot 1$

$$\Rightarrow y_k = 2^k y_0 + (2^k - 1) = (y_0 + 1) 2^k - 1.$$

Αν $y_0 = -1 \Rightarrow y_k = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ (σ.ι).

$y_0 \neq -1 \Rightarrow \lim y_k = +\infty$ αν $y_0 > -1$
$= -\infty$ αν $y_0 < -1$ }.

Παράδειγμα: Εστω η εξίσωση $y_{k+1} = 0.5 y_k + 2$. Εδώ $A = 0.5$, $B = 2$ και

$$y_k = 0.5^k y_0 + \frac{1-0.5^k}{1-0.5} 2 = 0.5^k y_0 + 4(1-0.5^k).$$

$$= (y_0 - 4)\, 0.5^k + 4$$

Αν $y_0 = 4 \Rightarrow y_k = 4 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ (σ.ι)

$y_0 \neq 4 \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} y_k = 4$

Παράδειγμα: $y_{k+1} = -y_k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. $(A = -1, B = 1)$

$$y_k = (-1)^k y_0 + \frac{1-(-1)^k}{1-(-1)} = (-1)^k y_0 + (1/2)(1-(-1)^k).$$

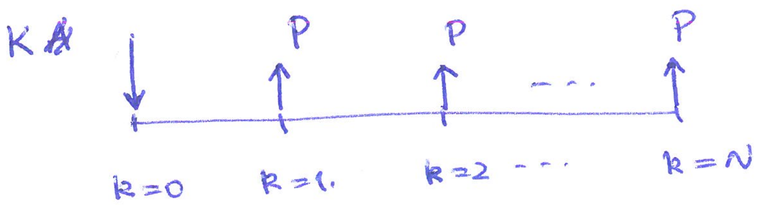
$$\Rightarrow y_k = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)(-1)^k + \frac{1}{2}$$

Αν $y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_k = \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ (σ.ι).

$y_0 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ $(k = 2n)$: $y_k = y_0$
$(k = 2n+1)$: $y_k = 1 - y_0$ }.

Δηλ η λύση ταλαντεύεται (με σταθερό πλάτος) μεταξύ των τιμών y_0 και $1 - y_0$.

Παράδειγμα: Αν κάποιος πάρει δάνειο K ~~A~~ με επιτόκιο ε την περίοδο που πρέπει να εξοφληθεί σε N ισόποσες δόσεις, πόση είναι η δόση ανά περίοδο;



Αν y_k το ποσό που απομένει μετά από k περιόδους

$$y_{k+1} = y_k + \varepsilon y_k - P \qquad k=0,1,2,\dots$$

Συνοριακές συνθήκες $y_0 = K$, $y_N = 0$. Επομένως

$$y_{k+1} = \underbrace{(1+\varepsilon)}_{A} y_k \underbrace{-P}_{B}$$

$$\Rightarrow y_k = A^k y_0 + \frac{1-A^k}{1-A} B =$$

$$= (1+\varepsilon)^k K - \frac{1-(1+\varepsilon)^k}{1-(1+\varepsilon)} P$$

$$= (1+\varepsilon)^k K + \frac{P}{\varepsilon}\left[1-(1+\varepsilon)^k\right].$$

$k = N \Rightarrow y_k = 0$:

$$0 = (1+\varepsilon)^N K + \frac{P}{\varepsilon}\left[1-(1+\varepsilon)^N\right].$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\varepsilon}\left[(1+\varepsilon)^N - 1\right] = K(1+\varepsilon)^N \Rightarrow P = \frac{K\varepsilon(1+\varepsilon)^N}{(1+\varepsilon)^N - 1}.$$

$$\Rightarrow P = \frac{K\varepsilon}{1-(1+\varepsilon)^{-N}}.$$

Σημεία Ισορροπίας / Ευστάθεια

Έστω η εξίσωση διαφορών : $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Ορισμός : Το σημείο α είναι σημείο ισορροπίας αν είναι σταθερό σημείο της f, δηλ. $\alpha = f(\alpha)$.

(Ισοδύναμα αν $y_0 = \alpha \Rightarrow y_k = \alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$).

Παράδειγμα : Έστω $y_{k+1} = A y_k + B$, $A, B \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Αν α είναι σημείο ισορροπίας, τότε

$$\alpha = A\alpha + B \Leftrightarrow (1-A)\alpha = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{B}{1-A} \quad , A \neq 1$$

δηλ $\alpha = B/(1-A)$ είναι το μοναδικό σ.ι.

Όταν $A=1$ η εξίσωση δεν έχει σ.ι. (εκτός αν $B=0$)

οπότε κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι σ.ι.

Παράδειγμα : Έστω : $y_{k+1} = (y_k + 4) y_k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Τα σ.ι. είναι οι λύσεις της εξίσωσης :

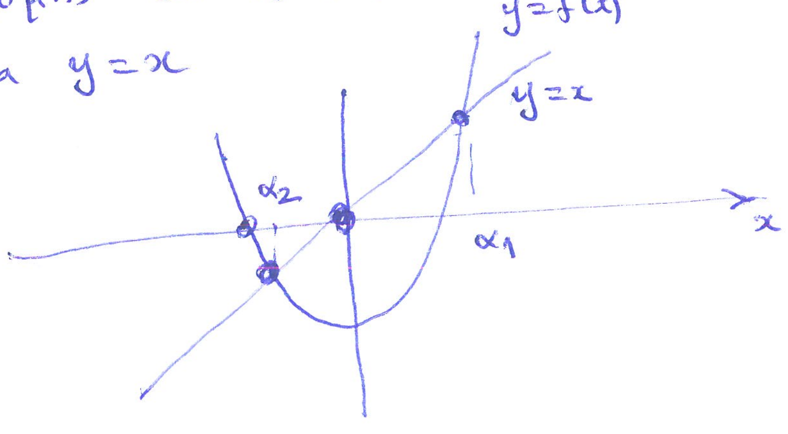
$$\alpha = (\alpha+4)\alpha + 2 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha+1)(\alpha+2) = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \text{ ή } \alpha = -2$$

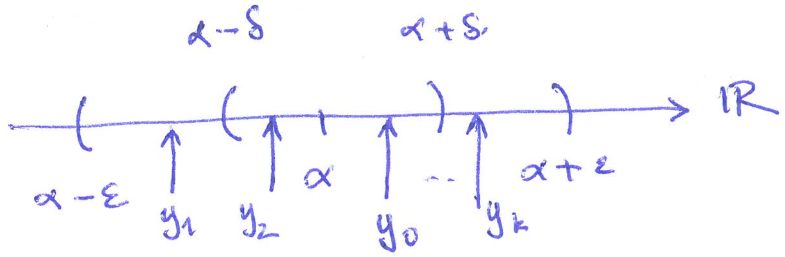
Άρα υπάρχουν δύο σταθερές λύσεις της εξίσωσης,

$y_k = -1$ και $y_k = -2$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Παρατήρηση : Γεωμετρικά τα σ.ι. είναι τα σημεία τομής του γραφήματος της $y = f(x)$ με την ευθεία $y = x$



<u>Ορισμός:</u> Το σ.ι. α είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.



Το α είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν μπορούμε να περιορίσουμε την ακολουθία y_k σε διάστημα κέντρου α και αυθαίρετης ακτίνας $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρής) περιορίζοντας την αρχική τιμή y_0 σε κατάλληλο διάστημα κέντρου α και ακτίνας $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

<u>Ορισμός:</u> Αν ένα σ.ι. α δεν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov), τότε λέγεται ασταθές σ.ι.

<u>Ορισμός:</u> Το σ.ι. α είναι ελκυστής (σημείο έλξης) αν υπάρχει $\eta > 0 : |y_0 - \alpha| < \eta \Rightarrow \lim_{k \to \infty} y_k = \alpha$. Αν $\eta = \infty$, τότε το α είναι ολικός ελκυστής (ολικό σημείο έλξης).

<u>Ορισμός:</u> Το σ.ι. α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ~~ασταθές~~ ευσταθές κατά Lyapunov <u>και</u> σημείο έλξης. Αν $\eta = \infty$ (στον ορισμό του σημείου έλξης) τότε το α είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα: Το σ.ι. $\alpha = \frac{B}{1-A}$ της εξίσωσης διαφορών

$$y_{k+1} = A y_k + B \quad , A \neq 1, k \in \mathbb{N}_0$$

είναι ολικά ασ. ευσταθές αν $|A|<1$ και έχουμε $\lim_{k\to\infty} y_k = \alpha$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}$. Αν $|A|>1$ το α είναι ασταθές και $\lim_{k\to\infty} |y_k| = \infty$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}, y \neq \alpha$. Τέλος αν $A=-1$, τότε $y_0 = y_2 = y_4 = \cdots$ και $y_1 = y_3 = y_5$ και το α είναι ευσταθές κατά Lyapunov.

Απόδειξη: Αν $A \neq 1$ η λύση της εξίσωσης είναι

$$y_k = A^k y_0 + \frac{1-A^k}{1-A} B = A^k\left(y_0 - \frac{B}{1-A}\right) + \frac{B}{1-A}$$

$$\Rightarrow y_k = (y_0 - \alpha) A^k + \alpha.$$

Συνεπώς $y_k - \alpha = (y_0-\alpha)A^k \Rightarrow |y_k - \alpha| = |A|^k |y_0 - \alpha|$

Εστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varepsilon$. Αν $|A|<1$ τότε $|y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |y_k - \alpha| = |A|^k |y_0 - \alpha| \leq |y_0 - \alpha| < \delta = \varepsilon$ και το α είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Επίσης

$$|A|<1 \Rightarrow y_k \to \alpha \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

και το α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι.

Αν $|A|>1$ το α είναι ασταθές σ.ι. Γιατί, αν ήταν ευσταθές κατά Lyapunov, τότε για $\varepsilon=1$ θα υπήρχε $\delta>0$ τ.ω. $\forall y_0 : |y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$

Επομένως, και για το $y_0 = \alpha + \frac{\delta}{2}$ θα είχαμε $|y_k - \alpha| < 1$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Όμως,

$$|y_k-\alpha| = |A|^k\,|y_0-\alpha| = |A|^k \frac{\delta}{2} < 1 \qquad \forall k\in\mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow |A|^k < \frac{2}{\delta} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Που είναι αδύνατον καθώς $|A|^k \to \infty$ καθώς ~~$k\to\infty$~~. $|A|>1$.

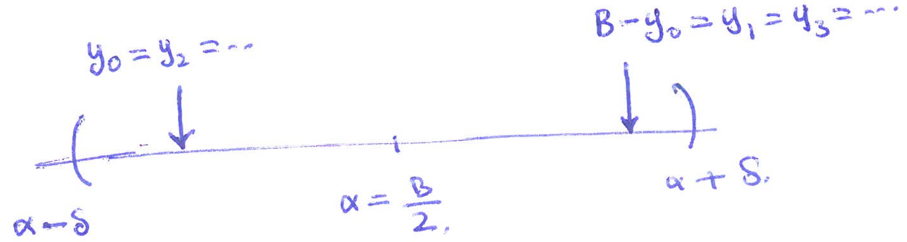
Άρα α είναι ασταθές σ.ι.

Τέλος στην περίπτωση $A=-1$, το σ.ι. α, είναι

$$\alpha = -\alpha + B \Rightarrow \alpha = \frac{B}{2}$$

Επίσης: $y_{k+2} = -y_{k+1} + B = -(-y_k+B)+B. = y_k$

Δηλ. $y_0 = y_2 = \cdots = y_{2k}$ και $y_1 = y_3 = \cdots y_{2k+1} = -y_0 + B.$



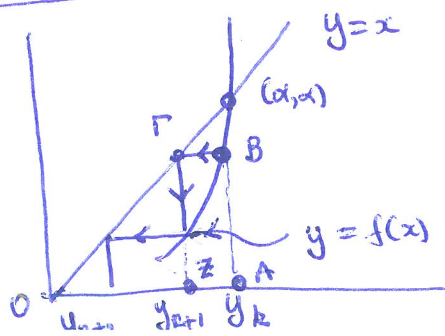
Έστω $\varepsilon>0$ και $\delta=\varepsilon$. Τότε

$$|y_0-\alpha|<\delta \Leftrightarrow |y_0-\alpha|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y_{2k}-\alpha|<\varepsilon & \forall k\in\mathbb{N}_0 \\ |y_{2k+1}-\alpha|<\varepsilon & \forall k\in\mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Επομένως $|y_k-\alpha|<\varepsilon$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$ και το σύστημα είναι ευσταθές κατά Lyapunov.

Γεωμετρική-γραφική μέθοδος χαρακτηρισμού σ.ι.



$y_{k+1} = f(y_k) = (AB) = (ΓZ) = OZ$

Η ακολουθία συγκλίνει στο (α,α) ή αποκλίνει και το α είναι ευσταθές ή ασταθές, αντίστοιχα.

Θεώρημα: Έστω α σ.ι. της $y_{k+1}=f(y_k)$, $k\in\mathbb{N}_0$ και έστω ότι η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο α. Τότε

(i) $|f'(\alpha)|<1 \Rightarrow$ Το α είναι ασ. ευσταθές σ.ι.

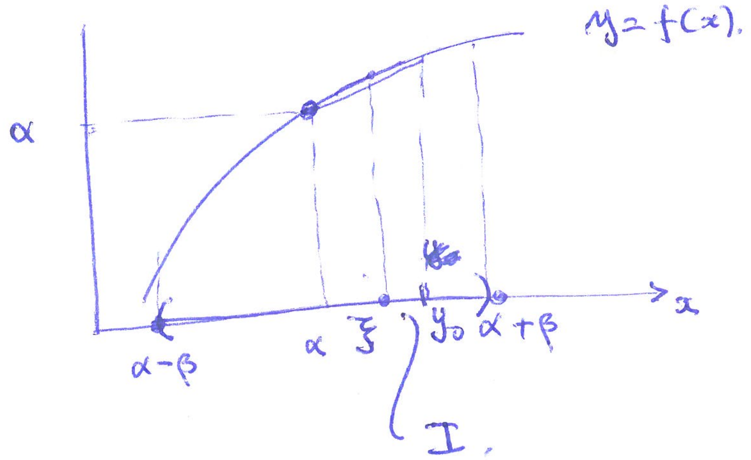
(ii) $|f'(\alpha)|>1 \Rightarrow$ Το α " ασταθές σ.ι.

12/3/24

Απόδειξη:

(i) Έστω ότι $|f'(\alpha)|<M<1$. Λόγω συνέχειας της f' υπάρχει διάστημα $I=(\alpha-\beta,\alpha+\beta)$ τ.ω

$$|f'(y)|\le M<1 \qquad \forall y\in I.$$



Αν $y_0\in I$, $y_0>\alpha$, τότε $\exists\, \xi\in(\alpha,y_0)$:

$$f(y_0)-f(\alpha)=f'(\xi)(y_0-\alpha)$$

(από το Θεώρημα Μέσης Τιμής). Παρόμοια, αν $y_0\in I$, $y_0<\alpha$, τότε $\exists\,\xi\in(y_0,\alpha)$ με την ίδια ιδιότητα. Σε κάθε περίπτωση: $\exists\,\xi\in I: f(y_0)-f(\alpha)=f'(\xi)(y_0-\alpha)$ και επομένως:

$$|\underbrace{f(y_0)}_{y_1}-\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}|=\underbrace{|f'(\xi)|}_{\le M}\cdot|y_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow |y_1-\alpha|\le M|y_0-\alpha|<|y_0-\alpha|$$

και επομένως $y_1\in I$. Επαγωγικά,

$$|y_k-\alpha| \leq \underbrace{M^k \overbrace{|y_0-\alpha|}^{\leq \delta}}_{\leq \varepsilon} \qquad \forall k\in \mathbb{N}_0.$$

Δοθέντος $\varepsilon>0$, θέτουμε $\delta=\varepsilon$. Τότε αν $|y_0-\alpha|<\delta$,

$$|y_k-\alpha| \leq M^k|y_0-\alpha| < M^k\delta = M^k\varepsilon < \varepsilon \quad (k\geq 1)$$
$$= \varepsilon \quad (k=0)$$

~~και $|y_k-\alpha| \geq \varepsilon$~~

Επομένως, $|y_k-\alpha|<\varepsilon$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$ και το σ.ι. α είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Επιπλέον $\forall y_0\in I$

$$|y_k-\alpha| \leq M^k|y_0-\alpha| \to 0 \quad \text{καθώς } k\to\infty$$

και το α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(ii) Υποθέτουμε ότι $|f'(\alpha)|>1$. Θα δείξουμε ότι το α είναι ασταθές σ.ι. Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists \varepsilon>0$: $\forall y_0$ με $|y_0-\alpha|<\varepsilon$, $y_0\neq\alpha$, $\exists k\in\mathbb{N}$:

$|y_k-\alpha|\geq\varepsilon$.

Αν $|f'(\alpha)|>1$, τότε λόγω συνέχειας της f', $\exists$ διάστημα $I_\varepsilon=(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ και σταθερά $M>1$ τ.ω. $|f'(y)|\geq M>1$ $\forall y\in I_\varepsilon$. Θα δείξουμε ότι $\forall y_0\in I_\varepsilon$, $y_0\neq\alpha$, $\exists k\in\mathbb{N}$ για το οποίο $y_k\notin I_\varepsilon$.

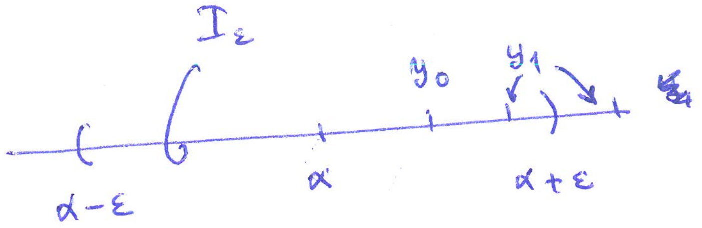
Έστω $y_0\in I_\varepsilon$, $y_0\neq\alpha$. Από το ΘΜΤ:

$$|f(y_0)-f(\alpha)| = |f'(\xi)|\cdot|y_0-\alpha|$$

για κάποιο $\xi\in(\alpha,y_0)$ ή $\xi\in(y_0,\alpha)$. Επομένως

$$|y_1-\alpha| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\geq M} \cdot |y_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad |y_1-\alpha| \geq M\,|y_0-\alpha| > |y_0-\alpha|$$



Αν $y_1 \notin I_\varepsilon$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε την διαδικασία και έχουμε

$$|y_2-\alpha| \geq M\,|y_1-\alpha| \geq M^2\,|y_0-\alpha|$$

Εφόσον $M>1$, $M^i \to \infty$ καθώς $i \to \infty$ και είναι προφανές ότι μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων (έστω k) θα έχουμε $y_i \in I_\varepsilon$, $i=0,1,\dots,k-1$ και $y_k \notin I_\varepsilon$ $\square$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η μή-γραμμική εξίσωση $y_{k+1} = 1.5\,y_k - 0.5\,y_k^2$. Θέτουμε $y=f(x) = 1.5x-0.5x^2$

Η λύση της $x=f(x)$ είναι:

$$x = 1.5x - 0.5x^2 \Rightarrow 0.5x - 0.5x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 0.5x(1-x) = 0 \Rightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=1}$$

Επομένως $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Επίσης $f'(x) = 1.5 - x$ και $f'(\alpha_1) = f'(0) = 1.5$ και $f'(\alpha_2) = f'(1) = 0.5$

Άρα $\alpha_1 = 0$ ασταθές σ.ι. και $\alpha_2 = 1$ ασ. ευσταθές σ.ι.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η εξίσωση διαφορών

$$y_{k+1} = \frac{a\,y_k}{b+y_k} \qquad a>b>0$$

Σημεία ισορροπίας:

$$f(x)=x \iff \frac{ax}{b+x}=x \iff bx+x^2=ax$$

$$\iff x^2+(b-a)x=0 \Rightarrow x_1=0\,,\ x_2=a-b$$

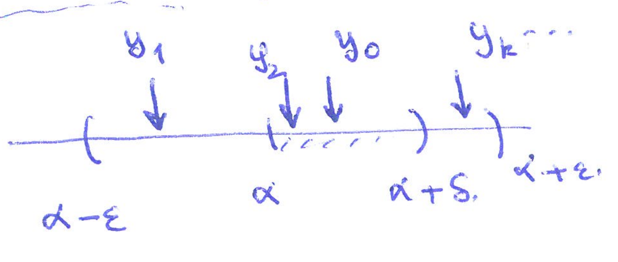
$$f'(x)=\frac{a(b+\cancel{x})-a\cancel{x}}{(b+x)^2}=\frac{ab}{(b+x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x_1)=f'(0)=\frac{ab}{b^2}=\frac{a}{b}>1 \Rightarrow x_1=0 \text{ ασταθές σ.ι.}$$

$$f'(x_2)=f'(a-b)=\frac{ab}{a^2}=\frac{b}{a}<1 \Rightarrow x_2=a-b \text{ ασ. ευσταθές}$$

Στην συνέχεια αναλύουμε την περίπτωση $f'(\alpha)=1$.

<u>Ορισμός:</u> Το σ.ι. α της εξίσωσης $y_{k+1}=f(y_k)$, $k\in\mathbb{N}_0$ λέγεται <u>άνω ημιευσταθές</u> αν $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$ τ.ω. $y_0\in(\alpha,\alpha+\delta)\Rightarrow |y_k-\alpha|<\varepsilon\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0$. Αν επιπλέον $\exists \eta>0$ τ.ω. $y_0\in(\alpha,\alpha+\eta)\Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_k=\alpha$, τότε το α είναι <u>ασυμπτωτικά</u> άνω ημιευσταθές



Παρόμοια ορίζουμε "κάτω ημιευστάθεια":

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : y_0 \in (\alpha-\delta, \alpha) \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

και ασυμπτωτική κάτω ημιευστάθεια.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω α σ.ι. της $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, δηλ. $\alpha = f(\alpha)$. Τότε

(i) Έστω $f \in C^{2k}(\mathbb{R})$. Αν $\underbrace{f'(\alpha) = 1 \text{ και } f''(\alpha) = \cdots = f^{(2k-1)}}_{\text{άρτιος}}(\alpha) = 0$ και $f^{2k}(\alpha) \neq 0$, τότε το α είναι

- Ασυμπτωτικά κάτω ημιευσταθές αν $f^{2k}(\alpha) > 0$
- " άνω " αν $f^{2k}(\alpha) < 0$

(ii) Έστω $f \in C^{2k+1}(\mathbb{R})$. Αν $f'(\alpha) = 1$ και $\underbrace{f''(\alpha) = \cdots = f^{(2k)}(\alpha)}_{\text{περιττός}} = 0$ και $f^{(2k+1)}(\alpha) \neq 0$, τότε το α είναι

- Ασυμπτωτικά ευσταθές αν $f^{(2k+1)}(\alpha) < 0$
- Ασταθές αν $f^{(2k+1)}(\alpha) > 0$.

"<u>Απόδειξη</u>": (i) Έστω ότι $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) = \cdots = f^{(2k-1)}(\alpha) = 0$ και $f^{(2k)}(\alpha) > 0$. Από το Θεώρημα Taylor για $\delta > 0$ ~~"αρκετά μικρό"~~

$$f(\alpha+\delta) = \underbrace{f(\alpha)}_{\alpha} + \underbrace{f'(\alpha)}_{1}\delta + \cancel{\frac{f''(\alpha)\delta^2}{2!}}^{0} + \cdots \cancel{\frac{f^{2k-1}(\alpha)\delta^{2k-1}}{(2k-1)!}}^{0} + \frac{f^{2k}(\xi)\delta^{2k}}{(2k)!}$$

όπου $\xi \in (\alpha, \alpha+\delta)$. Αν επιλέξουμε το δ "αρκούντως μικρό" τότε λόγω συνέχειας της $f^{(2k)}$ έχουμε ότι $f^{(2k)}(\xi) > 0$ και:

$$f(\alpha+\delta) = \alpha + \delta + \underbrace{\frac{f^{(2k)}(\xi)\,\delta^{2k}}{(2k)!}}_{>0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f(\alpha+\delta) > \alpha+\delta.}$$

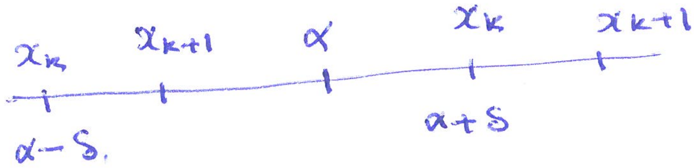
Παρόμοια, γιά κάποιο $\xi \in (\alpha-\delta, \alpha)$ και $\delta > 0$ αρκούντως μικρό:

$$f(\alpha-\delta) = \alpha - \delta + \underbrace{\frac{f^{(2k)}(\xi)\,\delta^{2k}}{(2k)!}}_{>0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\alpha-\delta < f(\alpha-\delta) < \alpha}$$

Άρα: $x_k = \alpha+\delta > \alpha \Rightarrow x_{k+1} > x_k$

$x_k = \alpha-\delta < \alpha \Rightarrow \alpha-\delta < x_{k+1} < \alpha.$



Παρόμοια γιά (i)β και (ii). $\square$

<u>Πόρισμα</u>: (i) Έστω ($f \in C^2(\mathbb{R})$) $\alpha = f(\alpha)$, $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) > 0$. Τότε το α είναι κάτω ημιευσταθές

(ii) Έστω $\alpha = f(\alpha)$, $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) < 0$. Τότε το α είναι άνω ημιευσταθές

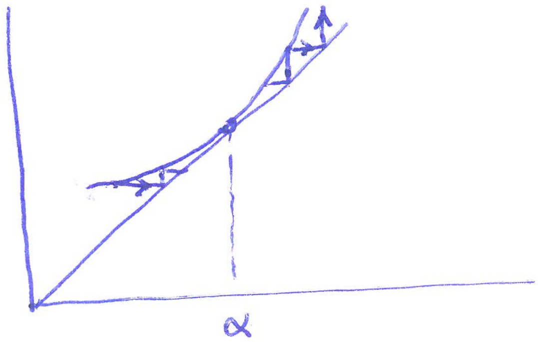
(iii) Έστω $f \in C^3(\mathbb{R})$, $f'(\alpha)=1$, $f''(\alpha)=0$, $f'''(\alpha)<0$

Τότε το α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

(iv) Έστω $f \in C^3(\mathbb{R})$, $f'(\alpha)=1$, $f''(\alpha)=0$, $f'''(\alpha)>0$

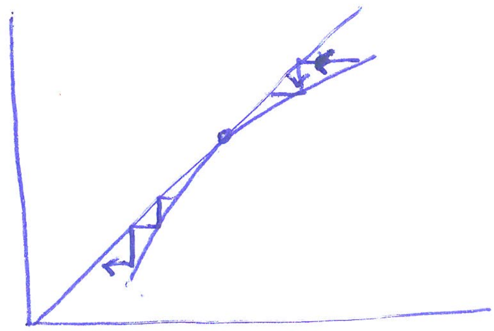
Τότε το α είναι ασταθές.

(i) $\alpha = \underline{f(\alpha) \overset{f'(\alpha)=1}{,} f''(\alpha) > 0}$ (Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω).



Κάτω ημιευσταθές

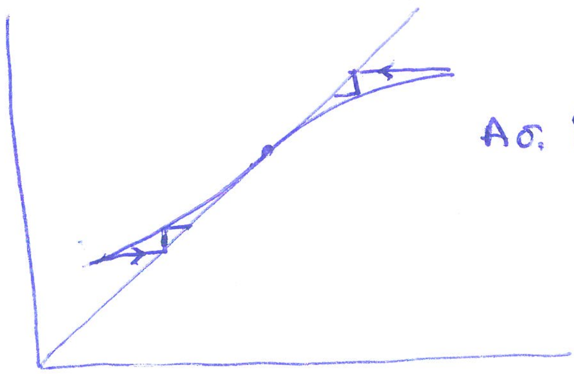
(ii) $\alpha = \underline{f(\alpha) \overset{f'(\alpha)=1}{,} f''(\alpha) < 0}$ (Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω).



Άνω ημιευσταθές

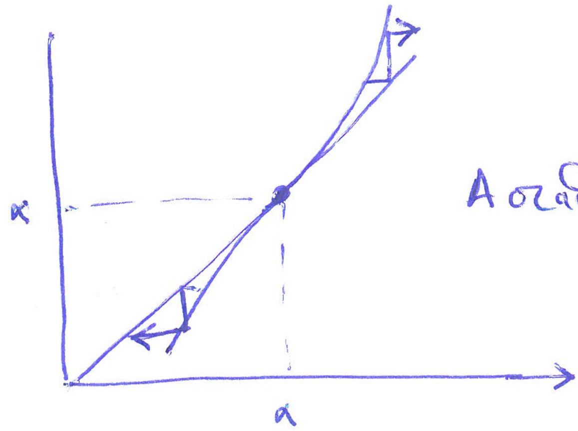
(iii).

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=f(\alpha) \\ f'(\alpha)=1 \\ f''(\alpha)=0 \\ f'''(\alpha)<0 \end{array}\right\}$$



Ασ. Ευσταθές

(iv) $\left.\begin{array}{l} f(\alpha)=\alpha \\ f'(\alpha)=1 \\ f''(\alpha)=0 \\ f'''(\alpha)>0 \end{array}\right\}$



Ασταθές

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η ε.δ. $y_{k+1} = y_k - y_k^3$.

Έχουμε $f(x) = x - x^3$ και λύνοντας την εξίσωση $x = f(x) \Rightarrow x - x^3 = x \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ (μοναδικό σ.ι.). Επίσης:

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -6x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -6 < 0$$

και άρα σ.ι. $\alpha = 0$ είναι ασταθές

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η εξίσωση διαφορών $y_{k+1} = y_k^4 - 2y_k^3 + 3y_k - 1$. Έχουμε

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 1$$

και σημεία ισορροπίας είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$x = f(x) \Rightarrow x^4 - 2x^3 + 3x - 1 = x$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) - 2x(x^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(x^2+1-2x) = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-1)^3 = 0$$

Επομένως έχουμε γιά την συνάρτηση g :

$$g(\alpha)=\alpha \;,\; g'(\alpha)=1 \;,\; g''(\alpha)=0 \;,\; g'''(\alpha)=2Sf(\alpha)$$

Από το προηγούμενο θεώρημα (η πόρισμα)

$Sf(\alpha)<0 \Rightarrow \alpha$ ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι

$Sf(\alpha)>0 \Rightarrow \alpha$ ασταθές σ.ι,

(για την g και άρα και γιά την f). $\square$

Παράδειγμα : Έστω η ε.δ. $y_{k+1}=y_k^2+3y_k \;,\; k\in\mathbb{N}$

Τα σημεία ισορροπίας λύσεις της $f(x)=x$, $f(x)=x^2+3x$, δηλ

$$x^2+3x=x \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow \underline{x=0} \text{ η } \underline{x=-2}$$

$$f'(x)=2x+3 \Rightarrow f'(0)=3 \Rightarrow x=0 \text{ ασταθές σ.ι.}$$

$$f'(-2)=-4+3=-1$$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα με

$f''(x)=2 \;,\; f'''(x)=0$ έχουμε

$$-2f'''(-2)-3\left[f''(-2)\right]^2=0-3\cdot 2^2=-12<0$$

και συνεπώς το $x=-2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Επίσης:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3 \Rightarrow f'(-1) = -4-6+3 = -7$$

$\Rightarrow \alpha = -1$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Επίσης

$$f'(1) = 4-6+3 = 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - \cancel{6}\,12 \Rightarrow f''(1) = \cancel{12-6=}\ 12-12 = 0$$

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(1) = 24 > 0.$$

και επομένως σ.ι. $\alpha = 1$ είναι επίσης ασταθές.

Παράδειγμα: Έστω $y_{k+1} = y_k^2 + 5y_k + 4$

Έχουμε: $f(x) = x^2 + 5x + 4$ και

$$x = f(x) \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = x \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$$ μοναδικό σ.ι.

Επίσης:

$$f'(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'(-2) = -4+5 = 1.$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

και $\alpha = -2$ είναι ασ. κάτω ημιασταθές.

Θεώρημα: Έστω α σ.ι. της $y_{k+1} = f(y_k)$ και $f'(\alpha) = -1$.

Έστω ότι: $Sf(x) = \dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2$ (παράγωγος Schwartz). ~~Έστω επίσης~~ Τότε:

(i) $Sf(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha$ ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι.

(ii) $Sf(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha$ ασταθές σ.ι.

Απόδειξη: Έστω $g = f\circ f := f^2$ και έστω η εξίσωση διαφορών $y_{k+1} = g(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε ισχύουν

- $\alpha = f(\alpha) \Rightarrow \alpha = g(\alpha)$ $\left(g(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha\right)$.

- α ασ. ευσταθές σ.ι. γιά την $y_{k+1} = g(y_k) = f(f(y_k))$

$\Rightarrow \alpha$ " " " " $y_{k+1} = f(y_k)$ (άσκηση!)

Έχουμε: $Sf(\alpha) = \dfrac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]^2$

$$\Rightarrow \quad Sf(\alpha) = -f'''(\alpha) - \frac{3}{2}\left[f''(\alpha)\right]^2$$

Επίσης:

$$g'(x) = \left[f(f(x))\right]' = f'(x)\, f'(f(x))$$

$$\Rightarrow g'(\alpha) = f'(\alpha)\, f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}) = \left[f'(\alpha)\right]^2 = (-1)^2 = 1$$

Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο πόρισμα γιά την συνάρτηση g.

Έχουμε:

$$g''(x) = \left[f'(x)\, f'(f(x)) \right]' =$$

$$= f''(x)\, f'(f(x)) + f'(x)\, f'(x)\, f''(f(x))$$

$$\Rightarrow g''(\alpha) = f''(\alpha)\, \underbrace{f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})}_{-1} + \underbrace{\left[f'(\alpha)\right]^2}_{(-1)^2} f''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow g''(\alpha) = -f''(\alpha) + f''(\alpha) = 0$$

Επίσης:

$$g'''(x) = \left[f''(x)\, f'(f(x)) + [f'(x)]^2 f''(f(x)) \right]'$$

$$= f'''(x)\, f'(f(x)) + f''(x)\, f'(x)\, f''(f(x)) +$$

$$+ 2 f'(x)\, f''(x)\, f''(f(x)) +$$

$$+ [f'(x)]^2\, f'(x)\, f'''(f(x))$$

$$\Rightarrow g'''(\alpha) = f'''(\alpha)\, \underbrace{f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})}_{-1} + f''(\alpha)\, \underbrace{f'(\alpha)}_{-1}\, f''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})$$

$$+ 2 \underbrace{f'(\alpha)}_{-1}\, f''(\alpha)\, f''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}) + \underbrace{\left[f'(\alpha)\right]^2}_{(-1)^2} \underbrace{f'(\alpha)}_{-1}\, f'''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}).$$

$$\Rightarrow g'''(\alpha) = -f'''(\alpha) - (f''(\alpha))^2 - 2(f''(\alpha))^2 - f'''(\alpha)$$

$$\Rightarrow g'''(\alpha) = -2 f'''(\alpha) - 3(f''(\alpha))^2 = 2\, S f(\alpha)$$

Μετασχηματισμός Z

Αν $(y_k) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε

$$\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots \qquad (*)$$

(μονόπλευρος μετασχηματισμός Z).

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού είναι το σύνολο των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $(*)$ συγκλίνει. Συνήθως χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκλισης λόγου:

<u>Πρόταση</u>: Έστω ότι $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \right|$. Τότε η συνάρτηση $\hat{y}(z)$ έχει περιοχή σύγκλισης που περιέχει το $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.

<u>Απόδειξη</u>: Από το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει αν (για $z \neq 0$):

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{y_{k+1} z^{-(k+1)}}{y_k z^{-k}} \right| < 1 \iff \frac{1}{|z|} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \right| < 1$$

$$\iff \frac{R}{|z|} < 1 \iff |z| > R$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω (y_k) εκθετικά φραγμένη (δηλ. έστω ότι $\exists\, \alpha > 0, M > 0 : |y_k| \leq M \alpha^k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$). Τότε η $\hat{y}(z)$ είναι καλά ορισμένη και έχει περιοχή σύγκλισης που περιέχει το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \alpha\}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι $|y_k| \leq M \alpha^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε για κάθε $z : |z| > \alpha$,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|y_k|}{|z|^k} \le M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{|z|^k}$$

Έστω $\beta = \dfrac{\alpha}{|z|} < 1$. Τότε

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}\right| \le M\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{M}{1-\beta} < \infty$$

<u>Μετασχηματισμός Z τυπικών ακολουθιών</u>

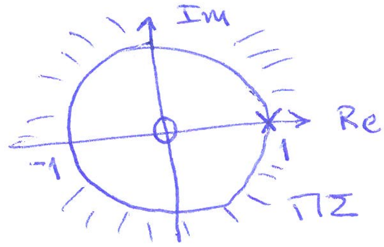
(1) $\left.\begin{aligned}\delta_k &= 1, \quad k=0\\ &=0, \quad k\neq 0\end{aligned}\right\}$ Συνάρτηση "κρούσης"

$\mathcal{Z}\{\delta_k\} = 1$, περιοχή σύγκλισης $= \mathbb{C}$

(2) $u_k = 1$, $k \geq 0$ (Βηματική συνάρτηση)

$$\mathcal{Z}\{u_k\} = \hat{u}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Περιοχή σύγκλισης $|z^{-1}| < 1 \iff |z| > 1$. Η συνάρτηση $\hat{u}(z)$ έχει πόλο πολλαπλότητας 1 στό $z=1$ και μηδενικό πολλαπλότητας 1 στό $z=0$.



(3) $y_k = k$ $(k \geq 0)$.

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots = z^{-1}(1 + 2z^{-1} + \dots)$$

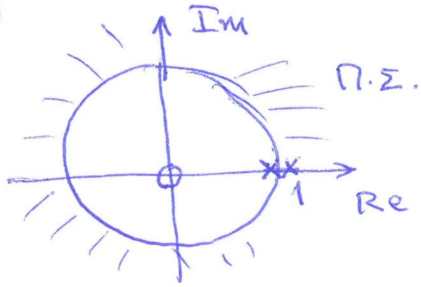
Έστω $S(x) = x + x^2 + x^3 + \dots = \dfrac{x}{1-x}$, $|x| < 1$.

Στήν περιοχή σύγκλισης η δυναμοσειρά παραγωγίζεται κατά όρο και,

$$S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Επομένως, $\hat{y}(z) = \dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$, $|z|>1$

Παρατηρούμε ότι η $\hat{y}(z)$ έχει

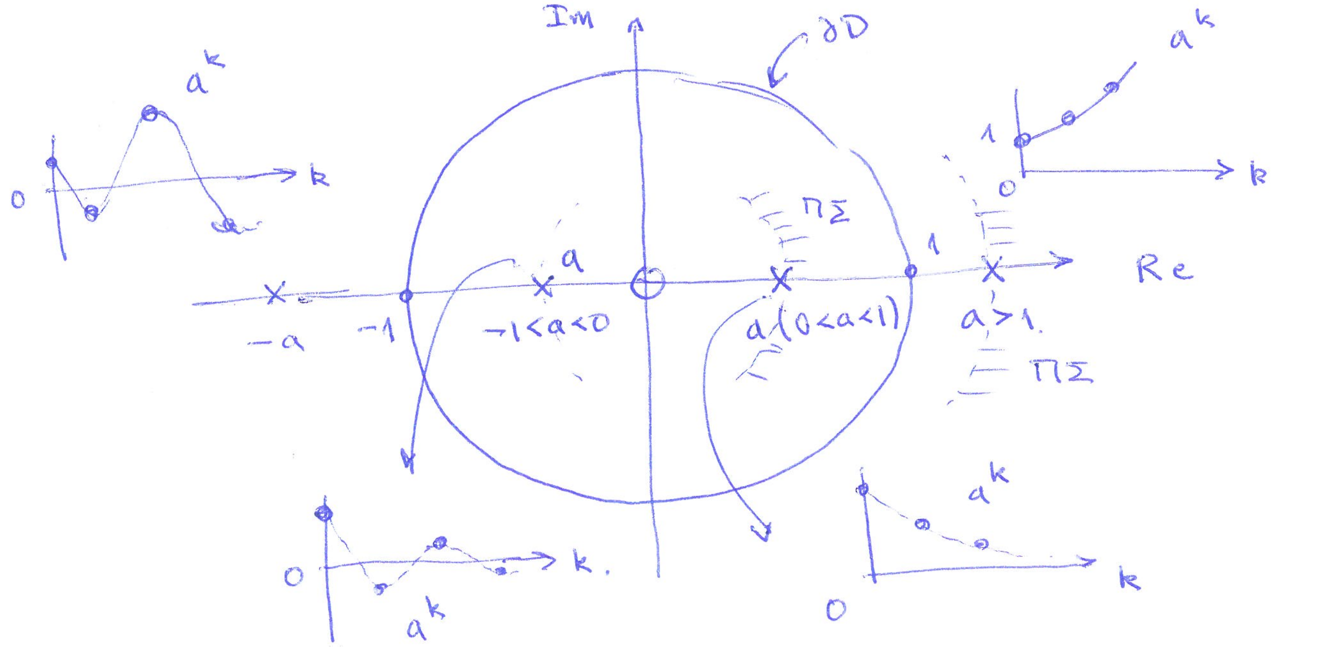


(4) $y_k = a^k$ $(k \geq 0)$ Εκθετική συνάρτηση $(a \in \mathbb{R})$

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a z^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

και περιοχή σύγκλισης $= \{ z \in \mathbb{C} : |az^{-1}| < 1 \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} : |z| > |a| \}$.



Παρατηρούμε ότι $\hat{y}(z)$ έχει πόλο στο σημείο $z=a$ και μηδενικό στο σημείο $z=0$. Αν $|a|<1$ (ο πόλος είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$) τότε ~~z_k~~ $y_k \to 0$ καθώς $k\to\infty$. Αν $|a|>1$, τότε $|y_k|\to\infty$ καθώς $k\to\infty$, αν $a=1$ τότε έχουμε σταθερή συνάρτηση (περίπτωση 2) και αν $a=-1$ τότε η (y_k) ταλαντώνεται χωρίς απόσβεση μεταξύ των σημείων 1 και −1. Στην $1^η$ περίπτωση $\partial D = \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\} \subseteq$ Π.Σ. Στις άλλες τρεις περιπτώσεις $\partial D \cap$ Π.Σ. $= \phi$.

(5) $y_k = \rho^k \cos(k\theta) = \frac{1}{2}\rho^k\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right),\ k\in\mathbb{N}_0.$

Λόγω γραμμικότητας του μετασχηματισμού (ιδιότητα I_1),

$$\hat{y}(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho e^{i\theta}z^{-1}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho e^{-i\theta}z^{-1}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}z^{-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\rho e^{-i\theta}z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho e^{-i\theta}z^{-1}+1-\rho e^{i\theta}z^{-1}}{1-\rho\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$$

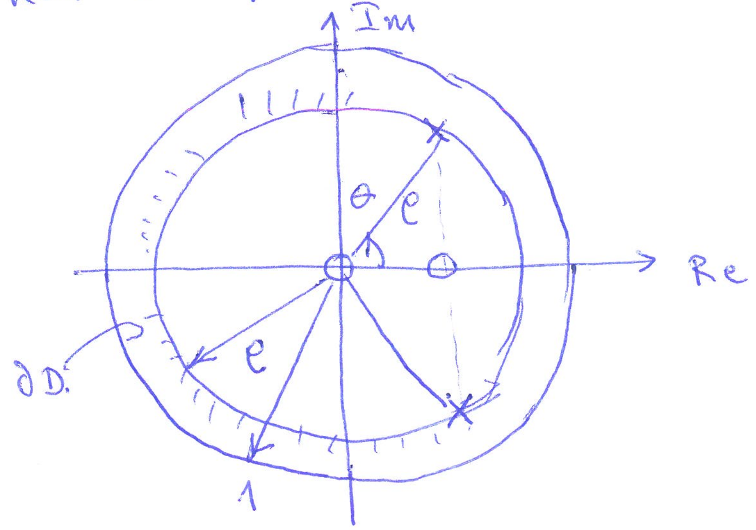
$$= \frac{1}{2}\,\frac{2-\rho\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2-2\rho\cos\theta\, z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta\, z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{1-\rho\cos\theta\, z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta\, z^{-1}+\rho^2 z^{-2}} = \frac{z(z-\rho\cos\theta)}{z^2-2\rho\cos\theta\, z+\rho^2}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Pi.\Sigma. = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > \rho \}$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μιγαδικούς συζυγείς πόλους $z = \rho e^{\pm i\theta}$ και δύο μηδενικά ($z=0$ και $z = \rho\cos\theta$).



Αν $\rho = 1$ οι δύο πόλοι $\in \partial D$. Αν $\rho < 1$, τότε $y_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$ και αν $\rho > 1$, $|y_k| \to \infty$ καθώς $k \to \infty$. Όταν $\rho = 1$ η ακολουθία y_k ταλαντώνεται χωρίς απόσβεση. Παρόμοια,

$$\mathcal{Z}\{ \rho^k \sin(k\theta) \} = \frac{\rho \, \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\theta \, z}{z^2 - 2\rho\cos\theta \cdot z + \rho^2}$$

με $\Pi.\Sigma. = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > \rho \}$:

$$\cancel{\hat{y}(z) =} \; y_k = \frac{1}{2i} \rho^k \left(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta} \right). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\rho e^{i\theta} z^{-1} \right)^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\rho e^{-i\theta} z^{-1} \right)^k$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - \rho e^{i\theta} z^{-1}} - \frac{1}{1 - \rho e^{-i\theta} z^{-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{\cancel{1} - \rho e^{-i\theta} z^{-1} - \cancel{1} + \rho e^{i\theta} z^{-1}}{1 - \rho (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{\rho\,(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\,z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta\, z^{-1}+\rho^2 z^{-2}} = \frac{\rho\sin\theta\, z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta\, z^{-1}+\rho^2 z^{-2}} = \frac{\rho\sin\theta\cdot z}{z^2-2\rho\cos\theta\, z+\rho^2}$$

$\boxed{15/3/2024}$

Ιδιότητες μετασχηματισμού

(Ι$_1$) Γραμμικότητα: $\mathcal{Z}\{\alpha x_k+\beta y_k\} = \alpha\,\hat{x}(z)+\beta\,\hat{y}(z)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με ακτίνα σύγκλισης $R=\max\{R_x,R_y\}$, όπου R_x, R_y οι ακτίνες σύγκλισης των $\hat{x}(z)$ και $\hat{y}(z)$, αντίστοιχα.

(Ι$_2$) Μετατόπιση: ~~(i)~~ Η ιδιότητα ισχύει για τον δίπλευρο μετασχηματισμό $\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{Z}\left[(y_k)_{k=-\infty}^{\infty}\right] = \hat{x}(z) =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$ (σειρά Laurent που γενικά συγκλίνει σε δακτύλιο $\{z\in\mathbb{C} : R_1<|z|<R_2\}$).

Αν $y_k=0$ για $k<0$, τότε (i) $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = z^{-n}\hat{y}(z)$ και (ii) $\mathcal{Z}\{y_{k+n}\} = z^{n}\hat{y}(z) - \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{n-m}$ $(n\geq 0)$

Απόδειξη: Για $n\geq 0$

(i) $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k-n} z^{-k} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} y_{k-n} z^{-(k-n)}$

Θέτοντας $m=k-n$,

$$\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} y_m z^{-m} = z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m}$$

(εφόσον $y_m=0$ για $m=-n,-n+1,\dots,-1$) και

άρα $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = z^{-n}\hat{y}(z)$.

(ii) $\mathcal{Z}\{y_{k+n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+n} z^{-k} = z^{n}\sum_{k=0}^{\infty} y_{k+n} z^{-(k+n)}$.

Θέτοντας $m=k+n$,

$$\mathcal{Z}\{y_{k+n}\} = z^{n}\sum_{m=n}^{\infty} y_m z^{-m} = z^{n}\left[\sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{-m}\right]$$

$$= z^{n}\hat{y}(z) - \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{n-m}$$

(I_3) Θεώρημα αρχικής τιμής: Αν $\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$ και το όριο $\lim_{z\to\infty} \hat{y}(z)$ ορίζεται, τότε $\lim_{z\to\infty} \hat{y}(z) = y_0$

Απόδειξη: Αν $\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$, τότε

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \cdots$$

Παίρνοντας το όριο $z\to\infty$, $\lim_{z\to\infty} \hat{y}(z) = y_0$

(I_4) Θεώρημα τελικής τιμής: Αν $\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$ και η μιγαδική συνάρτηση $(z-1)\hat{y}(z)$ είναι αναλυτική γιά $|z|>1$, τότε $\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1} (z-1)\hat{y}(z)$

(I_5) Ιδιότητα συνέλιξης: Έστω $(x_k),(y_k) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$
Ορίζουμε $(\omega_k) = (x_k) * (y_k)$ ως:

$$\omega_k = \sum_{m=0}^{k} x(k-m)\, y(m) \qquad (k \geq 0).$$

Τότε $\hat{\omega}(z) = \hat{x}(z)\cdot\hat{y}(z)$ και $\Pi.\Sigma_{\hat{\omega}} \supseteq \Pi\Sigma_{\hat{x}} \cap \Pi.\Sigma_{\hat{y}}$

(I_6) $\mathcal{Z}\{a^k x_k\} = \hat{x}\left(\frac{z}{a}\right)$ με $\Pi.\Sigma. = (\Pi.\Sigma_{\hat{x}})\cdot|a|.$

(I_7) Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

$1^η$ μέθοδος: (μέθοδος μερικών κλασμάτων -ρητής συναρτήσεως).

Παράδειγμα: (Ακολουθία Fibonacci). Έστω Π.Α.Τ.

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k \quad , \quad y_0 = 0,\ y_1 = 1$$

Έχουμε:

$$\mathcal{Z}\{y_{k+2}\} = \mathcal{Z}\{y_{k+1}\} + \mathcal{Z}\{y_k\} \quad \Rightarrow$$

$$z^2 \hat{y}(z) - z^2 y_0 - z y_1 = z \hat{y}(z) - z y_0 + \hat{y}(z)$$

$$\Rightarrow (z^2 - z - 1)\,\hat{y}(z) = z^2 \cancel{y_0}^{\,0} + z(\underbrace{y_1}_{1} - \cancel{y_0}^{\,0}) = z$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} z_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] z_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Άρα
$$\frac{1}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \cancel{\frac{1}{z_1 - z_2}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{z_1 - z_2}\right)}{z - z_1} + \frac{\dfrac{1}{z_2 - z_1}}{z - z_2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{z - z_1} - \frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{z - z_2}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k, \qquad k \geq 0$$

<u>Μέθοδος 2η</u> (Ολοκληρωτικά υπόλοιπα).

Έστω $\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_k z^{-k} + \dots$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) z^{k-1} = y_0 z^{k-1} + y_1 z^{k-2} + \dots + y_k z^{-1} + y_{k+1} z^{-2} + \dots$$

(Σειρά Laurent με κέντρο το σημείο $z=0$. Έστω C κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας R που περικλείει όλους τους πόλους της συνάρτησης $\hat{y}(z) z^{k-1}$. Τότε, από το Θεώρημα Cauchy,

$$y_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \hat{y}(z)\, z^{k-1}\, dz = \sum_i \text{Ολοκ Υπόλοιπα}\left(\hat{y} z^{k-1}, z_i\right)$$

όπου το άθροισμα είναι ως προς τους πόλους της $\hat{y}(z) z^{k-1}$.

Έστω ότι $\hat{y}(z) z^{-k} = \dfrac{h(z)}{g(z)}$, h, g πρώτα πολυώνυμα.

Υπάρχουν δύο πιθανότητες:

- Η $g(z)$ έχει απλή ρίζα (ισοδύναμα $\hat{y}(z) z^{-k}$ έχει απλούς πόλους). Τότε

$$\text{Ολοκ. Υπόλοιπο}\left(\hat{y}(z) z^{k-1}, z_i\right) = \lim_{z \to z_i}\left[(z - z_i)\frac{h(z)}{g(z)}\right]$$

- Η $g(z)$ έχει ρίζα πολλαπλότητας > 1. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλ. υπόλοιπο σε πόλο z_i πολλαπλότητας r δίνεται από:

$$\text{Ολοκ. Υπόλοιπο}\left(\hat{y}(z) z^{k-1}, z_i\right) = \frac{1}{(r-1)!}\lim_{z \to z_i}\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left[(z - z_i)^r \frac{h(z)}{g(z)}\right].$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της συνάρτησης:

$$\hat{y}(z) = \frac{z(z-1)}{(z-2)^2(z+3)}.$$

Έχουμε: $\hat{y}(z) z^{k-1} = \dfrac{z^k (z-1)}{(z-2)^2 (z+3)}$ που έχει έναν απλό πόλο στο $z=-3$ και έναν πόλο πολλαπλότητας 2 στο $z=2$

(10)

Άρα $y_k = \underbrace{\text{ολ.υπ}\left(\tilde{y}(z) z^{k-1}, -3\right)}_{K_1} + \underbrace{\text{ολ.υπ}\left(\tilde{y}(z) z^{k-1}, 2\right)}_{K_2}$

$$= \oint_{|z|=R} \tilde{y}(z) z^{k-1} dz, \qquad R = R_0 > 3$$

$$= \oint_{|z|=R} \frac{z^k (z-1)}{(z-2)^2 (z+3)} dz.$$

$$K_1 = \lim_{z \to -3} \left[\cancel{(z+3)} \frac{z^k (z-1)}{(z-2)^2 \cancel{(z+3)}} \right] = \frac{(-3)^k (-3-1)}{(-3-2)^2}$$

$$= -\frac{4}{25} (-3)^k.$$

$$K_2 = \cancel{\lim_{z}} \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \left[\cancel{(z-2)^2} \frac{\overbrace{z^k (z-1)}^{z^{k+1} - z^k}}{\cancel{(z-2)^2} (z+3)} \right].$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{\left[(k+1) z^k - k z^{k-1} \right] (z+3) - (z^{k+1} - z^k) \cdot 1}{(z+3)^2}$$

$$= \frac{\left[(k+1) 2^k - k\, 2^{k-1} \right] (5) - \cancel{z}\, 2^{k+1} + 2^k}{5^2}$$

$$= \frac{1}{25} \left[\cancel{2t}\ 10(k+1) - 5k - 4 + 2 \right] 2^{k-1}$$

$$= \frac{1}{25} (5k+8) 2^{k-1} \qquad \cancel{k \geq 0}.$$

$$= \frac{5k+8}{50} 2^k.$$

Άρα $y_k = K_1 + K_2 = -\frac{4}{25} (-3)^k + \frac{5k+8}{50} 2^k$

Διακριτά Συστήματα Εισόδου - Εξόδου

Ορίζεται ως τελεστής που απεικονίζει διανυσματική ακολουθία εισόδων $\underline{u} = (\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots)$ ή $\underline{u} = (\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\dots \underline{u}_{-1}, \underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots)$ σε διανυσματική ακολουθία εξόδων $\underline{y} = (\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots)$ ή $\underline{y} = (\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\dots, \underline{y}_{-1}, \underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots)$. Συμβολικά γράφουμε: $\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t$, $t\in\mathbb{N}_0$ ή $t\in\mathbb{Z}$. (όπου t ο διακριτός δείκτης χρόνου).

<u>Ορισμός</u>: Το σύστημα λέγεται "αιτιατό" (causal) αν η έξοδος την χρονική στιγμή $t\in\mathbb{N}_0$ ($t\in\mathbb{Z}$) δεν εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους $\{\underline{u}_{t+1}, \underline{u}_{t+2}, \dots\}$.

Ισοδύναμα

$$\left(\underline{u}_t = \underline{v}_t \quad \forall t\le t_0\right) \Rightarrow (G_\Sigma u)_t = (G_\Sigma v)_t \quad \forall t\le t_0.$$

<u>Ορισμός</u>: Το σύστημα είναι γραμμικό αν η απεικόνιση G_Σ είναι γραμμική, δηλ.

$$\text{(i)}\quad G_\Sigma(u+v) = G_\Sigma(u) + G_\Sigma(v), \quad \text{και}$$

$$\text{(ii)}\quad G_\Sigma(\lambda u) = \lambda G_\Sigma(u), \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Αν το σύστημα είναι γραμμικό και αιτιατό η απεικόνιση εισόδου-εξόδου είναι της μορφής:

$$(G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t,k)\,\underline{u}_k, \quad t\in\mathbb{N}_0$$

όπου $\underline{u}_t\in\mathbb{R}^m$, $(G_\Sigma u)_t\in\mathbb{R}^p$, $G(t,k)\in\mathbb{R}^{p\times m}$

<u>Ορισμός:</u> Το σύστημα Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν η έξοδος του συστήματος σε είσοδο μετατοπισμένη k χρονικές στιγμές είναι η έξοδος ~~στό μή~~ στην μή μετατοπισμένη είσοδο, μετατοπισμένη k χρονικές στιγμές.
δηλ. αν S ο τελεστής μετατόπισης,

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

τότε το Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν $G_\Sigma S = S G_\Sigma$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν το σύστημα Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο, τότε $G_\Sigma S^k = S^k G_\Sigma \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.
Εφόσον $G_\Sigma S = S G_\Sigma \Leftrightarrow G_\Sigma S u = S G_\Sigma u$ ~~$\forall u$~~
$\forall u = (u_0, u_1, \dots)$

τότε και για είσοδο $Su = (0, u_0, u_1, \dots)$ έχουμε:

$$G_\Sigma S(Su) = S G_\Sigma (Su)$$

$$\Rightarrow G_\Sigma S^2 u = S(G_\Sigma S) u = S(S G_\Sigma) u = S^2 G_\Sigma u$$

και γενικά $G_\Sigma S^k u = S^k G_\Sigma u \quad \forall u = (\underline{u_0}, \underline{u_1}, \dots)$

δηλ. $G_\Sigma S^k = S^k G_\Sigma$

<u>Πρόταση:</u> Έστω Σ αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο. Τότε η απεικόνιση εισόδου-εξόδου ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k) \underline{u_k} \quad , \ t \geq 0.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω e η παλμική ~~σειρά~~ ακολουθία (ακολουθία κρούσης) $e = (u_0, \underline{0}, \underline{0}, \dots)$, όπου $\underline{u_0} \in \mathbb{R}^m$ αυθαίρετο. Τότε,

$$(G_\Sigma e)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t,k)\,\underline{u}_k =$$

$$= G(t,0)\,\underline{u}_0 + G(t,1)\,\cancelto{0}{\underline{u}_1} + G(t,2)\,\cancelto{0}{\underline{u}_2} + \dots$$

$$= G(t,0)\,\underline{u}_0$$

$$\Rightarrow (S^k G_\Sigma e)_t = G(t-k,0)\,\underline{u}_0 \quad , \quad t \geq k$$

Επίσης:

$$(S^k e)_t = (\underline{0},\underline{0},\dots,\underline{0},\overset{k\text{ θέση}}{\underline{u}_0},\underline{0},\dots)$$

$$\Rightarrow (G_\Sigma S^k e)_t = G(t,0)\,\cancelto{0}{\underline{0}} + \dots + G(t,k)\,\underline{u}_0 + \dots$$

$$= G(t,k)\,\underline{u}_0 \quad , \quad t \geq k$$

Εφόσον το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο,

$$G_\Sigma S^k = S^k G_\Sigma \Rightarrow G(t-k,0)\,\underline{u}_0 = G(t,k)\,\underline{u}_0 \quad \forall\, \underline{u}_0 \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \underline{G(t-k,0) = G(t,k)}$$

$\square$

__Παρατήρηση__: Στην περίπτωση πού έχουμε γραμμικό, αιτιακό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα γράφουμε (με μικρή βλάβη συμβολισμού) $G(t-k) = G(t-k,0)$. Στην περίπτωση αυτή οι πίνακες $(G(0), G(1), G(2), \dots)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η έξοδος του συστήματος ~~σε~~ όταν η είσοδος είναι ακολουθία κρούσης δίνεται από την εξίσωση:

$$G_\Sigma(\underline{u}_0,\underline{0},\underline{0},\dots) = (G(0)\,\underline{u}_0,\, G(1)\,\underline{u}_0,\, \dots).$$

Πρόταση: Έστω $\{\underline{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\underline{u}_k \in \mathbb{R}^m$, εκθετικά φραγμένη ακολουθία με παραμέτρους (M_1, α_1) και $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ εκθετικά φραγμένη ακολουθία πινάκων $G_k \in \mathbb{R}^{p\times m}$ με ~~πα~~ παραμέτρους (M_2, α_2). Έστω,

$$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\,\underline{u}_k \quad , \quad t \geq 0$$

Τότε $\{\underline{y}_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ είναι εκθετικά φραγμένη ακολουθία διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^p$ και ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$,

$$\mathcal{Z}(\underline{y}_t) = \underline{\hat{y}}(z)$$

είναι καλά ορισμένος (δηλ. η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$ συγκλίνει σε περιοχή $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ για κάποιο $R>0$).

Απόδειξη:

$$\|\underline{y}_t\| = \Big\| \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\,\underline{u}_k \Big\| \leq \sum_{k=0}^{t} \|G(t-k)\| \cdot \|\underline{u}_k\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{t} M_2 \alpha_2^{t-k} \cdot M_1 \alpha_1^{k} = M_1 M_2 \alpha_2^{t} \sum_{k=0}^{t} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha_2 > \alpha_1$! Άρα,

$$\|\underline{y}_t\| \leq M_1 M_2 \alpha_2^t \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k = M_1 M_2 \frac{1}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \alpha_2^t$$

$$= \underbrace{M_1 M_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}}_{:= M_3} \alpha_2^t := M_3 \alpha_2^t$$

Άρα $(\underline{y}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ είναι εκθετικά φραγμένη και επομένως $\underline{\hat{y}}(z)$ είναι καλά ορισμένη (δυναμοσειρά συγκλίνει στο $|z|>\alpha_2$).

□

Παρατηρούμε ότι το σύστημα Σ είναι δυναμικό, (έχει "μνήμη") καθώς η έξοδος την χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται μόνο από την είσοδο την ίδια χρονική στιγμή, αλλά και από τις εισόδους παρελθόντος χρόνου $t-1, t-2, \dots, 0$.

Στη συνέχεια επεκτείνουμε τον ορισμό εκθετικά φραγμένης ακολουθίας για ακολουθίες διανυσμάτων και ακολουθίες πινάκων.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$. Ορίζουμε την Ευκλείδια νόρμα του $\underline{u}$ ως: $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u}^T \underline{u}} = \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^2\right)^{1/2}$. Αν

$$(\underline{u}_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots), \quad \underline{u}_i \in \mathbb{R}^m,$$

τότε η ακολουθία είναι εκθετικά φραγμένη αν $\exists\, \alpha_1 > 0, M_1 > 0$, τ.ω:

$$\|\underline{u}_k\| \le M_1 \alpha_1^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Ορίζουμε ως $\|G\|$ την φασματική νόρμα:

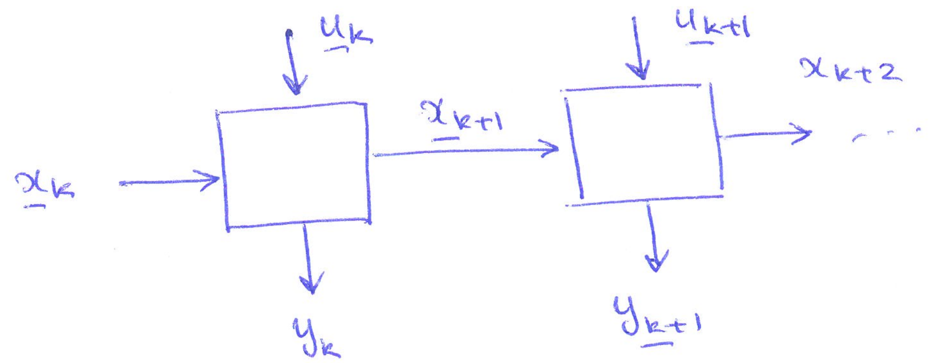
$$\|G\| = \max\{\|G\underline{x}\| : x \in \mathbb{R}^m, \|x\| = 1\}$$

(όπου $\|\underline{x}\|$ και $\|G\underline{x}\|$ είναι οι ευκλείδιες νόρμες των διανυσμάτων $\underline{x}$ και $G\underline{x}$, αντίστοιχα). Ισχύει ότι:

$$\|G\| = \sigma_1(G) = \sqrt{\lambda_{max}(G^T G)}$$ (μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του G).

Έστω: $(G_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (G_0, G_1, G_2, \dots)$ ακολουθία πινάκων με $G_k \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $k \ge 0$. Η ακολουθία λέγεται εκθετικά φραγμένη αν $\exists\, M_2 > 0, \alpha_2 > 0$ τ.ω $\|G_k\| \le M_2 \alpha_2^k$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

Παρατηρούμε ότι αν $(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$ είναι γνωστά διανύσματα τότε $(\underline{x}_{k+1}, \underline{y}_k)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένα.



Το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}_k$ "συμπυκνώνει" όλη την πληροφορία για την εξέλιξη του συστήματος μέχρι την χρονική στιγμή $k \in \mathbb{N}_0$.

Γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα κατ. χώρου

Της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A(k)\,\underline{x}_k + B(k)\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C(k)\,\underline{x}_k + D(k)\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

όπου $A: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $C: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{p\times m}$

Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα κατ. χώρου

Της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A\,\underline{x}_k + B\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C\,\underline{x}_k + D\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

οπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Παρατήρηση: Από την ιδιότητα συνέλιξης έχουμε:

$$\underline{y}_t = (G_t) * (\underline{u}_t) = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\, \underline{u}(k) \quad , t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\underline{y}}(z) = \hat{G}(z)\, \hat{\underline{u}}(z).$$

Η πινακο-συνάρτηση $\hat{G}(z) = \mathcal{Z}\{G_t\} \in \mathbb{R}(z)^{p\times m}$ ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του (γραμμικού, αιτιατού, χρονικά-αναλλοίωτου συστήματος Σ).

Συστήματα καταστάσεως-χώρου (state-space) διακριτού χρόνου

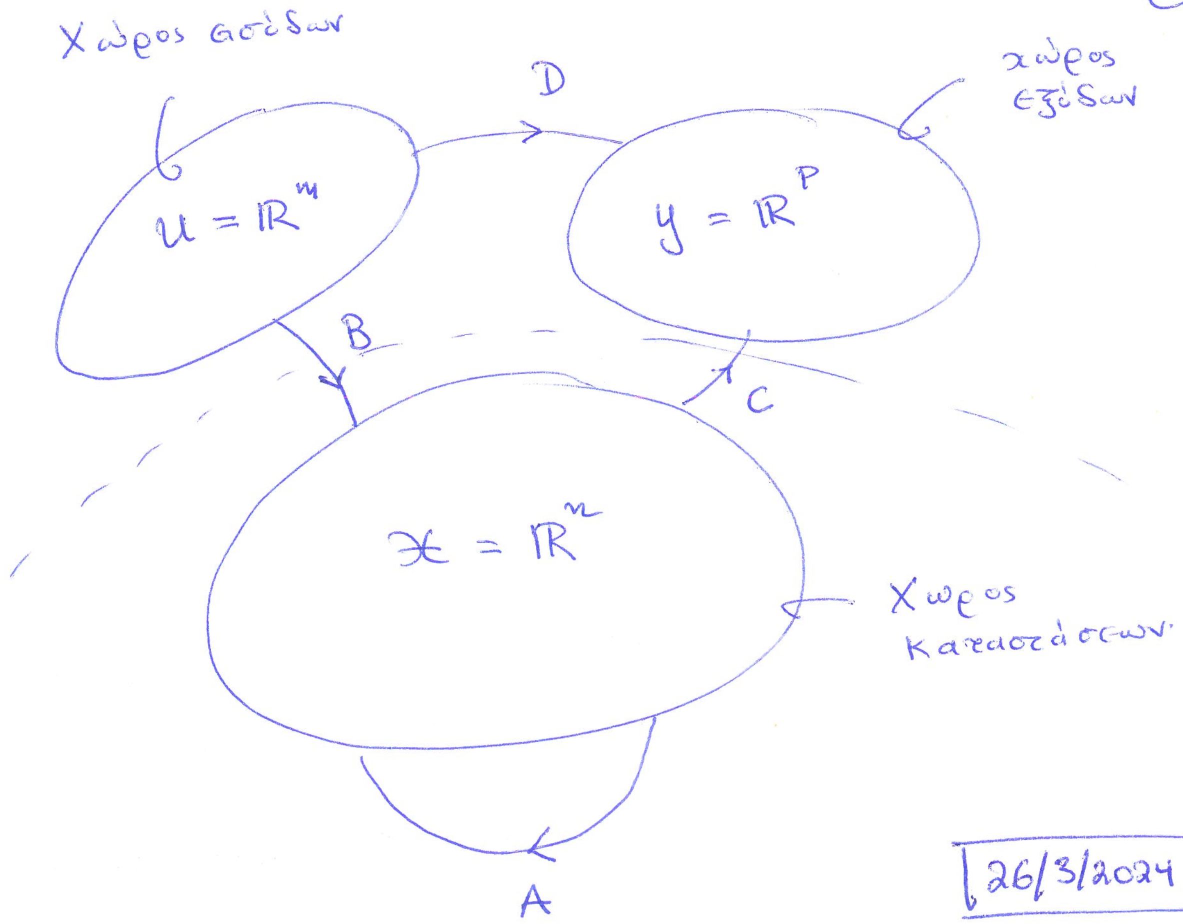
Ορίζονται από εξισώσεις της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} x_i(k+1) &= f_i(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ & \qquad i = 1, 2, \dots n \\ y_i(k) &= g_i(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ & \qquad i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}\right\}$$

Σε πιό συμπαγή μορφή:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{f}(k, \underline{x}_k, \underline{u}_k) \\ \underline{y}_k &= \underline{g}(k, \underline{x}_k, \underline{u}_k) \end{aligned}\right\}$$

όπου $\underline{f}: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\underline{g}: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Το διάνυσμα $\underline{x}_k$ λέγεται διάνυσμα κατάστασης, ~~και~~ το διάνυσμα $\underline{y}_k$ λέγεται διάνυσμα εξόδου και το $\underline{u}_k$ διάνυσμα εισόδων.



26/3/2024

Απόκριση γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου

Εξετάζουμε πρώτα το σύστημα με μηδενική είσοδο (ομογενές): $\underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k$, $\underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0$. Έχουμε

$$\underline{x}_k = A_{k-1}\underline{x}_{k-1} = A_{k-1}A_{k-2}\underline{x}_{k-2} = \cdots$$

$$= \underbrace{A_{k-1}A_{k-2}\cdots A_{k_0}}_{\Phi(k,k_0)}\,\underline{x}_{k_0}$$

όπου $\Phi(k,k_0)$ ο πίνακας μεταφοράς, $\Phi(k,k_0) = \prod_{i=k_0}^{k-1} A_i$

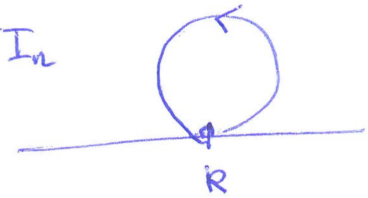
Ιδιότητες: (i) $\Phi(k,k) = I_n$

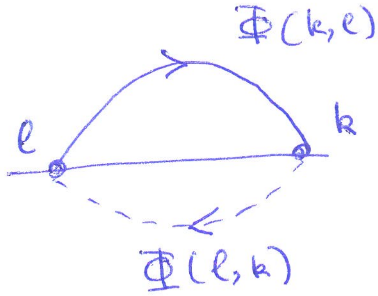
(ii) $\Phi(k,\ell) = \Phi(k,m)\,\Phi(m,\ell)$ $\quad k \geq m \geq \ell$

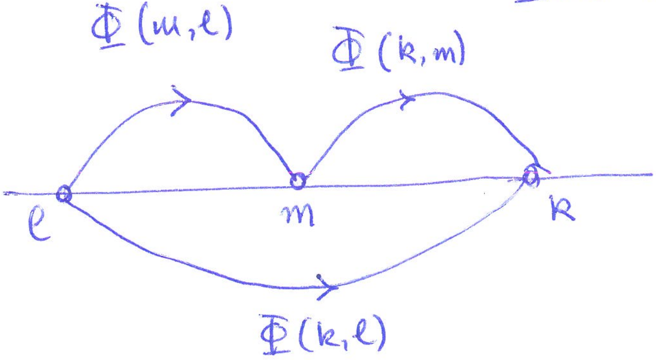
(iii) ο πίνακας $\Phi(k,\ell)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι πίνακες $A_{k-1}, \ldots A_\ell$ είναι αντιστρέψιμοι, οπότε $\Phi^{-1}(k,\ell) = \Phi(\ell,k)$

Παρατήρηση: Ο πίνακας μεταφοράς συστήματος συνεχούς χρόνου είναι πάντα αντιστρέψιμος.

$\Phi(k,\ell) = I_n$







Για χρονικά αναλλοίωτο σύστημα (μηδενικής εισόδου), $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, έχουμε $\underline{x}_k = A^{k-k_0}\underline{x}_{k_0}$ $(A^0 = I_n)$ οπότε $\Phi(k,k_0) = \hat{\Phi}(k-k_0) = A^{k-k_0}$. Για γραμμικό σύστημα με μή μηδενική είσοδο,

$$\begin{aligned}
\underline{x}_k &= A_{k-1}\underline{x}_{k-1} + B_{k-1}\underline{u}_{k-1} \\
&= A_{k-1}(A_{k-2}\underline{x}_{k-2} + B_{k-2}\underline{u}_{k-2}) + B_{k-1}\underline{u}_{k-1} \\
&= \underbrace{A_{k-1}A_{k-2}}_{\Phi(k,k-2)}\underline{x}_{k-2} + \underbrace{A_{k-1}}_{\Phi(k,k-1)}B_{k-2}\underline{u}_{k-2} + \underbrace{I_n}_{\Phi(k,k)}\cdot B_{k-1}\underline{u}_{k-1} \\
&= \Phi(k,k-2)\underline{x}_{k-2} + \sum_{j=k-2}^{k-1}\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j
\end{aligned}$$

και επαγωγικά,

$$\left.\begin{aligned}
\underline{x}_k &= \Phi(k,k_0)\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1}\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j \\
\underline{y}_k &= C_k\Phi(k,k_0)\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1}C_k\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j + D_k\underline{u}_k
\end{aligned}\right\}$$

Σε γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα συστήματα,

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_k &= A^{k-k_0}\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underline{u}_j \\ \underline{y}_k &= CA^{k-k_0}\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} CA^{k-j-1} B \underline{u}_j + D\underline{u}_k \end{aligned}\right\}$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας στα χρονικά αναλλοίωτα συστήματα θέτουμε $k_0 = 0$, και

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_k &= A^{k}\underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underline{u}_j \\ \underline{y}_k &= CA^{k}\underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B \underline{u}_j + D\underline{u}_k \end{aligned}\right\}$$

Αν $\underline{x}_0 = \underline{0}$,

$$\begin{aligned} \underline{y}_k &= \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B \underline{u}_j + D\underline{u}_k \\ &= \sum_{j=0}^{k} G(k-j)\underline{u}_j \end{aligned}$$

όπου

$$\left.\begin{aligned} G(k-j) &= CA^{k-j-1}B \qquad (0 \le j \le k-1) \\ &= D \qquad (j=k). \end{aligned}\right\}$$

είναι η "κρουστική απόκριση" του συστήματος. Η ακολουθία:

$$\{G(k)\}_{k=0}^{\infty} = \{D, CB, CAB, CA^2B, \dots\}$$

είναι η ακολουθία συντελεστών Markov. Επομένως

$$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = D\underline{u}_t + CB\underline{u}_{t-1} + CAB\underline{u}_{t-2} + \dots + CA^{t-1}B\underline{u}_0$$

<u>Λήμμα</u>: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Τότε $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ όπου $\|\cdot\|$ η φασματική νόρμα πίνακα (μέγιστη ιδιάζουσα τιμή). Επομένως αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (τετραγωνικός πίνακας), $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

<u>Απόδειξη</u>: Εφόσον η φασματική νόρμα πίνακα επάγεται από την Ευκλείδια νόρμα διανυσμάτων, $\|AB\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|B\underline{x}\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^q$. Άρα, γιά κάθε $\underline{x} \in \mathbb{R}^q$, $\|\underline{x}\| \leq 1$,

$$\max\{\|AB\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^q, \|\underline{x}\| \leq 1\}$$

$$\leq \|A\| \cdot \max\{\|B\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^q, \|\underline{x}\| \leq 1\}$$

$$= \|A\| \cdot \|B\|$$

Ειδικά γιά τετραγωνικούς πίνακες,

$$\|A^2\| \leq \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$$

και επαγωγικά $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ □

<u>Λήμμα</u>: Έστω $S_t(z) = \sum_{k=1}^{t} A^{k-1} z^{-k} = z^{-1} I_n + z^{-2} A + \cdots + z^{-t} A^{t-1}$. Αν $|z| > \|A\|$ η σειρά συγκλίνει στην συνάρτηση $(zI_n - A)^{-1}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $|z| > \|A\|$ και $\gamma = \frac{\|A\|}{|z|} < 1$. Τότε

$$\|S_t(z)\| = \|z^{-1} I_n + z^{-2} A + \cdots + z^{-t} A^{t-1}\|$$

$$= |z|^{-1} \cdot \|I_n + z^{-1} A + \cdots + z^{-t+1} A^{t-1}\|$$

$$\leq |z|^{-1}\left(1+\frac{\|A\|}{|z|}+\cdots+\frac{\|A^{t-1}\|}{|z|^{t-1}}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\|z\|}\left(1+\frac{\|A\|}{|z|}+\cdots+\frac{\|A\|^{t-1}}{|z|^{t-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{|z|}\left(1+\gamma+\cdots+\gamma^{t-1}\right) \longrightarrow \frac{1}{|z|(1-\gamma)}$$

καθώς $t\to\infty$. Επομένως η σειρά συγκλίνει και για $z\neq 0$,

$$(zI_n-A)S_t(z) = (zI_n-A)\left(z^{-1}I_n+z^{-2}A+\cdots+z^{-t}A^{t-1}\right)$$

$$= I_n+\cancel{z^{-1}A}+\cdots+\cancel{z^{-t+1}A^{t-1}}-\cancel{z^{-1}A}-\cancel{z^{-2}A^{2}}-\cdots-z^{-t}A^{t}$$

$$= I_n-\frac{A^t}{z^t} \longrightarrow I_n \quad \text{αν } |z|>\|A\|.$$

καθώς $\left\|\frac{A^t}{z^t}\right\| = \frac{\|A^t\|}{|z|^t} \leq \left(\frac{\|A\|}{|z|}\right)^t \longrightarrow 0$ στο όριο ~~καθώς~~ $(t\to\infty)$ (αν $|z|>\|A\|$).

Επομένως,

$$(zI_n-A)\left(\sum_{k=1}^{\infty}A^{k-1}z^{-k}\right)=I_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}A^{k-1}z^{-k}=(zI_n-A)^{-1}, \quad |z|\geq\|A\|$$

Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος πίνακας $(zI_n-A)^{-1}$ είναι καλά ορισμένος για $|z|>\|A\|$ αφού $\|A\|>\rho(A)$ (όπου $\rho(A)=\max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\}$ η φασματική ακτίνα του A). $\square$

<u>Θεώρημα</u>: Το σύστημα καταστάσεων χώρου,

$$\underline{x}_{k+1}=A\underline{x}_k+B\underline{u}_k, \quad \underline{y}_k=C\underline{x}_k+D\underline{u}_k, \quad \underline{x}(0)=\underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$$

αντιστοιχεί σε αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου-εξόδου με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z)=D+C(zI_n-A)^{-1}B$

<u>Απόδειξη:</u> Η λύση της εξίσωσης $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$ για $\underline{x}(0) = x_0 = \underline{0}$ είναι: ($x_t = 0$ αν $t=0$ και):

$$\underline{x}_t = \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B \underline{u}_k , \quad \cancel{t \geq 0} \quad t \geq 1$$

που αντιστοιχεί σε ακολουθία εξόδου

$$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t-1} CA^{t-k-1} B u_k + D u_t , \quad t \geq 0$$

Η ακολουθία πινάκων $(CA^{k-1}B)_{k\in \mathbb{N}}$ είναι εκθετικά φραγμένη αφού:

$$\| CA^{k-1} B \| \leq \|C\| \cdot \|B\| \cdot \|A\|^{k-1} := M \alpha^{k-1} , \quad k \in \mathbb{N}.$$

όπου $M := \|C\| \cdot \|B\|$ και $\alpha = \|A\|$. Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς:

$$\hat{G}(z) = D + \sum_{k=1}^{\infty} CA^{k-1} B z^{-k}$$

$$= D + C\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} \right) B$$

είναι καλά ορισμένη ~~για~~ και συγκλίνει για "αρκούντως μεγάλο" $|z|$. Πράγματι, από προηγούμενο Λήμμα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} = (zI_n - A)^{-1} , \quad |z| > \|A\|$$

και επομένως $\hat{G}(z) = D + C(zI_n - A)^{-1} B$. □

Η συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z)$ μπορεί να βρεθεί πιο ~~εύκολα~~ άμεσα από τις εξισώσεις που ορίζουν το σύστημα κατάστασης μέ την χρήση ιδιοτήτων του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$. Πράγματι, αν

$$\mathcal{Z}\{\underline{x}_k\} = \hat{\underline{x}}(z), \quad \mathcal{Z}\{\underline{y}_k\} = \hat{\underline{y}}(z), \quad \mathcal{Z}\{\underline{u}_k\} = \hat{\underline{u}}(z),$$

τότε γιά $|z| \geq \|A\|$,

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \Rightarrow z\hat{\underline{x}}(z) - z\underline{x}(0) = A\hat{\underline{x}}(z) + B\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow (zI_n - A)\hat{\underline{x}}(z) = z\underline{x}_0 + B\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{x}}(z) = z(zI_n - A)^{-1}\underline{x}_0 + (zI_n - A)^{-1}B\hat{\underline{u}}(z)$$

Επίσης,

$$\cancel{\hat{\underline{y}}(z) =}\ \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \Rightarrow \hat{\underline{y}}(z) = C\hat{\underline{x}}(z) + D\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{y}}(z) = C\left[z(zI_n - A)^{-1}\underline{x}_0 + (zI_n - A)^{-1}B\hat{\underline{u}}(z)\right] + D\hat{\underline{u}}(z)$$

και γιά $\underline{x}_0 = \underline{0}$,

$$\hat{\underline{y}}(z) = [\underbrace{C(zI - A)^{-1}B + D}_{\hat{G}(z)}]\,\hat{\underline{u}}(z) = \hat{G}(z)\,\hat{\underline{u}}(z)$$

$\boxed{28/3/2024}$

Έστω $\varphi(z) = \det(zI_n - A)$, ~~det~~ $\deg[\varphi(z)] = n = \dim(A)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε

$$\hat{G}(z) = C\,\frac{\operatorname{adj}(zI_n - A)}{\varphi(z)}\,B + D = \frac{C\operatorname{adj}(zI_n - A)B + D\varphi(z)}{\varphi(z)}$$

$$:= \frac{N[z]}{\varphi(z)} \quad \text{όπου } N[z] \in \mathbb{R}^{p\times m}[z]$$

Παρατηρούμε ότι $\hat{G}(z)$ είναι ρητή συνάρτηση της μεταβλητής z

δηλ. τα στοιχεία $G_{ij}(z)$ της $G(z)$ είναι λόγος δύο πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, δηλ.

$$\hat{G}_{ij}(z) = \frac{N_{ij}(z)}{q(z)}, \quad i=1,2,\dots p, \quad j=1,2,\dots,m$$

Συγκεκριμένα,

$$D_{ij} \neq 0 \Rightarrow \deg[N_{ij}(z)] = n = \deg[q(z)]$$

$$D_{ij} = 0 \Rightarrow \deg[N_{ij}(z)] < n = \deg[q(z)].$$

Σε κάθε περίπτωση $\deg[N_{ij}(z)] \leq n = \deg[q(z)]$ $\forall i=1,2,\dots p$, $j=1,2,\dots,m$ και η συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z)$ είναι "κανονική" (proper). Αν $D=0$, τότε $\deg[N_{ij}(z)] < n = \deg[q(z)]$ $\forall i=1,2,\dots,p$, $j=1,2,\dots m$ και η $\hat{G}(z)$ είναι "αυστηρά κανονική" (strictly proper).

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω το σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k, \quad \underline{y}_k = C\underline{x}_k, \quad \text{όπου}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0],$$

(και $D=0$) που αντιστοιχεί στις εξισώσεις διαφορών:

$$x_{k+1}^{(1)} = x_k^{(1)} + x_k^{(2)} + u_k, \quad x_{k+1}^{(2)} = x_k^{(2)}, \quad y_k = x_k^{(1)}$$

όπου $\underline{x}_k = [x_k^{(1)} \,;\, x_k^{(2)}]^T$. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\hat{G}(z) = C(zI_2 - A)^{-1}B = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ισοδύναμα:

$$\hat{G}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{z-1+1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Η $\hat{G}(z)$ έχει πόλο στο $z=1$ (πολλαπλότητας 2) και μηδενικό στο $z=0$ (πολλαπλότητας 1).

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι κάθε σύστημα καταστάσεων χώρου (αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο) έχει ρητή και κανονική συνάρτηση μεταφοράς. Το ερώτημα είναι αν ισχύει το αντίθετο.

<u>Πρόβλημα</u>: Έστω $\hat{G}(z)$ <u>ρητή</u> και <u>κανονική</u> συνάρτηση μεταφοράς αιτιατού, γραμμικού και χρονικά αναλλοίωτου συστήματος εισόδου-εξόδου. Μπορεί το σύστημα να εκφραστεί σε μορφή καταστάσεων χώρου; (πρόβλημα "πραγματοποίησης"). Αν ναι, τότε ο τρόπος είναι μοναδικός;

Θα δούμε ότι η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι καταφατική και ~~στα~~ στο δεύτερο αρνητική.

Λήμμα: Έστω $H(z)$ και $L(z)$ τα πινακο-πολυώνυμα,

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\ell-1} z^j H_j \quad \text{και} \quad L(z) = z^\ell I_m + \sum_{j=0}^{\ell-1} z^j A_j$$ διαστάσεων

$p\times m$ και $m\times m$ αντίστοιχα. Έστω,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad C = [\,H_0\; H_1 \cdots H_{\ell-1}\,]$$

Τότε $H(z)L^{-1}(z) = C(zI-A)^{-1}B$ όπου $z \notin \sigma(A)$ (το φάσμα του πίνακα A).

Απόδειξη: Εξετάζουμε πρώτα την ειδική περίπτωση $H(z)=I$, $C=[\,I \,\vdots\, 0 \cdots 0\,]$.

οπότε $H_0 = I$, $H_1 = H_2 = \cdots = H_{\ell-1} = 0$ και

Έστω $z\in\mathbb{C}$ και έστω ότι

$$L(z)\,\underline{x}_1 = \underline{u} \qquad (\#)$$

Ορίζουμε διανύσματα: $\underline{x}_2 = z\underline{x}_1$, $\underline{x}_3 = z\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_\ell = z\underline{x}_{\ell-1} = z^{\ell-1}\underline{x}_1$ ($\Rightarrow z\underline{x}_\ell = z^\ell \underline{x}_1$), $\underline{x} = [\,\underline{x}_1^T\; \underline{x}_2^T \cdots \underline{x}_\ell^T\,]^T$. Τότε,

$$A\underline{x} \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} 0 & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_{\ell-1} \\ \underline{x}_\ell \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_\ell \\ -A_0\underline{x}_1 - A_1\underline{x}_2 - \cdots - A_{\ell-1}\underline{x}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\underline{x}_1 \\ \vdots \\ z\underline{x}_{\ell-1} \\ -\left(\sum_{j=0}^{\ell-1} A_j z^j\right)\underline{x}_1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\underline{u} = L(z)\,\underline{x}_1 = \left[z^{\ell} I + \sum_{j=0}^{\ell-1} z^j A_j \right] \underline{x}_1$$

$$\Rightarrow \quad -\left[\sum_{j=0}^{\ell-1} z^j A_j \right] \underline{x}_1 = z^{\ell} \underline{x}_1 - \underline{u} = z\,\underline{x}_{\ell} - \underline{u} \qquad (**)$$

και από (*) :

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} z\underline{x}_1 \\ z\underline{x}_2 \\ \vdots \\ z\underline{x}_{\ell-1} \\ -\left(\sum_{j=0}^{\ell-1} z^j A_j\right)\underline{x}_1 \end{bmatrix} \overset{(**)}{=} \begin{bmatrix} z\underline{x}_1 \\ z\underline{x}_2 \\ \vdots \\ z\underline{x}_{\ell-1} \\ z\underline{x}_{\ell} - \underline{u} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_{\ell-1} \\ \underline{x}_{\ell} \end{bmatrix} - B\underline{u}$$

$$\Rightarrow (zI - A)\underline{x} = B\underline{u} \Rightarrow \underline{x} \overset{(***)}{=} (zI-A)^{-1} B\underline{u} \quad , z \notin \sigma(A)$$

Επίσης,

$$C\underline{x} = [I \vdots 0 \cdots 0] \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_{\ell} \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underline{x}_1 \overset{(***)}{=} C(zI-A)^{-1} B\underline{u}$$

Επομένως,

$$(\#) \Rightarrow \underline{x}_1 = L^{-1}(z)\,\underline{u} = [I\ 0 \cdots 0](zI-A)^{-1} B\underline{u}$$

$$\Rightarrow \left[L^{-1}(z) - [I\ 0 \cdots 0](zI-A)^{-1} B \right] \underline{u} = 0 \qquad \forall \underline{u} \in \mathbb{C}^m$$

$$\Rightarrow L^{-1}(z) = [I\ 0 \cdots 0](zI-A)^{-1} B$$

που είναι το αποτέλεσμα στην ειδική περίπτωση που εξετάζουμε.

Στην γενική περίπτωση $\left(H(z) = \sum_{j=0}^{\ell-1} z^j H_j \right)$ έστω ότι:

$$\begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} = (zI-A)^{-1}B. \qquad (\#\#).$$

Τότε, από το πρώτο μέρος της απόδειξης,

$$L^{-1}(z) = [I \ 0 \cdots 0](zI-A)^{-1}B$$

$$= [I \ 0 \cdots 0] \begin{bmatrix} C_1(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} = C_1(z)$$

$$(\S).$$

$$\Rightarrow \quad C_1(z) = L^{-1}(z)$$

Από την $(\#\#)$

$$(zI-A)\begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad z\begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} z\,C_1(z) &= C_2(z) \\ z\,C_2(z) &= C_3(z) = z^2 C_1(z) \\ &\ \vdots \\ z\,C_{\ell-1}(z) &= C_\ell(z) = z^{\ell-1} C_1(z) \end{aligned} \right\}$$

Και γενικά $C_j(z) = z^{j-1} C_1(z)$, $j = 1, 2, \dots \ell$. Άρα

$$C(zI-A)^{-1}B = [H_0 \; H_1 \cdots H_{\ell-1}] \begin{bmatrix} C_1(z) \\ z\,C_1(z) \\ \vdots \\ z^{\ell-1} C_1(z) \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{[H_0 \; H_1 \cdots H_{\ell-1}] \begin{bmatrix} I \\ zI \\ \vdots \\ z^{\ell-1} I \end{bmatrix}}_{H(z)} C_1(z)$$

$$= H(z)\, C_1(z) \overset{(\S)}{=} H(z)\, L^{-1}(z)$$

□

<u>Θεώρημα:</u> Η συνάρτηση εισόδου-εξόδου ενός αιτιατού, γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος Σ γράφεται ως σύστημα καταστάσεων χώρου αν και μόνο αν το Σ έχει συνάρτηση μεταφοράς που είναι ρητή και κανονική.

<u>Απόδειξη:</u> Έχουμε ήδη δείξει ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος καταστάσεων χώρου είναι ρητή και κανονική. Αντίστροφα, έστω Σ αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου-εξόδου με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z)$. Θα δείξουμε ότι,

$$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\,\underline{u}_k \,, \quad t=0,1,2,\ldots$$

εκφράζεται ως σύστημα καταστάσεων χώρου.

Εφόσον $\hat{G}(z)$ ρητή και κανονική, κάθε στοιχείο $\hat{G}_{ij}(z)$ είναι επίσης ρητή και κανονική συνάρτηση (βαθμωτή).

Επομένως, $\hat{G}(z) \to G(0)$ καθώς $|z| \to \infty$ και επομένως γράφουμε $\hat{G}(z) = G(0) + K(z)$, όπου $K(z)$ αυστηρά κανονική, δηλαδή $\lim_{|z|\to\infty} K(z) = 0$. Το στοιχείο (i,j) του πίνακα $K(z)$, $k_{ij}(z)$, γράφεται ως

$$k_{ij}(z) = \frac{p_{ij}(z)}{q_{ij}(z)}$$

όπου (χωρίς βλάβη γενικότητας) θεωρούμε ότι το πολυώνυμο $q_{ij}(z)$ είναι μονικό (συντελεστής υψηλότερου βαθμού ίσος με την μονάδα). Επίσης έχουμε $\deg(p_{ij}) < \deg(q_{ij})$.

Έστω ότι $r(z) = \prod_{i,j} q_{ij}(z)$ και έστω ότι $H(z) = r(z)K(z)$.

Τότε ο πίνακας $H(z)$ είναι πολυωνυμικός,

$$H(z) = H_0 + H_1 z + \dots + H_{\ell-1} z^{\ell-1}$$

όπου $\ell \leq \deg r(z)$.

[Π.χ. αν $p=m=2$,

$$H(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{p_{11}}{q_{11}} & \frac{p_{12}}{q_{12}} \\ \frac{p_{21}}{q_{21}} & \frac{p_{22}}{q_{22}} \end{bmatrix}}_{K(z)} \underbrace{(q_{11} q_{12} q_{21} q_{22})}_{r(z)} = \begin{bmatrix} p_{11}(q_{12}q_{21}q_{22}) & * \\ p_{21}(q_{11}q_{12}q_{22}) & * \end{bmatrix}$$

και γενικά,

$$\deg(H_{ij}) = \deg(p_{ij}) + \sum_{\substack{k,\ell \\ k\neq i,\, \ell\neq j}} \deg(q_{k\ell}) =$$

$$= \deg(p_{ij}) - \deg(q_{ij}) + \sum_{k,\ell} \deg(q_{k\ell}).$$

και εφόσον

$$\deg(P_{ij}) < \deg(q_{ij}), \quad \sum_{k,l} \deg(q_{kl}) = \deg(r)$$

έχουμε:

$$\deg(H_{ij}) < \deg(r)$$

για κάθε (i,j) και συνεπώς

$$\max_{i,j} \deg(H_{ij}) < \deg(r) \qquad].$$

Ορίζουμε: $L(z) = r(z) I_m$, τότε $L(z)$ μονικός πολυωνυμικός πίνακας και $K(z) = H(z) L^{-1}(z)$. Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα υπάρχουν πίνακες A, B, C (με την δομή του προηγούμενου Λήμματος) τέτοιοι ώστε $K(z) = C(zI-A)^{-1}B$. $\square$

<u>Ορισμός</u>: Εστω $\hat{G}(z)$ ρητή κανονική συνάρτηση μεταφοράς. Μια πραγματοποίηση (A,B,C,D) της $\hat{G}(z)$ είναι "ελάχιστη" αν η διάσταση του πίνακα A, $\dim(A)$, είναι η μικρότερη δυνατή από όλες τις πραγματοποιήσεις της $\hat{G}(z)$.

Εστω ακολουθία διανυσμάτων εισόδου

$$(\ldots u(-2), u(-1), u(0), 0, 0, \ldots)$$

και έστω ότι το σύστημα είναι σε ηρεμία σε χρόνο $k=-\infty$, δηλ. $\lim_{k\to-\infty} x(k) = \underline{0}$. Έστω ότι το σύστημα είναι γραμμικό, αιτιατό, χρονικά αναλλοίωτο με ακολουθία Markov $\{0, G_1, G_2, G_3, \dots\}$. Τότε για $t \geq 1$,

$$\underline{y}_t = G_1 \underline{u}_{t-1} + G_2 \underline{u}_{t-2} + G_3 \underline{u}_{t-3} + \dots + G_k \underline{u}_{t-k} + \dots$$

Επομένως:

$$t=1: \quad \underline{y}_1 = G_1 \underline{u}_0 + G_2 \underline{u}_{-1} + G_3 \underline{u}_{-2} + \dots$$

$$t=2: \quad \underline{y}_2 = G_1 \cancel{\underline{u}_1}^{0} + G_2 \underline{u}_0 + G_3 \underline{u}_{-1} + \dots$$

$$t=3: \quad \underline{y}_3 = G_1 \cancel{\underline{u}_2}^{0} + G_2 \cancel{\underline{u}_1}^{0} + G_3 \underline{u}_0 + \dots$$

$$\vdots$$

και γενικά:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_2 & G_3 & G_4 & \cdots \\ G_3 & G_4 & G_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}}^{H \text{ (πίνακας "block-Hankel")}} \begin{bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{u}_{-1} \\ \underline{u}_{-2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

δηλ. $\underline{y}_n = \sum_{i=0}^{\infty} G_{n+i} \underline{u}_{-i}$ $\quad (n \geq 1)$.

(Παρατηρούμε ότι αν η ακολουθία $(\underline{u}_{-i})$ έχει πεπερασμένο αριθμό από μη-μηδενικούς όρους δεν υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης).

Έστω ℓ^m ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών $(u) = (\underline{u}_0, \underline{u}_{-1}, \underline{u}_{-2}, \dots)$ όπου $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^m$ $(i \leq 0)$, και ℓ^p ο χώρος των ακολουθιών $(y) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$, όπου $\underline{y}_i \in \mathbb{R}^p$ $(i \geq 1)$. Έστω ℓ_0^m ο υπόχωρος του ℓ^m των ακολουθιών "πεπερασμένης υποστήριξης", δηλ. $(u) \in \ell_0^m$ αν $\underline{u}_k \neq \underline{0}$ για πεπερασμένο αριθμό όρων k.

Έστω V ο γραμμικός μετασχηματισμός μετατόπισης:

$$V: \ell^p \to \ell^p, \quad V(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3, \ldots) = (\underline{y}_2, \underline{y}_3, \ldots).$$

Παρατηρούμε ότι $V\ell_0^p \subseteq \ell_0^p$ (δηλ. ο ℓ_0^p είναι V-αναλλοίωτος). Έστω $H: \ell_0^m \to \ell^p$ ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα μορφής block-Hankel:

$$H = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_2 & G_3 & G_4 & \cdots \\ G_3 & G_4 & G_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

δηλ. αν $\underline{u} = (\underline{u}_0, \underline{u}_{-1}, \underline{u}_{-2}, \ldots) \in \ell_0^m$, η ακολουθία $(y) = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3, \ldots) = H(u)$, $\underline{y}_i = \sum_{j=1}^{\infty} G_{i+j-1}\underline{u}_{-j+1}$ $(i \geq 1)$, δηλ. με τους συνηθισμένους κανόνες πολλαπλασιασμού πίνακα-διανύσματος:

$$\mathrm{vec}(\underline{y}_i)_{i=1}^{\infty} = H\,\mathrm{vec}(\underline{u}_{-i})_{i=0}^{\infty}$$

όπου $\mathrm{vec}(\underline{y}_i)_{i=1}^{\infty} = [\underline{y}_1^T \; \underline{y}_2^T \; \underline{y}_3^T \cdots]^T$. Ισχύει το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω Σ αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου εξόδου με ακολουθία Markov $\{G_0, G_1, G_2, \ldots\}$, $G_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $i \geq 0$. Έστω $H : \ell_0^m \to \ell^p$ ο αντίστοιχος γραμμικός μετασχηματισμός με block-Hankel πίνακα όπως ορίστηκε παραπάνω και $\mathcal{X} = \mathcal{R}(H)$ η εικόνα του H. Έστω V ο μετασχηματισμός μετατόπισης στον ℓ_p. Τότε, το Σ έχει ελάχιστη πραγματοποίηση διάστασης $k = \dim(\mathcal{X})$. Αν $k < \infty$, τότε μία ελάχιστη πραγματοποίηση του Σ είναι η $\Theta = (A, B, C, D)$, όπου:

$$A = V|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

$$B = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \end{bmatrix} : \mathbb{R}^m \to \mathcal{X}$$

$$C = [I \ 0 \ 0 \ \cdots]|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^p$$

$$D = G_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$

Απόδειξη: Έστω $\tilde{\Theta} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ πραγματοποίηση του Σ με $\dim(\tilde{A}) = n$. Ορίζουμε

$$\tilde{\Lambda} = [\,\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \; \cdots \,] : \ell_0^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} : \mathbb{R}^n \to \ell^p$$

(όπου οι ακολουθίες $(u)\in \ell^m$ και $(y)\in \ell^p$ γράφονται ως διανύσματα στήλης). Παρατηρούμε ότι ο $\tilde{\Lambda}$ είναι καλά-ορισμένος εφόσον οι ακολουθίες $(u)\in \ell_0^m$ έχουν πεπερασμένη υποστήριξη.

Εφόσον $\tilde{\Theta}$ είναι πραγματοποίηση του Σ, η j-παράμετρος Markov γράφεται ως $G_j = \tilde{C}\tilde{A}^{j-1}\tilde{B}$ $(j\geq 1)$ και $G_0 = D$. Άρα, ~~αν υπάρχει πραγματοποίηση, τότε~~

$$H = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \cdots \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B} & \cdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^4\tilde{B} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} [\,\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \cdots\,] = \tilde{\Gamma}\tilde{\Lambda}$$

και επομένως $k = \dim R(H) \leq \dim(X) \leq n$.

Άρα, αν υπάρχει πραγματοποίηση, τότε $\dim R(H) < \infty$ και η διάσταση της είναι τουλάχιστον $k = \dim R(H)$.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης αρκεί να δείξουμε ότι $\Theta = (A, B, C, D)$ όπως ορίστηκε στην διατύπωση του Θεωρήματος είναι πραγματοποίηση του Σ. Έστω ότι $\mathcal{X} = R(H)$, $\dim(\mathcal{X}) < \infty$.

Έχουμε

$$V H = \begin{bmatrix} G_2 & G_3 & \cdots \\ G_3 & G_4 & \cdots \\ G_4 & G_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} : \ell_0^m \longrightarrow \ell^p$$

και επομένως

$$V\mathcal{X} = V R(H) = R(VH) \subseteq R(H) = \mathcal{X}$$

δηλ $V\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$ και ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι V-αναλλοίωτος. Επομένως ο $A = V|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ είναι καλά ορισμένος. Επίσης, αφού $R(B) \subseteq R(H)$,

$$AB = V|_{\mathcal{X}} B = VB = \begin{bmatrix} G_2 \\ G_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

και επαγωγικά:

$$A^{j-1}B = V^{j-1}B = \begin{bmatrix} G_j \\ G_{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad j \geq 1$$

Επομένως $G_j = CA^{j-1}B = [I\ 0\ 0 \cdots]A^{j-1}B$, $j \geq 1$, και άρα $\Theta = (A, B, C, D)$ είναι πραγματοποίηση του Σ. $\square$

Ισοδύναμα Συστήματα

Έστω γραμμικό, αιτιατό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα δ.χ.

$$\Sigma(A,B,C,D) \; : \quad \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k, \quad \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k$$

$(k \geq 0)$. Ορίζουμε νέο διάνυσμα κατάστασης

$$\underline{z}_k = Q^{-1}\underline{x}_k \iff Q\underline{z}_k = \underline{x}_k, \quad Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; \det(Q) \neq 0$$

Τότε:

$$\underline{z}_{k+1} = Q^{-1}\underline{x}_{k+1} = Q^{-1}(A\underline{x}_k + B\underline{u}_k) = Q^{-1}AQ\underline{z}_k + Q^{-1}\underline{u}_k$$

και $\quad \underline{y}_k = CQ\underline{z}_k + D\underline{u}_k \quad$ και επομένως τα

δύο συστήματα

$$\Sigma(A,B,C,D) \simeq \Sigma(Q^{-1}AQ, Q^{-1}B, CQ, D)$$

είναι ισοδύναμα ως προς την σχέση εισόδου-εξόδου.

Ο πίνακας Q ορίζει μετασχηματισμό "ισοδυναμίας".

Παρατηρούμε ότι κάτω από μετασχηματισμό ισοδυναμίας:

(i) Το φάσμα του πίνακα A (και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο) είναι αναλλοίωτα:

$$\sigma(A) = \sigma(Q^{-1}AQ)$$

(μετασχηματισμός ομοιότητας).

(ii) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι αναλλοίωτη:

$$\hat{G}_1(z) = CQ(zI - Q^{-1}AQ)^{-1}Q^{-1}B + D$$

$$= CQ[Q^{-1}(zI-A)Q]^{-1}Q^{-1}B + D$$

$$= CQ.Q^{-1}(zI-A)^{-1}Q.Q^{-1}B + D$$

$$= C(zI-A)^{-1}B + D = \hat{G}(z).$$

(iii) Η ακολουθία Markov είναι αναλλοίωτη. Στις αρχικές συντεταγμένες:

$$G_0 = D, \quad G_i = CA^{i-1}B \quad (i \geq 1)$$

Στις νέες συντεταγμένες επίσης:

$$\tilde{G}_0 = D, \quad \tilde{G}_i = CQ(Q^{-1}AQ)^{i-1}Q^{-1}B$$

$$= CQQ^{-1}A^{i-1}QQ^{-1}B$$

$$= CA^{i-1}B = G_i \quad (i \geq 1)$$

Οι σχέσεις είναι προφανείς αφού η σχέση εισόδου-εξόδου είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας που ουσιαστικά αντιστοιχεί σε "αλλαγή συντεταγμένων" του διανύσματος κατάστασης.

Παρατήρηση: Από την ισοδυναμία συστημάτων καταστάσεως χώρου είναι προφανές ότι η πραγματοποίηση συστήματος από την συνάρτηση μεταφοράς δεν είναι μοναδική.

<u>Παρατήρηση</u>: Μια δεύτερη πηγή μη μοναδικότητας στην επίλυση του προβλήματος πραγματοποίησης προκύπτει από τις ιδιότητες ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας που ορίζονται στην συνέχεια.

Έστω σύστημα με πραγματοποίηση

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u_k$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\hat{G}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{z-1}$$

που ταυτίζεται με την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος: $\xi_{k+1} = \xi_k + u_k$, $y_k = \xi_k$. Οι ακολουθίες Markov είναι επίσης ίδιες. Για το σύστημα στην πρώτη (μη-ελάχιστη) πραγματοποίηση έχουμε $G(0)=0$ και

$$G_i = CA^{i-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{i-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad (i \geq 1).$$

Για το σύστημα στην δεύτερη (ελάχιστη) πραγματοποίηση

$$\frac{1}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = z^{-1}(1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) = z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots$$

και επομένως έχουμε πάλι $G_0 = 0$ και $G_i = 1$ $(i \geq 1)$.

Διακριτοποίηση συστημάτων συνεχούς χρόνου

Πολλές φορές τα μοντέλα διακριτών συστημάτων προκύπτουν από την διακριτοποίηση συστημάτων συνεχούς χρόνου μέσω ψηφιακού υπολογιστή.

Έστω γραμμικό, αιτιατό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα καταστάσεων χώρου συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\Sigma: \quad \underline{x}'(t) = A\,\underline{x}(t) + B\,\underline{u}(t), \quad \underline{y}(t) = C\,\underline{x}(t) + D\,\underline{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

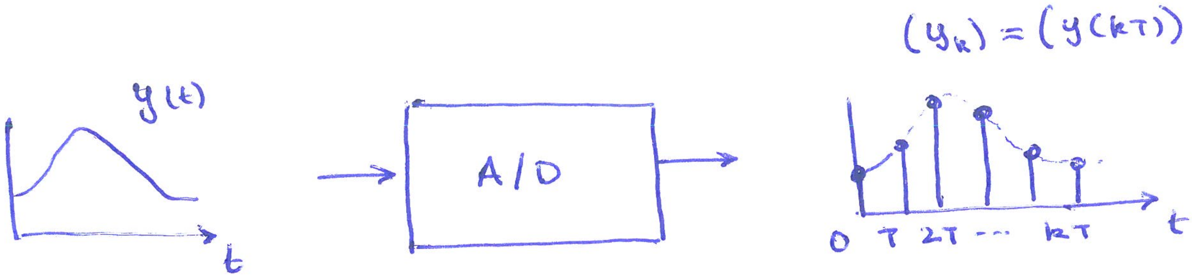
Για την διακριτοποίηση του Σ εφαρμόζουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

(α) Εφαρμόζουμε περιοδική δειγματοληψία της συνάρτησης ("σήματος") συνεχούς χρόνου $\underline{y}(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T, από την οποία προκύπτει συνάρτηση διακριτού χρόνου (ακολουθία) εξόδου

$$(\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (y(kT))_{k\in\mathbb{N}_0}$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη γενικότητας ότι ο πρώτος όρος της ακολουθίας αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή $t=kT=0$ (δείκτης $k=0$). Ηλεκτρονικά η διαδικασία υλοποιείται μέσω Αναλογικού/Ψηφιακού μετατροπέα (Analogue/Digital Converter) στην κάρτα DAQ ψηφιακού υπολογιστή.

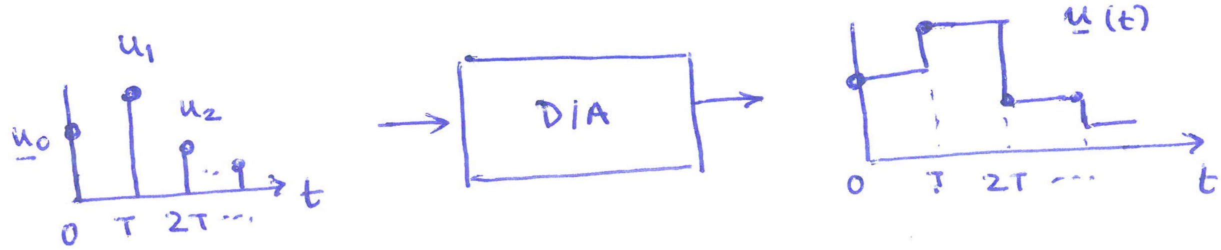
Διαγραμματικά:



(β) Έστω $\{\underline{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ψηφιακό σήμα (ακολουθία διανυσμάτων διακριτού χρόνου) που επιθυμούμε να εφαρμόσουμε περιοδικά στην είσοδο του ισοδύναμου ~~διακριτού χρ~~ συστήματος διακριτού χρόνου (με την ίδια περίοδο T και σε συγχρονισμό με τις χρονικές στιγμές στις οποίες ορίζεται η δειγματοληψία του σήματος εξόδου). Γιά να εφαρμόσουμε το σήμα αυτό στην είσοδο του συστήματος συνεχούς χρόνου (Σ) πρέπει να μετατρέψουμε την ακολουθία (ψηφιακό σήμα) σε σήμα συνεχούς χρόνου (αναλογικό σήμα). Συνήθως ορίζουμε την συνάρτηση εισόδου (σήμα εισόδου) ως:

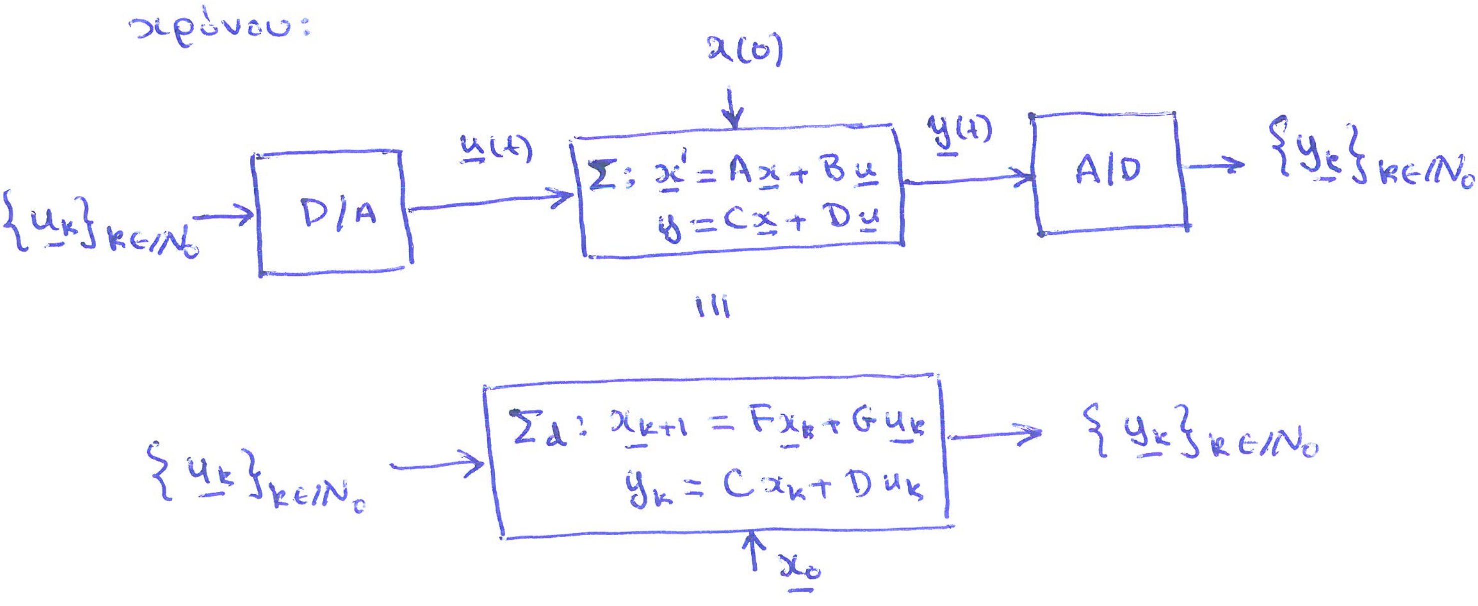
$$\underline{u}(t) = \underline{u}_k , \quad kT \leq t < (k+1)T , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Ηλεκτρονικά η διαδικασία αυτή υλοποιείται μέσω Ψηφιακού / Αναλογικού μετατροπέα τύπου ZOH (zero-order-hold). Σχηματικά:



Παρατηρούμε ότι η u(t) είναι τμηματικά συνεχής.

Το σύστημα Σ με τους δύο μετατροπείς στην είσοδο και την έξοδο είναι ισοδύναμο με σύστημα διακριτού χρόνου:



Το ισοδύναμο σύστημα (ως προς την απεικόνιση $\{\underline{u}_k\} \to \{\underline{y}_k\}$) προκύπτει από τους παρακάτω υπολογισμούς:

Η απόκριση του συστήματος Σ είναι:

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \quad , t \geq 0$$

$$y(t) = Ce^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\,\underline{u}(t)$$

Έστω $\underline{x}_k = x(kT)$, $k \geq 0$, και $\underline{u}_k = u(kT)$, $k \geq 0$, όπου T η περίοδος δειγματοληψίας. Τότε:

$$\underline{x}_{k+1} = e^{A(k+1)T}\underline{x}_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \quad (*)$$

Επίσης

$$\underline{x}_k = e^{AkT}\underline{x}_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow e^{AT}\underline{x}_k = e^{A(k+1)T}\underline{x}_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT+T-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \quad (**)$$

Αφαιρώντας την (**) από την (*),

$$\underline{x}_{k+1} - e^{AT}\underline{x}_k = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau .$$

Με την αλλαγή μεταβλητών

$$\lambda = kT + T - \tau \Rightarrow d\lambda = -d\tau$$

$$\tau = kT \Rightarrow \lambda = T, \quad \tau = (k+1)T \Rightarrow \lambda = 0$$

έχουμε:

$$\underline{x}_{k+1} = e^{AT}\underline{x}_k + \left(\int_0^T e^{A\lambda}\, d\lambda\right) B\, \underline{u}_k$$

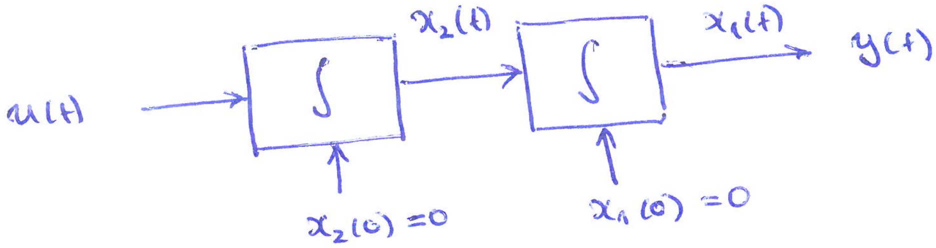
$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k$$

Εφόσον $u(t) = u_k$ στό διάστημα $kT \le t < (k+1)T$.

Επομένως το ισοδύναμο διακριτό σύστημα είναι:

$$\Sigma_d(F, G, C, D), \quad F = e^{AT} \quad \text{και} \quad G = \left(\int_0^T e^{A\lambda}\, d\lambda\right) B$$

Παράδειγμα: Έστω σύστημα συνεχούς χρόνου που αντιστοιχεί σε "διπλό ολοκληρωτή", δηλ.



Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα είναι:

$$x_2' = u \quad \text{και} \quad x_1' = x_2$$

Επίσης έχουμε $y = x_1$ και επομένως:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D.} u$$

Έστω ότι το σύστημα διακριτοποιείται μέ περίοδο δειγματοληψίας T. Τότε:

$$F = e^{AT}, \quad G = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda\right) B, \quad e^{A\lambda} = I + A\lambda + \frac{A^2\lambda^2}{2!} + \cdots$$

Στην περίπτωση αυτή ο A είναι μηδενοδύναμος και $A^k = 0$ για $k \geq 2$. Επομένως

$$e^{A\lambda} = I + A\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad e^{AT} = F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$G = \int_0^T e^{A\lambda} B \, d\lambda = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\lambda = \int_0^T \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} d\lambda$$

$$= \begin{bmatrix} \left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^T \\ \left[\lambda\right]_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}.$$

Το ισοδύναμο διακριτό σύστημα είναι $\underline{x}_{k+1} = F\underline{x}_k + G\underline{u}_k$ η,

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^1_{k+1} \\ x^2_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1_k \\ x^2_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1_k \\ x^2_k \end{bmatrix} + [0] u_k \end{aligned}\right\} \Sigma_d.$$

Ισοδύναμα:

$$\Sigma_d: \; x^1_{k+1} = x^1_k + T x^2_k + \frac{T^2}{2} u_k, \; x^2_{k+1} = x^2_k + T u_k, \; y_k = x^1_k$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\hat{G}_d(z) = C(zI - F)^{-1} G = [1 \; \vdots \; 0] \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

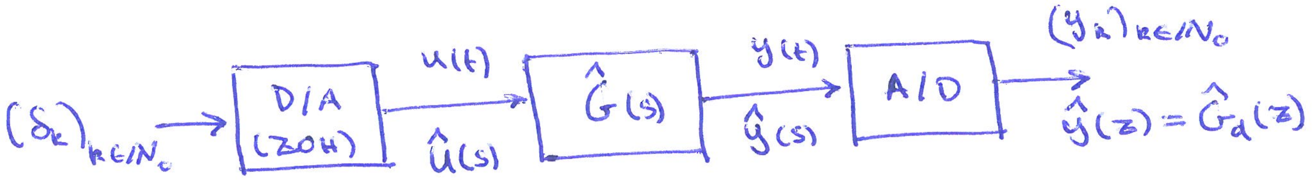
$$= [1 \; ; \; 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{T}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\frac{T^2}{2}}{z-1} + \frac{T^2}{(z-1)^2} = \frac{T^2}{2}\,\frac{z-1+2}{(z-1)^2} = \frac{T^2}{2}\,\frac{z+1}{(z-1)^2}$$

□

Γενικά, έστω ~~$\hat{G}(z)$~~ $\hat{G}(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος συνεχούς χρόνου (μιας εισόδου και μιας εξόδου για απλούστευση). Ποια είναι η ~~ισοδύναμη~~ η ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς $G_d(z)$ του διακριτού συστήματος αν η περίοδος δειγματοληψίας είναι T;

Από την προηγούμενη ανάλυση αν το σύστημα συνεχούς χρόνου Σ είναι σύστημα καταστάσεως χώρου, το ίδιο ισχύει για το ισοδύναμο διακριτό σύστημα. Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του ισοδύναμου διακριτού συστήματος, $\hat{G}_d(z)$, είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της κρουστικής του απόκρισης. Εφαρμόζουμε ακολουθία κρούσης $(\delta_k) = (1,0,0,\dots)$ στην είσοδο του συστήματος:



Η συνάρτηση $u(t)$ στην έξοδο του ψηφιακού/αναλογικού (D/A) μετατροπέα τύπου ZOH είναι

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= 1 \qquad 0 \le t < T \\ &= 0 \qquad t \ge T \end{aligned}\right\}.$$

Επομένως $\hat{u}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$ και $\hat{y}(s) = \frac{\hat{G}(s)}{s} - e^{-sT}\frac{\hat{G}(s)}{s}$

Έστω $\omega(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{G}(s)}{s}\right)$. Τότε

$$y(t) = \omega(t) - \omega(t-T) \qquad t \geq 0$$

και επομένως

$$(y_k) = (y(kT)) = (\omega_k - \omega_{k-1})$$

όπου $(\omega_k) = (S_T \omega)(t) = (S_T(\mathcal{Z}^{-1}(\hat{\omega}(z))))$
και S_T ο τελεστής (περιοδικής) δειγματοληψίας στις χρονικές στιγμές $(kT)_{k\geq 0} = (0, T, 2T, \dots)$. Εφόσον $\hat{y}(z) = (1-z^{-1})\hat{\omega}(z)$ έχουμε

$$\hat{G}_d(z) = \hat{y}(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\{\omega_k\}$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\{S_T(\omega(t))\}$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\{S_T(\mathcal{L}^{-1}(\hat{\omega}(s)))\}$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{S_T\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{G}(s)}{s}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left\{S_T\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{G}(s)}{s}\right)\right)\right\}.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Συνεχίζοντας το παράδειγμα του διπλού ολοκληρωτή έχουμε

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \hat{G}_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\{S_T(\mathcal{L}^{-1}(1/s^3))\}$$

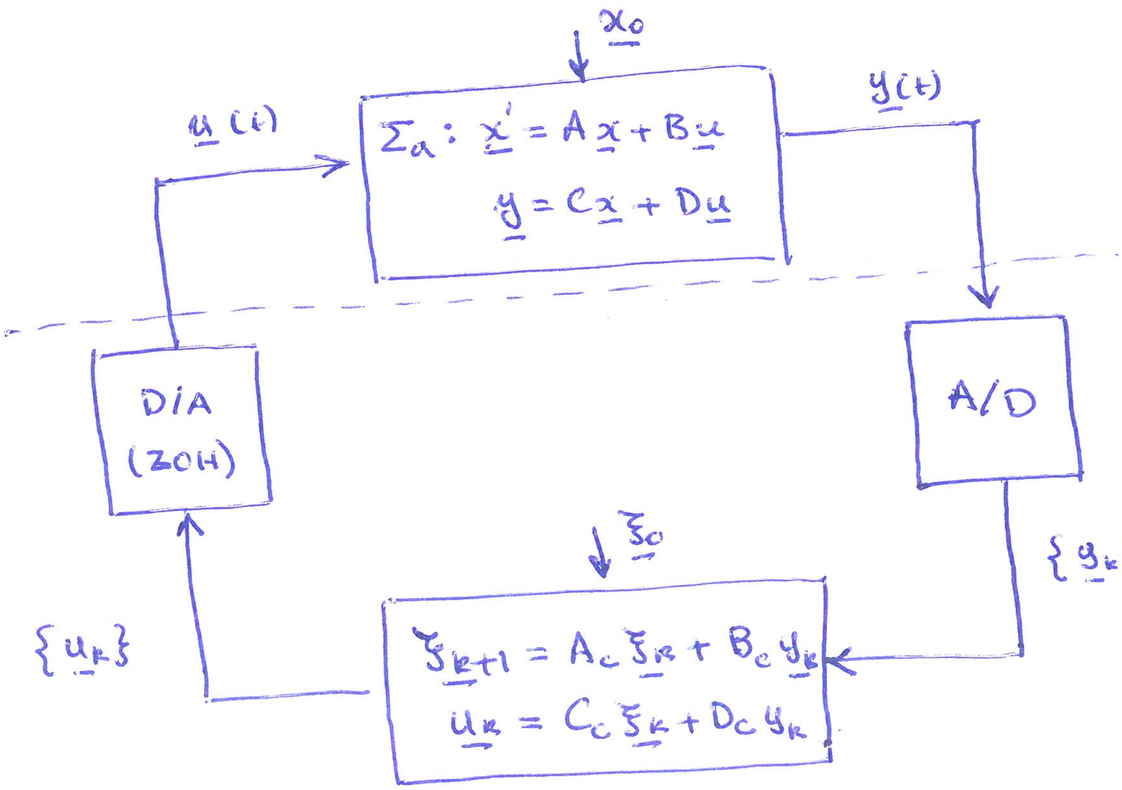
$$\Rightarrow \hat{G}_d(z) = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left\{S_T\left(\tfrac{1}{2}t^2\right)\right\} = \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\{(kT)^2\}$$

$$= \frac{T^2(z-1)}{2z}\,\mathcal{Z}\{k^2\} = \frac{T^2}{2}\,\frac{z-1}{z}\,\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

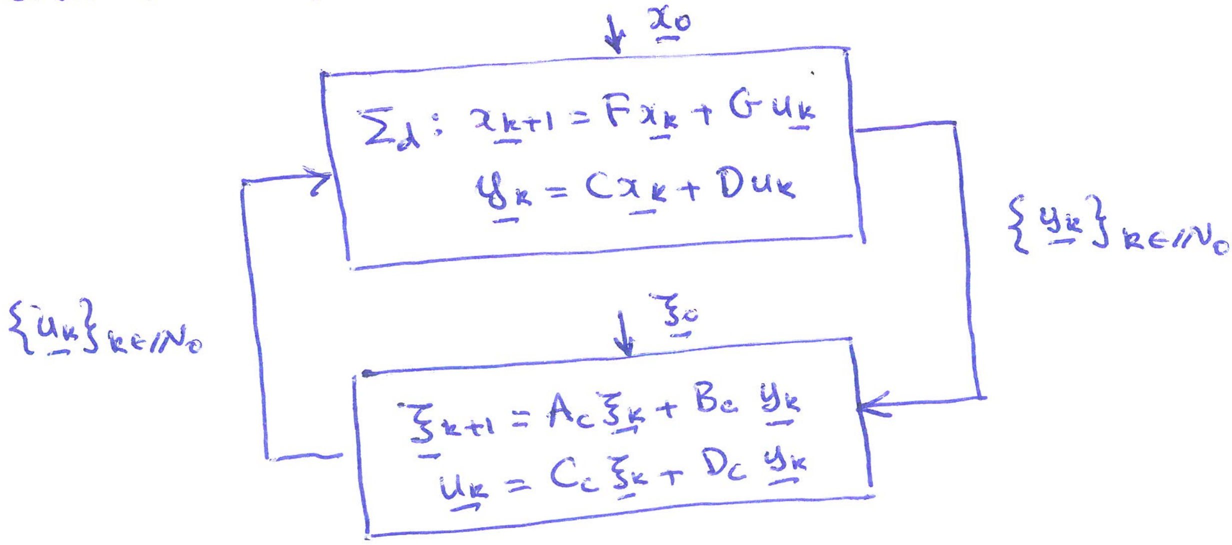
$$= \frac{T^2}{2}\,\frac{z+1}{(z-1)^3} \qquad \text{όπως προηγουμένως.}$$

Συστήματα ανάδρασης

Η συνδεσμολογία συστήματος ψηφιακής ανάδρασης περιγράφεται από το παρακάτω διάγραμμα.



Το Σ_a είναι το σύστημα συνεχούς χρόνου που ελέγχεται μέσω ψηφιακού αντισταθμιστή (ρυθμιστή) που υλοποιείται (μαζί με τους μετατροπείς D/A και A/D) εντός ψηφιακού υπολογιστή. Από την προηγούμενη ανάλυση το σύστημα είναι ισοδύναμο με:



Ο ψηφιακός αντισταθμιστής είναι κατ' ουσίαν ψηφιακός αλγόριθμος που υλοποιείται εντός του ψηφιακού υπολογιστή. Ο στόχος της σχεδίασης είναι η μεταβολή των δυναμικών χαρακτηριστικών του συνολικού συστήματος ανάδρασης (σύστημα "κλειστού βρόγχου") σύμφωνα με τις επιδιώξεις μας που περιλαμβάνουν σταθεροποίηση ασταθούς συστήματος, απόρριψη διαταραχών, μικρή ευαισθησία σε σφάλματα μοντέλου, κλπ. Το ισοδύναμο διακριτό σύστημα υπο έλεγχο ("plant") έχει παραμέτρους

$$F = e^{AT}, \quad G = \left(\int_0^T e^{A\lambda}\, d\lambda\right) B$$

όπου T η περίοδος δειγματοληψίας. Οι παράμετροι του ψηφιακού αντισταθμιστή (A_c, B_c, C_c, D_c) επιλέγονται από τον σχεδιαστή του συστήματος ώστε να επιτευχθούν οι παραπάνω στόχοι σχεδίασης.

Το ισοδύναμο σύστημα "κλειστού βρόγχου" υπολογίζεται ως εξής. Από τις εξισώσεις των δύο συστημάτων έχουμε:

$$\underline{y}_k = C \underline{x}_k + D(C_c \underline{\xi}_k + D_c \underline{y}_k)$$

$$\Rightarrow (I - DD_c)\underline{y}_k = C\underline{x}_k + DC_c \underline{\xi}_k$$

$$\Rightarrow \underline{y}_k = \underbrace{(I - DD_c)^{-1}}_{:= L_1} C \underline{x}_k + \underbrace{(I - DD_c)^{-1}}_{L_1} DC_c \underline{\xi}_k$$

υπό την προϋπόθεση ότι $\det(L_1) = \det(I - DD_c) \neq 0$ (οπότε λέμε ότι το σύστημα ανάδρασης είναι καλά-τοποθετημένο - well posed). Επίσης

$$\underline{u}_k = C_c \underline{\xi}_k + D_c \underline{y}_k = C_c \underline{\xi}_k + D_c (C \underline{x}_k + D \underline{u}_k)$$

$$\Rightarrow (I - D_c D) \underline{u}_k = C_c \underline{\xi}_k + D_c C \underline{x}_k$$

$$\Rightarrow \underline{u}_k = \underbrace{(I - D_c D)^{-1}}_{:= L_2} D_c C \underline{x}_k + \underbrace{(I - D_c D)^{-1}}_{L_2} C_c \underline{\xi}_k$$

Άσκηση: Δείξτε ότι $\det(L_1) \neq 0 \Leftrightarrow \det(L_2) \neq 0$ και ότι $(I - D_c D)^{-1} D_c = D_c (I - DD_c)^{-1}$! □

Επίσης,

$$\underline{x}_{k+1} = F \underline{x}_k + G [L_2 C_c \underline{\xi}_k + L_2 D_c C \underline{x}_k]$$

$$\underline{\xi}_{k+1} = A_c \underline{\xi}_k + B_c [L_1 C \underline{x}_k + L_1 D C_c \underline{\xi}_k]$$

Ισοδύναμα:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{\xi}_{k+1} \end{bmatrix}}_{\underline{w}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F + G L_2 D_c C & G L_2 C_c \\ B_c L_1 C & A_c + B_c L_1 D C_c \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{\xi}_k \end{bmatrix}}_{\underline{w}_k}$$

Που είναι της μορφής:

$$\underline{w}_{k+1} = A_{cl} \underline{w}_k \Rightarrow \underline{w}_k = A_{cl}^k \underline{w}_0 \quad (k \geq 0).$$

Το γενικό πρόβλημα ελέγχου αφορά την επιλογή των παραμέτρων του αντισταθμιστή (A_c, B_c, C_c, D_c) ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου: $\underline{w}_{k+1} = A_{cl} \underline{w}_k$ να έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση $D=0$, $D_c=0$ ($\Rightarrow L_1 = I$ και $L_2 = I$) οι εξισώσεις απλοποιούνται και έχουμε

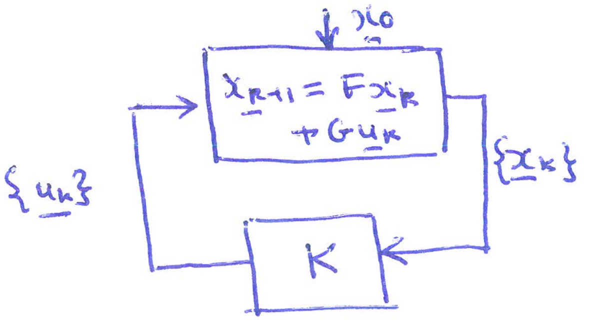
$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{\xi}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & GC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}}_{A_{ce}} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{\xi}_k \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A_{ce} γράφεται:

$$A_{ce} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$:= F_a + G_a \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix} C_a$$

Ανάδραση καταστάσεων: Στην προηγούμενη (γενική) περίπτωση το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}_k$ δεν είναι προσβάσιμο (μετρήσιμο) και η είσοδος του αντισταθμιστή είναι η έξοδος του συστήματος. Ο αντισταθμιστής είναι επίσης δυναμικό σύστημα. Στην ειδική περίπτωση που το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}_k$ είναι προσβάσιμο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σταθερό αντισταθμιστή $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, δηλ. η έξοδος του αντισταθμιστή είναι $\underline{u}_k = K \underline{x}_k$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα "κλειστού βρόγχου" είναι:

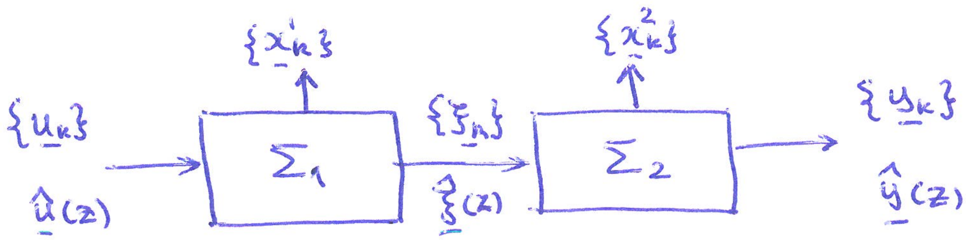


$$\underline{x}_{k+1} = F \underline{x}_k + G(K x_k)$$
$$= \underbrace{(F + GK)}_{A_c} x_k$$

και το πρόβλημα ανάγεται στην επιλογή του K ώστε ο πίνακας A_c να έχει τις επιθυμητές ιδιότητες

Στην συνέχεια αναλύονται δύο επιπλέον συνδεσμολογίες συστημάτων, σε σειρά και σε παράλληλα.

(α)



Έστω Σ_1 και Σ_2 σε σειρά, $\Sigma_i(A_i, B_i, C_i, D_i)$ $i=1,2$ και συναρτήσεις μεταφοράς $\hat{G}_1(z)$ και $\hat{G}_2(z)$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις κατάστασης χώρου γράφονται:

$$\Sigma_1: \quad \underline{x}_{k+1}^1 = A_1 \underline{x}_k^1 + B_1 \underline{u}_k, \quad \underline{\xi}_k = C_1 \underline{x}_k^1 + D_1 \underline{u}_k$$

$$\Sigma_2: \quad \underline{x}_{k+1}^2 = A_2 \underline{x}_k^2 + B_2 \underline{\xi}_k, \quad \underline{y}_k = C_2 \underline{x}_k^2 + D_2 \underline{\xi}_k$$

Επομένως:

$$\underline{x}_{k+1}^2 = A_2 \underline{x}_k^2 + B_2 (C_1 \underline{x}_k^1 + D_1 \underline{u}_k) =$$

$$\cancel{= (A_2 \underline{x}_k^2 + B_2 C_1)}$$

$$= B_2 C_1 \underline{x}_k^1 + A_2 \underline{x}_k^2 + B_2 D_1 \underline{u}_k$$

$$\underline{y}_k = C_2 \underline{x}_k^2 + D_2 (C_1 \underline{x}_k^1 + D_1 \underline{u}_k)$$

$$= D_2 C_1 \underline{x}_k^1 + C_2 \underline{x}_k^2 + D_2 D_1 \underline{u}_k.$$

Το σύστημα καταστάσεων χώρου του $\Sigma : \Sigma_1 \Sigma_2$

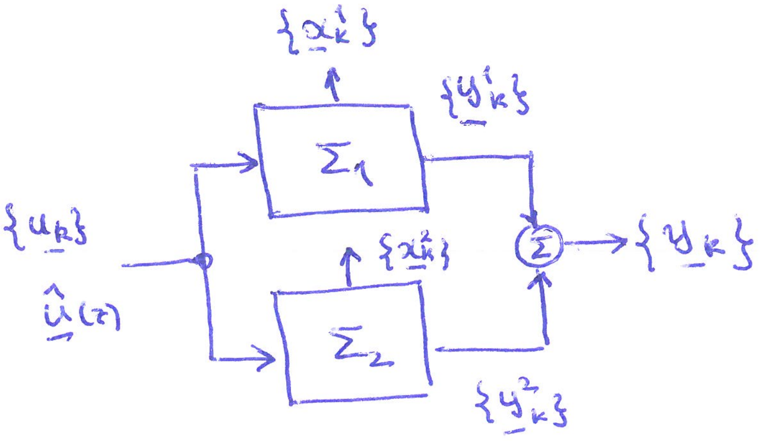
$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1}^1 \\ \underline{x}_{k+1}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k^1 \\ \underline{x}_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k^1 \\ \underline{x}_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_2 D_1 \end{bmatrix} \underline{u}_k \end{aligned}\right\} \Sigma$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του Σ είναι:

$$\hat{\underline{y}}(z) = \hat{G}_2(z)\,\hat{\underline{\xi}}(z) = \hat{G}_2(z)\,\hat{G}_1(z)\,\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{y}}(z) = \hat{G}(z)\,\hat{\underline{u}}(z), \qquad \hat{G}(z) = \hat{G}_2(z)\,\hat{G}_1(z)$$

(β)



Εξισώσεις καταστάσεως χώρου $\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$

$$\underline{x}_{k+1}^1 = A_1 \underline{x}_k^1 + B_1 \underline{u}_k, \qquad \underline{y}_k^1 = C_1 \underline{x}_k^1 + D_1 \underline{u}_k$$

$$\underline{x}_{k+1}^2 = A_2 \underline{x}_k^2 + B_2 \underline{u}_k, \qquad \underline{y}_k^2 = C_2 \underline{x}_k^2 + D_2 \underline{u}_k$$

$$\underline{y}_k = \underline{y}_k^1 + \underline{y}_k^2 = \cancel{(C_1+C_2)}\, C_1 \underline{x}_k^1 + C_2 \underline{x}_k^2 + (D_1+D_2)\underline{u}_k$$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1}^1 \\ \underline{x}_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k^1 \\ \underline{x}_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \underline{u}_k$$

$$\underline{y}_k = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k^1 \\ \underline{x}_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix} \underline{u}_k$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του $\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$:

$$\hat{\underline{y}}(z) = \hat{\underline{y}}_1(z) + \hat{\underline{y}}_2(z) = \hat{G}_1(z)\,\hat{\underline{u}}(z) + \hat{G}_2(z)\,\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{y}}(z) = \left(\hat{G}_1(z) + \hat{G}_2(z)\right)\hat{\underline{u}}(z) =: \hat{G}(z)\,\hat{\underline{u}}(z)$$

όπου $\hat{G}(z) = \hat{G}_1(z) + \hat{G}_2(z)$

Παράδειγμα:

Έστω:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F} \underline{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G} u_k \\ y_k &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underline{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u_k \end{aligned}\right\} \Sigma_1(F, G, C, D)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \xi_k + y_k \\ u_k &= \xi_k \end{aligned}\right\} \Sigma_2(A_c, B_c, C_c, D_c)$$

$A_c = B_c = C_c = 1$

$D_c = 0$

Τότε:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \xi_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F & G C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}}_{A_{ce}} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \xi_k \end{bmatrix}$$

και
$$A_{ce} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_{ce}:

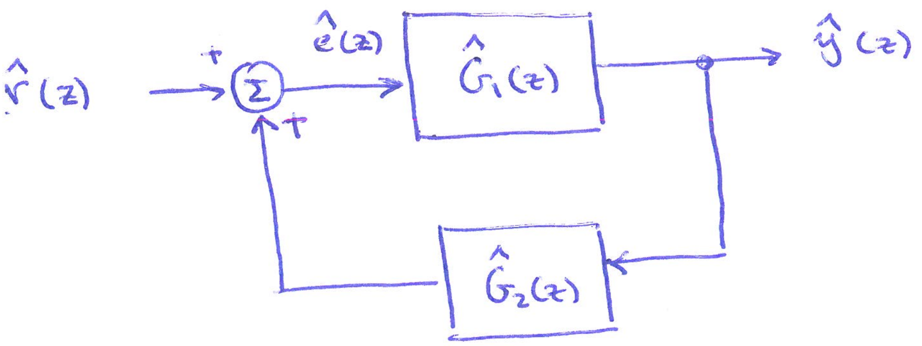
$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A_{ce}) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^3 - 1 = (\lambda-2)\left[(\lambda-1)^2 + (\lambda-1) + 1\right]$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

με ιδιοτιμές: $\sigma(A_{ce}) = \left\{2, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Μία ιδιοτιμή είναι έξω από τον μοναδιαίο κύκλο (και δύο επί του μοναδιαίου κύκλου), άρα το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι ασταθές.

Ορίζοντας είσοδο και έξοδο στό σύστημα ανάδρασης όπως δείχνει τό σχήμα:



έχουμε: $\hat{y}(z) = \hat{G}_1(z)\,\hat{e}(z) = \hat{G}_1(z)\left[\hat{r}(z) + \hat{G}_2(z)\right]$

$$\Rightarrow \left(1 - \hat{G}_1(z)\hat{G}_2(z)\right) \cdot \hat{y}(z) = \hat{G}_1(z)\,\hat{r}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{y}(z)}{\hat{r}(z)} = \frac{\hat{G}_1(z)}{1 - \hat{G}_1(z)\hat{G}_2(z)} =: \hat{G}(z)$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση:

$$\hat{G}_1(z) = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2},$$

$\hat{G}_2(z) = \frac{1}{z-1}$ και επομένως:

$$\hat{G}(z) = \frac{\hat{G}_1(z)}{1 - \hat{G}_1(z)\hat{G}_2(z)} = \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{1 - \frac{1}{(z-1)^3}} = \frac{z-1}{(z-1)^3 - 1}$$

$$= \frac{z-1}{(z-2)(z^2 - z + 1)}$$

Απόκριση συστημάτων κατάστασης χώρου

Έστω το σύστημα: $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$, $\underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k$

με λύση:

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B\, \underline{u}_j \,, \qquad (k \geq 0)$$

$$\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B\, \underline{u}_j + D\underline{u}_k$$

Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι απλής δομής (δηλ. κάθε ιδιοτιμή έχει ίση αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα), τότε διαγωνιοποιείται. Έστω $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ οι ιδιοτιμές του A και $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Αν $P = [\underline{v}_1\ \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε $\det(P) \neq 0$ και

$$P^{-1}AP =: \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$$

$$\Rightarrow P^{-1}A^kP = \Lambda^k = \mathrm{diag}\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\}$$

Επομένως:

$$\underline{x}_k = P\Lambda^k P^{-1}\underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} P\Lambda^{k-j-1} P^{-1} B\, \underline{u}_j$$

Έστω $P^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{v}}_1^T \\ \tilde{\underline{v}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\underline{v}}_n^T \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \tilde{\underline{v}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\underline{v}}_n^T \end{bmatrix} [\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n] = I_n$

Τότε :

$$\underline{x}_k = [\underline{v}_1\ \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{v}}_1^T \\ \tilde{\underline{v}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\underline{v}}_n^T \end{bmatrix} \underline{x}_0$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} [\underline{v}_1\ \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-j-1} & & & \\ & \lambda_2^{k-j-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{k-j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{v}}_1^T \\ \tilde{\underline{v}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\underline{v}}_n^T \end{bmatrix} B\underline{u}_j$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \langle \tilde{\underline{v}}_i, \underline{x}_0 \rangle \underline{v}_i + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^{k-j-1} \langle \tilde{\underline{v}}_i, B\underline{u}_j \rangle \underline{v}_i$$

όπω $\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle = \alpha^T \beta$. Η έκφραση αυτή γιά τό $\underline{x}_k$ αναφέρεται ως "modal decomposition".

Στην περίπτωση πού ο A δέν είναι απλής δομής (μία τουλάχιστον ιδιοτιμή έχει αυστηρά μεγαλύτερη αλγεβρική από γεωμετρική πολλαπλότητα), τότε το χαρ. πολυώνυμο γράφεται ως:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1} (\lambda-\lambda_2)^{\tau_2} \cdots (\lambda-\lambda_e)^{\tau_e}$$

όπω $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$. Ορίζουμε

$$d_i = \dim(\mathcal{N}_r(\lambda I - A)) := n - \nu_i, \quad \nu_i = \mathrm{Rank}[\lambda_i I - A].$$

Ο ακέραιος τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i και ο ακέραιος d_i η γεωμετρική πολλ/τα της λ_i. Έχουμε: $1 \leq d_i \leq \tau_i$. Εφόσον ο πίνακας είναι μή-απλής δομής μία ~~από τις~~ (τουλάχιστον) από τις ανισότητες $d_i \leq \tau_i$ είναι αυστηρή. ($<$). Για κάθε ιδιοτιμή

$\lambda_i \in \mathbb{C}$ ορίζουμε d_i ιδιοδιανύσματα και $\tau_i - d_i$ γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Η μορφή Jordan του πίνακα A είναι:

$$J = \text{bdiag}\{J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_e(\lambda_e)\}$$

όπου

$$J_i(\lambda_i) = \text{bdiag}\{J_{i1}(\lambda_i), J_{i2}(\lambda_i), \dots, J_{id_i}(\lambda_i)\}$$

Οι διαστάσεις $\dim[J_{ij}(\lambda_i)]$ καθορίζονται ως εξής:

Θέτουμε:

$$r_{i1} = \text{Rank}(\lambda_i I - A), \quad r_{i2} = \text{Rank}(\lambda_i I - A)^2, \dots$$

$$r_{ij} = \text{Rank}(\lambda_i I - A)^j$$

Έχουμε $r_{ij} \geq r_{i,j+1}$. Έστω l_i ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο:

$$r_{i1} > r_{i2} > \dots > r_{i,l_i} = r_{i,l_i+1}$$

Ορίζουμε την χαρακτηριστική Segré (για κάθε ιδιοτιμή)

$$S_i = [\, n - r_{i1},\ r_{i1} - r_{i2}, \dots, r_{i,l_i-1} - r_{i,l_i} \,]$$

Τότε έχουμε:

$n - r_{i1}$ = # ιδιοδιανυσμάτων της λ_i (γενικ. $1^{ης}$ τάξης)

$r_{i1} - r_{i2}$ = # γενικευμένων ιδιοδ. της λ_i $2^{ης}$ τάξης

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$r_{i,l_i-1} - r_{i,l_i}$ = # γενικευμένων ιδιοδ. της λ_i l_i τάξης

Τα μήκη των αλυσίδων που ορίζουν τις διαστάσεις Jordan, $\dim J_{ij}(\lambda_i)$, $j=1,2,\dots,d_i$, καθορίζονται από το διάγραμμα Ferre'r:

$1^{ης}$ τάξης :	$n-r_{i1}=d_i$	* * * * * *
$2^{ης}$ " :	$r_{i1}-r_{i2}$	* * * *
⋮		
ℓ_i τάξης :	$r_{i,\ell_i-1}-r_{i,\ell_i}$	* *

Τα αθροίσματα κάθε στήλης δείχνουν το μήκος της αντίστοιχης αλυσίδας ($\dim J_{ij}(\lambda_i)$).

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $A\in\mathbb{R}^{10\times 10}$ μέ $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^9(\lambda-\lambda_2)$ και : $r_{11}=5,\ r_{12}=3,\ r_{13}=2,\ r_{14}=r_{15}=1\ (\Rightarrow \ell_1=4)$.

Η χαρακτηριστική Segré για την ιδιοτιμή λ_1:

$$S_1=[n-r_{11},\ r_{11}-r_{12},\ r_{12}-r_{13},\ r_{13}-r_{14}]$$
$$=[5,\ 2,\ 1,\ 1]$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα Ferre'r

$d_1=n-r_{11}$	:	* * * * *
$r_{11}-r_{12}$	:	* *
$r_{12}-r_{13}$	:	*
$r_{13}-r_{14}$	:	*

Άρα έχουμε:

1	αλυσίδα	με	1	ιδιοδιάνυσμα	και	3	γενικευμένα
1	"	"	1	"	"	1	γενικευμένο
1	"	"	1	"	"	0	"
1	"	"	1	"	"	0	"
1	"	"	1	"	"	0	"

δηλαδή,

$$J_1(\lambda_1) = \text{bdiag}\{J_{11}(\lambda_1), J_{12}(\lambda_1), J_{13}(\lambda_1), J_{14}(\lambda_1), J_{15}(\lambda_1)\}$$

$$J_{11}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_{12}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{13}(\lambda_1) = J_{14}(\lambda_1) = J_{15}(\lambda_1) = \lambda_1, \quad J_{21}(\lambda_2) = \lambda_2$$

Οι αλυσίδες Jordan είναι

$$A\left[\underline{u}_{11}^{(1)} \mid \underline{u}_{12}^{(1)} \mid \underline{u}_{13}^{(1)} \mid \underline{u}_{14}^{(1)}\right] = \left[\underline{u}_{11}^{(1)} \mid \underline{u}_{12}^{(1)} \mid \underline{u}_{13}^{(1)} \mid \underline{u}_{14}^{(1)}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\left[\underline{u}_{21}^{(1)} \mid \underline{u}_{22}^{(1)}\right] = \left[\underline{u}_{21}^{(1)} \mid \underline{u}_{22}^{(1)}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$A\,\underline{u}_{31}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{31}^{(1)}, \quad A\,\underline{u}_{41}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{41}^{(1)}, \quad A\,\underline{u}_{51}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{51}^{(1)}$$

και $A\,\underline{u}_{11}^{(2)} = \lambda_2 \underline{u}_{11}^{(2)}$. Οι πρώτες δύο αλυσίδες γράφονται:

$A\,\underline{u}_{11}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{11}^{(1)}$, $A\,\underline{u}_{12}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{12}^{(1)} + \underline{u}_{11}^{(3)}$, $A\,\underline{u}_{13}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{13}^{(1)} + \underline{u}_{12}^{(1)}$,

$A\,\underline{u}_{14}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{14}^{(1)} + \underline{u}_{13}^{(1)}$

Επίσης: $A\,\underline{u}_{21}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{21}^{(1)}$, $A\,\underline{u}_{22}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{22}^{(1)} + \underline{u}_{21}^{(1)}$ $\square$

Επομένως στην περίπτωση αυτή (πίνακας μη-απλής δομής)

$$P^{-1} A P = \text{bdiag}\{J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_e(\lambda_e)\} := J$$

$$\Rightarrow A = P J \cancel{J} P^{-1} \Rightarrow A^k = P J^k P^{-1},$$ όπου

$$J^k = \text{bdiag}\{J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \dots, J_e^k(\lambda_e)\}$$, και

$$J_i^k(\lambda_i) = \text{bdiag}\{J_{i1}^k(\lambda_i), J_{i2}^k(\lambda_i), \dots, J_{i,l_i}^k(\lambda_i)\}$$

όπου,

$$J_{ij}^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}^k$$

Έστω ότι $J_{ij} \in \cancel{\mathbb{R}}\, \mathbb{C}^{q\times q}$. Τότε:

$$J_{ij}^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & {}^kC_1 \lambda_i^{k-1} & {}^kC_2 \lambda_i^{k-2} & \cdots & {}^kC_{q-1}\lambda_i^{k-q+1} \\ 0 & \lambda_i^k & {}^kC_1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & {}^kC_{q-2}\lambda_i^{k-q+2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & {}^kC_1 \lambda_i^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

όπου ${}^kC_q =: \binom{k}{q} = \dfrac{k!}{q!\,(k-q)!}$ αν $k \geq q$, ${}^kC_q = 0$ αν $k<q$

Παράδειγμα: Έστω $J_{ij}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$,

$$J_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Γράφουμε:

$$J_{ij}(\lambda_i) = \lambda_i I_3 + H_3 \;, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο H είναι μηδενοδύναμος και:

$$H^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H^k = 0 \,, \quad k \geq 3$$

Επομένως:

$$J_{ij}^k(\lambda_i) = (\lambda_i I_3 + H_3)^k = \lambda_i^k I_3 + k\lambda_i^{k-1} H_3 + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_i^{k-2} H_3^2$$

$$= \lambda_i^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + k\lambda_i^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_i^{k-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)\lambda_i^{k-2} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

$k \geq 3$. Επίσης,

$$J_{ij}^0 = I_3, \quad J_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad J_{ij}^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ 0 & 0 & \lambda_i^2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Έστω σύστημα $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ όπου ο A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$q(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = (\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2),$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_1 είναι $d_1 = 1$. Τότε, στην ιδιοτιμή λ_1 αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα και ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Επομένως, αν

$$P = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3] \Rightarrow P^{-1}AP = J = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A = PJP^{-1} \Rightarrow A^k = PJ^kP^{-1} = P\left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2^k \end{array}\right]P^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_k = A^k\underline{x}_0 = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3]\begin{bmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{\tilde{u}}_1^T \\ \underline{\tilde{u}}_2^T \\ \underline{\tilde{u}}_3^T \end{bmatrix}\underline{x}_0$$

$$= [\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3]\begin{bmatrix} \lambda_1^k(\underline{\tilde{u}}_1^T\underline{x}_0) + k\lambda_1^{k-1}(\underline{\tilde{u}}_2^T\underline{x}_0) \\ \lambda_1^k(\underline{\tilde{u}}_2^T\underline{x}_0) \\ \lambda_2^k(\underline{\tilde{u}}_3^T\underline{x}_0) \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1^k(\underline{\tilde{u}}_1^T\underline{x}_0)\underline{u}_1 + k\lambda_1^{k-1}(\underline{\tilde{u}}_2^T\underline{x}_0)\underline{u}_1 + \lambda_1^k(\underline{\tilde{u}}_2^T\underline{x}_0)\underline{u}_2 + \lambda_2^k(\underline{\tilde{u}}_3^T\underline{x}_0)\underline{u}_3$$

όπου:

$$\begin{bmatrix} \underline{\tilde{u}}_1^T \\ \underline{\tilde{u}}_2^T \\ \underline{\tilde{u}}_3^T \end{bmatrix} = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3]^{-1}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω το σύστημα $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$\varphi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda-2)^3$$

Άρα $\lambda = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\tau = 3$.

Ιδιοδιανύσματα:

$$(\lambda I - A)\underline{u}_1 = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 + 3\gamma_1 = 0, \ \gamma_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \gamma_1 = 0 \quad \text{και} \quad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $d = 1$ (γεωμετρική πολλαπλότητα) και έχουμε 1 γενικευμένο ιδιοδ. $2^{ης}$ τάξης και 1 γενικευμένο ιδιοδ. $3^{ης}$ τάξης, έστω $\underline{u}_2$ και $\underline{u}_3$. Από την αλυσίδα Jordan,

$$\left.\begin{aligned} A\underline{u}_1 &= \lambda \underline{u}_1 \\ A\underline{u}_2 &= \lambda \underline{u}_2 + \underline{u}_1 \\ A\underline{u}_3 &= \lambda \underline{u}_3 + \underline{u}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A\underline{u}_1 &= 2\underline{u}_1 \\ A\underline{u}_2 &= 2\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A\underline{u}_3 &= 2\underline{u}_3 + \underline{u}_2 \end{aligned}$$

Έστω $\underline{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)^T$ και $\underline{u}_3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)^T$. Έχουμε:

$$\begin{bmatrix}0&-1&-3\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-\beta_2-3\gamma_2=-1\\ \gamma_2=0\end{matrix}\right\}.$$

$\Rightarrow$ $\beta_2=1$, $\gamma_2=0$, α_2 αυθαίρετο. Επιλέγουμε $\alpha_2=0$, άρα

$u_2=[0\ \ 1\ \ 0]^T$. Τότε:

$$\begin{bmatrix}0&-1&-3\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_3\\ \beta_3\\ \gamma_3\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-\beta_3-3\gamma_3=0\\ \gamma_3=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\beta_3=3$, $\gamma_3=-1$, α_3 αυθαίρετο (έστω 0). Άρα

$$P=[\underline{u_1}\ \ \underline{u_2}\ \ \underline{u_3}] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&-1\end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix}\tilde{u}_1^T\\ \tilde{u}_2^T\\ \tilde{u}_3^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x_k} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&-1\end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}^k}_{J^k}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&-1\end{bmatrix}}_{P^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}}_{\underline{x_0}}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^k&k2^{k-1}&\frac{1}{2}k(k-1)2^{k-2}\\0&2^k&k2^{k-1}\\0&0&2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2^k&k2^{k-1}&\frac{1}{2}k(k-1)2^{k-2}\\0&2^k&k2^{k-1}+3\cdot 2^k\\0&0&-2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2^k+\frac{5}{2}k2^k-\frac{1}{8}(k-k^2)2^k\\ 5\cdot 2^k-k2^{k-1}-3\cdot 2^k\\ 2^k\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k + \frac{5}{2} k 2^k - \frac{1}{8}(k - k^2) 2^k \\ 2 \cdot 2^k - k 2^{k-1} \\ 2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k - \frac{19}{8} k 2^k + \frac{1}{8} k^2 2^k \\ 2 \cdot 2^k - \frac{k}{2} 2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{19}{8} k + \frac{k^2}{8} \\ 2 - \frac{k}{2} \\ 1 \end{bmatrix} 2^k$$

<u>Μιγαδικές ιδιοτιμές:</u> Έστω σύστημα $\underline{y}_{k+1} = A\,\underline{y}_k$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) := (\lambda - \sigma)^2 + \omega^2, \quad \omega \neq 0$$

$\lambda, \omega \in \mathbb{R}$. Οι ιδιοτιμές του A είναι μιγαδικές συζυγείς, $\lambda = \sigma \pm i\omega$. Έστω $(\lambda, \underline{u})$ ζεύγος ιδιοτιμής / ιδιοδιανύσματος και $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$, $\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^2$, $(\underline{x}^T \,\vdots\, \underline{z}^T) \neq \underline{0}^T$. Τότε:

$$A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma\underline{x} - \omega\underline{z}) + i(\omega\underline{x} + \sigma\underline{z})$$

$$\Rightarrow A[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

Τα διανύσματα $(\underline{x}, \underline{z})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο $\mathbb{R}^2$. Γιατί έστω $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ και $c_1\underline{x} + c_2\underline{z} = \underline{0}$. Τότε $c_2 \neq 0$ (γιατί αν $c_2 = 0$, τότε $c_1 \neq 0$ και $c_1\underline{x} = 0$ $\Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$, και τότε $A\underline{x} = \sigma\underline{x} - \omega\underline{z} \Rightarrow \omega\underline{z} = 0 \Rightarrow \underline{z} = 0$, αφού $\omega \neq 0$, και συνεπώς $\underline{u} = \underline{0}$, άτοπο). Επομένως,

$$\underline{z} = -\frac{c_1}{c_2}\underline{x} \Rightarrow A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} + i\underline{z})$$

$$\Rightarrow A\left(\underline{x} - i\frac{c_1}{c_2}\underline{x}\right) = (\sigma + i\omega)\left(\underline{x} - i\frac{c_1}{c_2}\underline{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\cancel{1-i\frac{c_1}{c_2}}\right) A\underline{x} = \left(\cancel{1-i\frac{c_1}{c_2}}\right)(\sigma+i\omega)\underline{x}$$

$$\Rightarrow A\underline{x} = (\sigma+i\omega)\underline{x}. \qquad (*)$$

Όμως $\underline{x} \neq 0$ (γιατί πάλι από την $A\underline{x} = \sigma\underline{x} - \omega\underline{z}$, αν $\underline{x}=0$ τότε $\underline{z}=\underline{0}$ $(\omega\neq 0)$, άτοπο γιατί τότε $\underline{u}=\underline{0}$).

Η εξίσωση $(*)$ οδηγεί σε άτοπο γιατί $A\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και $(\sigma+i\omega)\underline{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$. Επομένως, $\det[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \neq 0$ και

$$A = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]^{-1}$$

Έστω $\sigma = \rho\cos\theta$, $\omega = \rho\sin\theta$ $(\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$. Τότε,

$$A[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \rho\,[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = \rho\,\underbrace{A[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \rho\,[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \rho^2 [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^2$$

$$= \rho^2 [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\, R^2(\theta)$$

Ο πίνακας $R(\theta)$ είναι ορθογώνιος πίνακας (πίνακας περιστροφής) και

$$R^2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = R(2\theta)$$

και γενικά,

$$R^k(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$A^k\,[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = \rho^k\,[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^k = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \rho^k\cos(k\theta) & \rho^k\sin(k\theta) \\ -\rho^k\sin(k\theta) & \rho^k\cos(k\theta) \end{bmatrix} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]^{-1}$$

Παράδειγμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, ~~$\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$~~
$\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda^2 - 2\rho\cos\theta\cdot\lambda + \rho^2)$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 = \rho e^{i\theta} = \bar{\lambda}_4$ και ιδιοδιανύσματα $\underline{u}_1, \underline{u}_2$, $\underline{u}_r + i\underline{u}_i$, $\underline{u}_r - i\underline{u}_i$, αντίστοιχα ($\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_r, \underline{u}_i \in \mathbb{R}^4$). Τότε,

$$A = \underbrace{[\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \,\vdots\, \underline{u}_r\ \underline{u}_i]}_{U} \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho\cos\theta & \rho\sin\theta \\ 0 & 0 & -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{array}\right] \underbrace{[\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \,\vdots\, \underline{u}_r\ \underline{u}_i]^{-1}}_{U^{-1}}$$

$$\Rightarrow A^k = U \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho^k\cos(k\theta) & \rho^k\sin(k\theta) \\ 0 & 0 & -\rho^k\sin(k\theta) & \rho^k\cos(k\theta) \end{array}\right] U^{-1}$$

Παράδειγμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = ((\lambda-\sigma)^2 + \omega^2)^2$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = \sigma + i\omega$, $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\tau_1 = \tau_2 = 2$. Έστω ότι $d_1 = d_2 = 1$.

Τότε, αν:

$$\left.\begin{aligned} A(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) &= (\sigma + i\omega)(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) \\ A(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) &= (\sigma + i\omega)(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) + (\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A(\underline{x}_1 - i\underline{z}_1) &= (\sigma - i\omega)(\underline{x}_1 - i\underline{z}_1) \\ A(\underline{x}_2 - i\underline{z}_2) &= (\sigma - i\omega)(\underline{x}_2 - i\underline{z}_2) + (\underline{x}_1 - i\underline{z}_1) \end{aligned}\right\}$$

είναι οι δύο αλυσίδες Jordan που αντιστοιχούν στις δύο ιδιοτιμές λ και $\bar{\lambda}$, αντίστοιχα, γράφουμε ισοδύναμα:

$$\left.\begin{aligned} A\underline{x}_1 &= \sigma\underline{x}_1 - \omega\underline{z}_1 \\ A\underline{z}_1 &= \omega\underline{x}_1 + \sigma\underline{z}_1 \\ A\underline{x}_2 &= \sigma\underline{x}_2 - \omega\underline{z}_2 + \underline{x}_1 \\ A\underline{z}_2 &= \omega\underline{x}_2 + \sigma\underline{z}_2 + \underline{z}_1 \end{aligned}\right\}$$

Σε μορφή πινακο-εξίσωσης:

$$A\underbrace{[\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \mid \underline{x}_2\ \underline{z}_2]}_{P_r} = \underbrace{[\underline{x}_1\ \underline{z}_1 \mid \underline{x}_2\ \underline{z}_2]}_{P_r} \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right]}_{J_r}$$

Επομένως:

$$P_r^{-1} A P_r = J_r =: \left[\begin{array}{c|c} W & I_2 \\ \hline 0 & W \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow P_r^{-1} A^k P_r = J_r^k = \left[\begin{array}{c|c} W & I_2 \\ \hline 0 & W \end{array}\right]^k = \left[\begin{array}{c|c} W^k & {}^kC_1 W^{k-1} \\ \hline 0 & W^k \end{array}\right]$$

Επομένως θέτοντας $\sigma = \rho\cos\theta$, $\omega = \rho\sin\theta$

$$
J_r^k = \left[\begin{array}{c|c}
\rho^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} & k\rho^{k-1} \begin{bmatrix} \cos(k-1)\theta & \sin(k-1)\theta \\ -\sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta \end{bmatrix} \\ \hline
0 & \rho^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

Στην γενική περίπτωση που $A \in \mathbb{R}^{2q\times 2q}$, $\varphi(\lambda) = [(\lambda-\sigma)^2+\omega^2]^q$ με ιδιοτιμές $\lambda = \sigma \pm i\omega$ αλγεβρικής πολλαπλότητας q και γεωμετρικής πολλαπλότητας 1, έχουμε:

$$
J_r = \begin{bmatrix}
W & I & 0 & \cdots & 0 \\
0 & W & I & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & W & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & I \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & W
\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2q\times 2q}
$$

$$
\Rightarrow J_r^k = \begin{bmatrix}
W^k & {}^kC_1 W^{k-1} & {}^kC_2 W^{k-2} & \cdots & {}^kC_{q-1} W^{k-q+1} \\
0 & W^k & {}^kC_1 W^{k-1} & \cdots & {}^kC_{q-2} W^{k-q-2} \\
\vdots & 0 & W^k & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & {}^kC_1 W^{k-1} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & W^k
\end{bmatrix}
$$

όπου
$$
{}^kC_i = \left.\begin{array}{ll} \dfrac{k!}{i!\,(k-i)!} & i \le k \\ = 0 & i > k \end{array}\right\}
$$

Οι συναρτήσεις που ορίζονται στην πραγματική μορφή Jordan του πίνακα A^k είναι τα "modes" του συστήματος.

Έχουμε:

(i) Συναρτήσεις της μορφής λ^k, $\lambda \in \mathbb{R}$, που αντιστοιχούν σε Jordan blocks διάστασης 1. Οι συναρτήσεις αυτές συγκλίνουν στο 0 καθώς $k \to \infty$ αν $|\lambda|<1$, αποκλίνουν αν $|\lambda|>1$, είναι σταθερές αν $\lambda = 1$ ή ταλαντώνονται χωρίς απόσβεση αν $\lambda = -1$

(ii) Συναρτήσεις της μορφής $p(k)\lambda^k$ όπου $p(k)$ πολυώνυμο του k. Οι συναρτήσεις αυτές συγκλίνουν στο 0 αν $|\lambda|<1$, αποκλίνουν εκθετικά αν $|\lambda|>1$, αποκλίνουν πολυωνυμικά αν $|\lambda|=1$

(iii) Συναρτήσεις της μορφής $\rho^k \cos(k\theta+\varphi)$. Οι συναρτήσεις ταλαντώνονται χωρίς απόσβεση αν $\rho=1$, ταλαντώνονται με απόσβεση αν $\rho<1$, ή ταλαντώνονται με αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης αν $\rho>1$.

(iv) Συναρτήσεις της μορφής $\rho^k p(k) \cos(k\theta+\varphi)$. Οι συναρτήσεις αυτές ταλαντώνονται με εκθετικά αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης αν $\rho>1$, ταλαντώνονται με πολυωνυμικά αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης αν $\rho=1$ ή συγκλίνουν στο μηδέν (με απόσβεση ταλάντωσης) αν $\rho<1$.

<u>Ορισμός</u> (προσωρινός!) : Το γραμμικό σύστημα $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν $\|\underline{x}_k\| \to 0$ καθώς $k \to +\infty$ γιά κάθε $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (Ισοδύναμα αν $\|A^k \underline{x}_0\| \to 0$ $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ η $\|A^k\| \to 0$ καθώς $k \to +\infty$).

<u>Ορισμός</u> (προσωρινός) : Το γραμμικό σύστημα $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov αν η λύση του είναι φραγμένη $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

<u>Θεώρημα</u>: Το σύστημα $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν $\rho(A) < 1$, όπου $\rho(A)$ είναι η φασματική ακτίνα του A, δηλ. $\rho(A) = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} \{|\lambda_i| : \lambda_i \in \sigma(A)\}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\rho(A) < 1$ και $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο. Έστω
(⇐): Έστω $A = PJP^{-1}$ όπου J ο πίνακας Jordan του A και P ο πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων. Τότε,

$$\|\underline{x}_k\| = \|A^k \underline{x}_0\| = \|PJP^{-1}\underline{x}_0\| \leq \underbrace{\|P\|\cdot\|P^{-1}\|\cdot\|\underline{x}_0\|}_{\gamma} \|J^k\|$$

$$= \gamma(\underline{x}_0)\, \|J^k\|$$

Έστω $\varphi(A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\dots(\lambda-\lambda_e)^{\tau_e}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A όπου $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$ και τ_i η αλγεβρική πολλαπλότητα του λ_i, $i = 1,2,\dots,e$. Τότε

$$J = \mathrm{bdiag}\{J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_e(\lambda_e)\}.$$

και

$$J_i(\lambda_i) = \mathrm{bdiag}\{J_{i1}(\lambda_i), J_{i2}(\lambda_i), \dots, J_{id_i}(\lambda_i)\}$$

όπου d_i η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i, $1 \le d_i \le \tau_i$. [Για απλότητα θεωρούμε ότι η νόρμα διανυσμάτων είναι η Ευκλείδια νόρμα και η νόρμα πινάκων η φασματική νόρμα, δηλ. $\|A\| = \sigma_{max}(A)$, η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή]. Επομένως,

$$\|J^k\| = \|\mathrm{bdiag}\{J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \dots, J_e^k(\lambda_e)\}\|$$

$$= \max\{\|J_i^k\| : i = 1, 2, \dots, e\}$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}_k\| \le \gamma \max\{\|J_i^k\| : i = 1, 2, \dots, e\}.$$

Παρόμοια, γιά κάθε $i \in \{1, 2, \dots, e\}$,

$$\|J_i^k(\lambda_i)\| = \|\mathrm{bdiag}\{J_{i1}^k(\lambda_i), J_{i2}^k(\lambda_i), \dots, J_{id_i}^k(\lambda_i)\}\|$$

$$= \max\{\|J_{ij}^k(\lambda_i)\| : j = 1, 2, \dots, d_i\}$$

και επομένως

$$\|\underline{x}_k\| \le \gamma \max\{\|J_{ij}^k(\lambda_i)\| : i = 1, 2, \dots, e, \ j = 1, 2, \dots, d_i\}.$$

Όμως τα στοιχεία ~~κάθε~~ του πίνακα $J_{ij} \in \mathbb{C}^{m_{ij} \times m_{ij}}$ είναι της μορφής

$$r_{ij} \in \{k - m_{ij} + 1, \dots, k\}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{ij}^k(p,q) &= s_{ij}(k)\,\lambda_i^{r_{ij}}, && p \le q \\ &= 0 && p > q \end{aligned}\right\}.$$

όπου s πολυώνυμο της μεταβλητής k.

Και εφόσον $|\lambda_i| < 1$ $\forall i = 1, 2, \dots, e$ έχουμε ότι $|J_{ij}^k| \to 0$ καθώς $k \to +\infty$. Επομένως,

$\| A^k \underline{x}_0 \| \to 0$ γιά κάθε $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

($\Rightarrow$): Έστω $\lambda_j \in \sigma(A)$, $|\lambda_j| \geq 1$ και $\underline{u}_j$ τό αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε,

$$A\, \underline{u}_j = \lambda_j\, \underline{u}_j \Rightarrow A^k \underline{u}_j = \lambda_j^k\, \underline{u}_j$$

Αν $\lambda_j \in \mathbb{R}$, τότε $\underline{u}_j \in \mathbb{R}^n$. Θέτοντας $\underline{x}_0 = \underline{u}_j$ έχουμε:

$$\| \underline{x}_k \| = \| A^k \underline{x}_0 \| = \| \lambda_j^k \underline{x}_0 \| = |\lambda_j|^k \| \underline{x}_0 \|$$
$$\geq \| \underline{x}_0 \| > 0$$

και επομένως η ακολουθία $\| \underline{x}_k \|$ δεν μπορεί νά συγκλίνει στο 0, που αντιβαίνει την ασυμπτωτική ευστάθεια του πίνακα A.

Αν $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, τότε $\underline{u}_j \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ και η παραπάνω απόδειξη δεν ισχύει. Έστω ότι:

$\lambda_j = r e^{i\theta}$, $r \geq 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$.

και $\underline{u}_j = \underline{x} + i \underline{z}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε ότι $(\underline{x}, \underline{z})$ γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^n$. Επίσης, για $k \geq 0$,

$$A^k \underline{u}_j = \lambda_j^k \underline{u}_j = r^k e^{ik\theta}\, \underline{u}_j$$

$$\Rightarrow A^k (\underline{x} + i \underline{z}) = r^k (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\underline{x} + i \underline{z})$$

$$\Rightarrow A^k \underline{x} = r^k \cos k\theta\, \underline{x} - r^k \sin k\theta\, \underline{z} \quad \text{καί}$$

$$A^k \underline{z} = r^k \cos k\theta\, \underline{z} + r^k \sin k\theta\, \underline{x}$$

Ισοδύναμα,

$$A^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = r^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\, R(k\theta)$$

όπου

$$R(k\theta) = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

είναι ορθογώνιος πίνακας (περιστροφής). Επομένως

$$A^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \underline{x}^T \\ \underline{z}^T \end{bmatrix} (A^T)^k = r^{2k} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]. \underbrace{R(k\theta)\, R^T(k\theta)}_{I_2} \begin{bmatrix} \underline{x}^T \\ \underline{z}^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{trace}\left\{A^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \underline{x}^T \\ \underline{z}^T \end{bmatrix} (A^T)^k\right\} = r^{2k} \operatorname{trace}\left([x | z] \begin{bmatrix} x^T \\ z^T \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \| A^k [x | z] \|_F^2 = r^{2k} \operatorname{trace}\left(\begin{bmatrix} \underline{x}^T \\ \underline{z}^T \end{bmatrix} [\underline{x} | \underline{z}]\right)$$

$$= r^{2k} \operatorname{trace}\left(\begin{bmatrix} x^T x & x^T z \\ z^T x & z^T z \end{bmatrix}\right)$$

$$= r^{2k} \left(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{z}\|^2\right).$$

$$\Rightarrow \| A^k [\underline{x} | \underline{z}] \|_F = r^k \sqrt{\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{z}\|^2}.$$

Εφόσον το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές έχουμε: $\| A^k \underline{x} \| \to 0$ και $\| A^k z \| \to 0$ καθώς $k \to +\infty$ και συνεπώς

$$\| A^k \underline{x} \|^2 + \| A^k \underline{z} \|^2 = \| A^k [\underline{x} | \underline{z}] \|_F^2 = \left(r^k \sqrt{\|x\|^2 + \|z\|^2}\right)^2 \to 0 \text{ καθώς } k \to +\infty$$

που είναι αδύνατον καθώς $r \geq 1$ και επομένως

$$\| A^k \underline{x} \|^2 + \| A^k \underline{z} \|^2 \geq \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{z}\|^2 > 0 \text{ για κάθε } k \geq 0 \quad \square$$

Θεώρημα:

Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\rho(A):=\max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\}\leq 1-\varepsilon$, $0<\varepsilon\leq 1$. Τότε, για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ με $1-\varepsilon<\mu<1$ υπάρχει $C>0$ τ.ω. $\|A^k\|\leq C\cdot\mu^k$, $k\in\mathbb{N}_0$, όπου $\|\cdot\|$ είναι η φασματική νόρμα.

Απόδειξη: Γράφουμε $A=PJP^{-1}$ όπου $J\in\mathbb{C}^{n\times n}$ πίνακας Jordan και $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του A. Ο πίνακας J είναι της μορφής:

$$J=\text{bdiag}\{J_1,J_2,\dots,J_d\}$$

όπου $d=\sum d_i$, το άθροισμα των γεωμετρικών πολλαπλοτήτων των ~~ιδιοτιμών~~ διακεκριμένων ιδιοτιμών του A. Ο πίνακας J_i, $1\leq i\leq d$, είναι της μορφής

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}$$

γιά κάποια ιδιοτιμή $\lambda_i\in\sigma(A)$. Έχουμε γιά $k\in\mathbb{N}_0$,

$$A^k=PJ^kP^{-1}=P\,\text{bdiag}\{J_1^k,J_2^k,\dots,J_d^k\}P^{-1}$$

Επομένως

$$\|A^k\|=\|PJ^kP^{-1}\|\leq\|P\|\cdot\|P^{-1}\|\max\{\|J_i^k\|:i=1,2,\dots,d\}$$

$$\Rightarrow\|A^k\|\leq c_1\max\{\|J_i^k\|:i=1,2,\dots,d\},\ \forall k\in\mathbb{N}_0$$

όπου ~~$c_1\in\mathbb{R}$~~ $c_1>0$ (σταθερά).

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι για $i=1,2,\dots,d$

$J_i = \lambda_i I_{n_i} + H_i$, $\lambda \in \sigma(A)$ και

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$$

Ο πίνακας H_i είναι μηδενοδύναμος και $H_i^{k} = 0$ για $k \geq n_i$. Επομένως υπάρχει $c_2 > 0$ (ανεξάρτητος από τον i) τέτοιος ώστε:

$$\|H_i^k\| \leq c_2 (\mu - 1 + \varepsilon)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε για $i=1,2,\dots,d$:

$$\|J_i^k\| = \|(\lambda I + H_i)^k\| = \left\| \sum_{\ell=0}^{k} c_{\ell k} \lambda^\ell H_i^{k-\ell} \right\|$$

όπου $c_{\ell k} = k!/\ell!(k-\ell)!$. Άρα

$$\|J_i^k\| \leq \sum_{\ell=0}^{k} c_{\ell k} |\lambda|^\ell \|H_i^{k-\ell}\|$$

$$\leq c_2 \sum_{\ell=0}^{k} c_{\ell k} |\lambda|^\ell (\mu - 1 + \varepsilon)^{k-\ell}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα του $(|\lambda| + \mu - 1 + \varepsilon)^k$ έχουμε $\forall i=1,2,\dots,d$:

$$\|J_i^k\| \leq c_2 (|\lambda| + \mu - 1 + \varepsilon)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

όπου $\lambda \in \sigma(A)$ και $|\lambda| + \mu - 1 + \varepsilon \leq 1 - \varepsilon + \mu - 1 + \varepsilon = \mu$ και $k \in \mathbb{N}_0$.

Επομένως $\|J_i^k\| \leq c_2 \mu^k \quad \forall i=1,2,\dots,d$

$\Rightarrow \|A^k\| \leq c_1 c_2 \mu^k =: c\mu^k$ όπου $c = c_1 c_2 > 0$ □

Παρατήρηση: Αν $\rho(A) \leq 1-\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 1$, τότε γιά κάθε $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$: $\|A^k \underline{x_0}\| \leq \|A^k\| \cdot \|\underline{x_0}\| \leq c\|\underline{x_0}\| \mu^k$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ όπου $1-\varepsilon < \mu < 1$ καί επομένως $\|A^k \underline{x_0}\| \to 0$ καθώς $k \to +\infty$. Άρα το σύστημα $\underline{x_{k+1}} = A\underline{x_k}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα: Το σύστημα $\underline{x_{k+1}} = A\underline{x_k}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν και μόνο αν:

(i) $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \leq 1$, και

(ii) Κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ με $|\lambda| = 1$ έχει την ίδια αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα

Απόδειξη: Παραλείπεται!

Οι δύο έννοιες ευστάθειας που ορίστηκαν παραπάνω συχνά αναφέρονται ως "εσωτερική ευστάθεια" επειδή αφορούν την συμπεριφορά των εσωτερικών μεταβλητών ("καταστάσεων") συστήματος καταστάσεων χώρου. Στην συνέχεια ορίζουμε μία έννοια "εξωτερικής ευστάθειας" που αναφέρεται στην σχέση εισόδου-εξόδου:

Εξωτερική ευστάθεια (Ευστάθεια ~~εισόδου-εξόδου ή~~ φραγμένης εισόδου - φραγμένης εξόδου, BIBO = Bounded input-bounded-output).

Έστω σύστημα: $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$, $\underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k$

με $\underline{x}_0 = \underline{0}$. Το σύστημα ορίζεται ως "εξωτερικά ευσταθές"

αν υπάρχει σταθερά $c>0$, τέτοια ώστε:

$$(\|\underline{u}_k\| < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow (\|\underline{y}_k\| < c \quad \forall k \geq 0)$$

Έστω $(G(k))_{k\in\mathbb{N}_0} = (D, CB, CAB, \dots, CA^{k-1}B, \dots)$

η ακολουθία Markov του συστήματος (Σ). Τότε,

$$\underline{y}_n = \sum_{k=0}^{n} G(n-k)\underline{u}_k, \quad n \geq 0$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς του Σ είναι:

$\hat{G}(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$.

<u>Θεώρημα</u>: Το σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές αν και μόνο αν: $\sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| < \infty$.

<u>Απόδειξη</u>:

$[\sum_{k=0}^{\infty}\|G(k)\| < \infty \Rightarrow \Sigma$ εξωτερικά ευσταθές$]$. Έστω $(\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\underline{u}_k \in \mathbb{R}^m$, ακολουθία εισόδων με $\|\underline{u}_k\| \leq 1$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Τότε,

$$\|\underline{y}_n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} G(n-k)\underline{u}_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n}\|G(n-k)\|\cdot\|\underline{u}_k\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\|G(n-k)\| = \sum_{k=0}^{n}\|G(k)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|G(k)\| < \infty$$

Άρα η σειρά είναι φραγμένη και υπάρχει $c>0$ τ.ω.

$\|y_n\| \leq c$ γιά κάθε $n \geq 0$. Άρα το Σ είναι εξωτερικά ευσταθές.

[Σ εξωτερικά ευσταθές $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| < \infty$]. Εξετάζουμε πρώτα την βαθμωτή περίπτωση $G(k) \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $p = m = 1$.

Τότε (θέτοντας $g(k) := G(k)$), έχουμε:

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} g(n-k)\, u_k \,, \qquad n \geq 0$$

Υποθέτουμε (γιά αντίφαση) ότι για κάθε πεπερασμένο $L \geq 0$ υπάρχει $k_1 = k_1(L) \in \mathbb{N}_0$ τ.ω

$$\sum_{k=0}^{k_1} |g(k_1-k)| = |g(0)| + |g(1)| + \dots + |g(k_1)| > L$$

Επιλέγουμε φραγμένη είσοδο:

$$\left.\begin{aligned} u_k &= 1 && \text{αν } g(k_1-k) > 0 \\ &= 0 && \text{αν } g(k_1-k) = 0 \\ &= -1 && \text{αν } g(k_1-k) < 0 \end{aligned}\right\}$$

όπου $0 \leq k \leq k_1$. Προφανώς $|u_k| \leq 1$, $0 \leq k \leq k_1$, και

$$y_{k_1} = \sum_{k=0}^{k_1} g(k_1-k)\, u_k = \sum_{k=0}^{k_1} |g(k_1-k)| > L$$

και επομένως η ακολουθία $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ δεν είναι φραγμένη, που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι Σ είναι εξωτερικά ευσταθές. Άρα $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty$.

Στην συνέχεια η απόδειξη επεκτείνεται στην γενική περίπτωση $(m \geq 1, p \geq 1)$. Έστω ότι το σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές. Τότε κάθε φραγμένη είσοδος $(\underline{u}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\underline{u}_k \in \mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί σε φραγμένη έξοδο $(\underline{y}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\underline{y}_k \in \mathbb{R}^p$. Συνεπώς, αν η είσοδος είναι της μορφής $\underline{u}_k = [0 \cdots 0 \ [\underline{u}(k)]_i \ 0 \cdots 0]^T$ με $|[u(k)]_i| \leq 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq i \leq m$, τότε η j-συνιστώσα της εξόδου, $[\underline{y}(k)]_j$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq j \leq p$, είναι επίσης φραγμένη και επομένως $\sum_{k=0}^{\infty} |G(k)_{i,j}| < \infty$.

Από γνωστή εκτίμηση νόρμας πίνακα έχουμε:

$$\|G(k)\| \leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} |G(k)_{i,j}| \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

και επομένως:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} |G(k)_{i,j}|$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} |G(k)_{i,j}| < \infty$$

$\square$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Θα επιστρέψουμε στο πρόβλημα εσωτερικής και εξωτερικής ευστάθειας μετά την επόμενη ενότητα (Ελεγξιμότητα - Παρατηρησιμότητα)

Ελεγξιμότητα & Παρατηρησιμότητα

Έστω το σύστημα $\Sigma_i: \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$, $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 0$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Η λύση του συστήματος είναι:

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underline{u}_j, \quad k \geq 0$$

<u>Ορισμός</u>: Το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν, για κάθε ζεύγος $(\underline{x}_a, \underline{x}_b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ υπάρχει ακέραιος $r \geq 0$ και διανύσματα $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{r-1}\}$, $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 0,1,\ldots,r-1$, τέτοια ώστε το διάνυσμα $\underline{x}_r \in \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A\underline{x}_k + B\underline{u}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,r-1 \\ \underline{x}_0 &= \underline{x}_a \end{aligned}\right\}$$

να ικανοποιεί την σχέση $\underline{x}_r = \underline{x}_b$

<u>Θεώρημα</u>: (Cayley - Hamilton): Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλ. αν $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 \neq 0$, τότε

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε κάθε πίνακας A^i, $i \geq 0$ είναι γραμμικός συνδιασμός των πινάκων $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$ δηλ. $A^i \in \langle I_n, A, \ldots, A^{n-1} \rangle$.

<u>Απόδειξη</u>: Προφανής για $i < n$. Έστω ότι για $j \geq n$ (σταθερό), το Πόρισμα ισχύει για κάθε ~~$i \leq j$~~ $0 \leq i \leq j$.

Τότε $A^j = \beta_0 I_n + \beta_1 A + \cdots + \beta_{n-1} A^{n-1}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$

Επομένως,

$$A^{j+1} = \beta_0 A + \beta_1 A^2 + \cdots + \beta_{n-2} A^{n-1} + \beta_{n-1} A^n$$

$$= \beta_0 A + \beta_1 A^2 + \cdots + \beta_{n-2} A^{n-1} + \beta_{n-1}(-a_0 I_n - a_1 A - \cdots - a_{n-1} A^{n-1})$$

$$= -a_0 \beta_{n-1} I_n + (\beta_0 - a_1 \beta_{n-1}) A + \cdots + (\beta_{n-2} - a_{n-1}\beta_{n-1}) A^{n-1}$$

$$\Rightarrow A^{j+1} \in \langle I_n, A, \ldots, A^{n-1} \rangle \qquad \square$$

<u>Θεώρημα:</u> $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\mathrm{Rank}(W) = n$, όπου:

$$W = [\, B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B \,] \in \mathbb{R}^{m \times nm}$$

(ο W είναι ο πίνακας ελεγξιμότητας).

<u>Απόδειξη:</u>

($\Leftarrow$): Έστω $\mathrm{Rank}(W) = n \Rightarrow \mathcal{R}(W) = \mathbb{R}^n$. Επομένως, γιά κάθε $\underline{x}_a, \underline{x}_b \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, \underline{\psi} \in \mathbb{R}^{nm}$ τ.ω.:

$$\underline{x}_b - A^n \underline{x}_a = W \underline{\psi}$$

Γράφουμε: $\underline{\psi}^T = [\, \underline{u}_{n-1}^T \,\vdots\, \underline{u}_{n-2}^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{u}_0^T \,]$, $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^m$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Τότε,

$$\underline{x}_b = A^n \underline{x}_a + [\, B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B \,] \begin{bmatrix} \underline{u}_{n-1} \\ \underline{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_b = A^n \underline{x}_a + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B \underline{u}_j$$

$\Rightarrow \Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο.

$(\Rightarrow)$: Έστω ότι $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο αλλά $\mathrm{Rank}(W) < n$. Τότε οι γραμμές του W είναι γραμμικά εξαρτημένες και $\exists\, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\xi} \neq \underline{0}$, τ.ω.:

$$\underline{\xi}^T [\, B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B \,] = \underline{0}^T$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T B = \underline{\xi}^T AB = \underline{\xi}^T A^2 B = \cdots = \underline{\xi}^T A^{n-1} B = \underline{0}^T$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T A^i B = \underline{0}^T \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{Πόρισμα}).$$

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ και ακολουθία εισόδων $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{k-1}\}$, $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ τ.ω. $\underline{x}_k = \underline{\xi}$ αν $\underline{x}_0 = \underline{0}$. Πράγματι, αν υπήρχε τέτοια ακολουθία, τότε

$$\underline{\xi} = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B\, \underline{u}_j$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T \underline{\xi} = \|\underline{\xi}\|^2 = \sum_{j=0}^{k-1} \underline{\xi}^T A^{k-j-1} B\, \underline{u}_j = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\xi} = \underline{0}, \text{ άτοπο.} \qquad \square$$

<u>Παρατήρηση:</u> Η απόδειξη του Θεωρήματος λέει ότι αν $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο, τότε για κάθε ζεύγος $(\underline{x}_a, \underline{x}_b)$ υπάρχει ακολουθία διανυσμάτων εισόδου που οδηγεί το σύστημα από την αρχική κατάσταση ~~x~~ $\underline{x}_a$ στην τελική κατάσταση $\underline{x}_b$ σε n το πολύ βήματα. Μια ακολουθία με αυτή την ιδιότητα είναι:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{n-1} \\ \underline{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix} = W^T (W W^T)^{-1} (\underline{x}_b - A^n \underline{x}_a)$$

Παρατηρούμε ότι $\text{Rank}(W) = n \Rightarrow W W^T > 0$. Πράγματι,

$$\underline{x}_n = A^n \underline{x}_a + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} B \underline{u}_k$$

$$= A^n \underline{x}_a + W \begin{bmatrix} \underline{u}_{n-1} \\ \underline{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix} = A^n \underline{x}_a + W W^T (W W^T)^{-1} (\underline{x}_b - A^n \underline{x}_a)$$

$$= A^n \underline{x}_a + \underline{x}_b - A^n \underline{x}_a = \underline{x}_b$$

<u>Παράδειγμα</u>: Ενα σύστημα που δεν είναι πλήρως ελέγξιμο είναι:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}^1_{k+1} \\ \hline \underline{x}^2_{k+1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}^1_k \\ \hline \underline{x}^2_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \underline{u}_k$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \underline{x}^1_{k+1} &= A_{11} \underline{x}^1_k + A_{12} \underline{x}^2_k + B_1 \underline{u}_k \\ \underline{x}^2_{k+1} &= A_{22} \underline{x}^2_k \end{aligned}\right\}$$

(Εδώ $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $\underline{x}^1_k \in \mathbb{R}^{n_1}$),

Παρατηρούμε ότι το $\underline{x}^2_k$ δεν επηρεάζεται καθόλου από την είσοδο $\underline{u}_k$ (π.χ. αν $\underline{x}^2_0 = 0 \Rightarrow \underline{x}^2_k = 0 \ \forall k \geq 0$).

Ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$W = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B], \text{ όπου}$$

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_{11}B_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

και γενικά

$$A^j B = \left[\begin{array}{c} A_{11}^j B_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \Rightarrow W = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \text{Rank}(W) \leq \dim(A_{11}) = n_1 < n.$$

(Kalman)

<u>Θεώρημα 1</u> Έστω ότι το σύστημα $\Sigma:(A,B)$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$) δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε υπάρχει μή-ιδιάζων πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$, τ.ω

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ, \quad \tilde{B} = Q^{-1}B$$

όπου:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}_{22} \end{array}\right], \quad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

και όπου $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}}$, $\tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times m}$ $(\tilde{n} < n)$ και $\Sigma:(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $W = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B]$ ο πίνακας ελεγξιμότητας και $\tilde{n} = \text{Rank}(W)$. Έστω $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{\tilde{n}}\}$ μία βάση του $\mathcal{R}(W)$ και $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_{\tilde{n}}, \underline{v}_{\tilde{n}+1}, \ldots \underline{v}_n\}$ μία βάση του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τον πίνακα $Q = [Q_1 \,\vdots\, Q_2]$, όπου

$Q_1 = [\underline{v}_1 \ \underline{v}_2 \cdots \underline{v}_{\tilde{n}}]$, $\quad Q_2 = [\underline{v}_{\tilde{n}+1} \cdots \underline{v}_n]$

δηλ. αν $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(W)$ τότε $\mathcal{X}_c \oplus \langle \underline{v}_{\tilde{n}+1}, \dots, \underline{v}_n \rangle = \mathbb{R}^n$

Ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

(I): $A\underline{v}_j \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_{\tilde{n}} \rangle$ για $j = 1, 2, \dots, \tilde{n}$ (δηλ. ο χώρος $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(W)$ είναι A-αναλλοίωτος): Έστω $\underline{v}_j$, $1 \le j \le \tilde{n}$. Εφόσον $\underline{v}_j \in \mathcal{X}_c$,

$$\underline{v}_j = [B \,\vdots\, AB \,\vdots \cdots \vdots\, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 \\ \underline{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

γιά κατάλληλα $\underline{\alpha}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots n$. Τότε:

$$A\underline{v}_j = [AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots \cdots \vdots\, A^nB] \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 \\ \underline{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton,

$$A^n = -\beta_{n-1}A^{n-1} - \beta_{n-2}A^{n-2} - \dots - \beta_0 I_n$$

όπου $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Επομένως:

$$A\underline{v}_j = \underbrace{[B \,\vdots\, AB \,\vdots \cdots \vdots\, A^{n-1}B]}_{W} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{\psi}_1} + A^nB\underline{\alpha}_n$$

$$= W\underline{\psi}_1 + [-\beta_0 B \,\vdots\, -\beta_1 AB \,\vdots \cdots \vdots\, -\beta_{n-1}A^{n-1}B]\underline{\alpha}_n$$

$$= W\underline{\psi}_1 - \underbrace{[B \,\vdots\, AB \,\vdots \cdots \vdots\, A^{n-1}B]}_{W} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0\underline{\alpha}_n \\ \beta_1\underline{\alpha}_n \\ \vdots \\ \beta_{n-1}\underline{\alpha}_n \end{bmatrix}}_{\underline{\psi}_2}$$

$$= W(\underline{\psi}_1 - \underline{\psi}_2) \Rightarrow A\underline{v}_j \in \mathcal{X}_c$$

Ο πίνακας $\tilde{A}$ ορίζεται ως $Q\tilde{A} = AQ$. Έστω ότι

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}}$$

$$\Rightarrow [Q_1 \,\vdots\, Q_2] \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = A\,[Q_1 \,\vdots\, Q_2]$$

$$\Rightarrow AQ_1 = Q_1\tilde{A}_{11} + Q_2\tilde{A}_{21}$$

Οι στήλες του πίνακα AQ_1 είναι $\{A\underline{v}_j\}_{j=1}^{\tilde{n}}$, $A\underline{v}_j \in \mathcal{X}_c$, γράφονται ως γραμμικός συνδιασμός των $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_{\tilde{n}}\}$ (με μοναδικό τρόπο) μέσω του πίνακα $Q_1\tilde{A}_{11}$ και επομένως $\tilde{A}_{21} = 0$. Ο πίνακας $\tilde{B}$ ορίζεται ως $B = Q\tilde{B}$.

Έστω ότι,

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \hline \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times m}$$

Έχουμε:

$$B = [Q_1 \,\vdots\, Q_2] \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \hline \tilde{B}_2 \end{bmatrix} = Q_1\tilde{B}_1 + Q_2\tilde{B}_2$$

Οι στήλες του B είναι οι πρώτες m στήλες του W και επομένως γράφονται ως γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων βάσης του $\mathcal{X}_c$, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_{\tilde{n}}\}$, με μοναδικό τρόπο, μέσω του πίνακα $Q_1\tilde{B}_1$ και επομένως $\tilde{B}_2 = 0$.

Επομένως δείξαμε ότι:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}_{22} \end{array}\right], \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

Απομένει να δείξουμε ότι $\Sigma_i(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο.

Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\tilde{n} &= \operatorname{Rank}\left([B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B]\right) \\
&= \operatorname{Rank}\left(Q^{-1}[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B]\right) \\
&= \operatorname{Rank}\left(Q^{-1}[B \,\vdots\, AQQ^{-1}B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}QQ^{-1}B]\right) \\
&= \operatorname{Rank}\left([Q^{-1}B \,\vdots\, Q^{-1}AQ\cdot Q^{-1}B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, Q^{-1}A^{n-1}Q\cdot Q^{-1}B]\right) \\
&= \operatorname{Rank}\left([\tilde{B} \,\vdots\, \tilde{A}\tilde{B} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \tilde{A}^{n-1}B]\right) \\
&= \operatorname{Rank}\left(\left[\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ 0\end{bmatrix} \,\vdots\, \begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ 0 & \tilde{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ 0\end{bmatrix} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ 0 & \tilde{A}_{22}\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ 0\end{bmatrix}\right]\right) \\
&= \operatorname{Rank}\left(\left[\begin{array}{c|c|c|c}\tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \cdots & \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1\\ \hline 0 & 0 & & 0\end{array}\right]\right) \\
&= \operatorname{Rank}\left([\tilde{B}_1 \,\vdots\, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1]\right) \\
&= \operatorname{Rank}\left([\tilde{B}_1 \,\vdots\, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \tilde{A}_{11}^{\tilde{n}-1}\tilde{B}_1]\right)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \Sigma_i(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. $\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο ελέγξιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(W)$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει $\mathcal{R}(B)$ (υπό την έννοια ότι αν $\mathcal{Y}$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει $\mathcal{R}(B)$, τότε $\mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{Y}$)

<u>Απόδειξη</u>: Άσκηση!

<u>Θεώρημα</u>: Το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\mathrm{Rank}([sI_n-A \,\vdots\, B])=n$ $\forall s\in\sigma(A)$.

<u>Απόδειξη</u>:

($\Rightarrow$): Έστω ότι $\Sigma_i(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αλλά $\mathrm{Rank}([s_0I_n-A \,\vdots\, B])<n$ για κάποιο $s_0\in\sigma(A)$. Τότε $\exists\, \underline{\xi}\in\mathbb{C}^n$, $\underline{\xi}\neq\underline{0}$ τ.ω

$$\underline{\xi}^T[s_0I-A \,\vdots\, B]=\underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^TB=0 \text{ και } \underline{\xi}^TA=s_0\underline{\xi}^T$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B]=\underline{0}, \text{ δηλ. } \underline{\xi}^TW=0$$

Έστω $\underline{\xi}=\underline{u}+i\underline{v}$, $\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^n$. Εφόσον $\underline{\xi}\neq\underline{0}$, ένα τουλάχιστον από τα $(\underline{u},\underline{v})$ είναι διάφορο του μηδενικού διανύσματος.

Έχουμε:

$$(\underline{u}^T+i\underline{v}^T)W=0 \Rightarrow (\underline{u}^TW)+i(\underline{v}^TW)=\underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{u}^TW=\underline{0} \text{ και } \underline{v}^TW=\underline{0}$$

Εφόσον $\underline{u}\neq\underline{0}$ ή $\underline{v}\neq 0$, $\mathrm{Rank}(W)<n \Rightarrow \Sigma_i(A,B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

($\Leftarrow$): Έστω ότι $\Sigma_i(A,B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{Rank}([sI-A \,\vdots\, B])<n$ γιά κάποιο $s\in\mathbb{C}$. Εφόσον $\Sigma_i(A,B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο $\exists\, Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q)\neq 0$, τ.ω. $\tilde{A}=Q^{-1}AQ$, $\tilde{B}=Q^{-1}B$ όπου

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{c|c}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \hline 0 & \tilde{A}_{22}\end{array}\right],\quad \tilde{B}=\left[\begin{array}{c}\tilde{B}_1\\ \hline 0\end{array}\right],\quad \tilde{A}_{11}\in\mathbb{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}},\ \tilde{B}_1\in\mathbb{R}^{\tilde{n}\times m}$$

$(\tilde{n}<n)$

Έστω ότι $s_0 \in \sigma(\tilde{A}_{22})$ και $\underline{\xi}^T \in \mathbb{C}^{n-\tilde{n}}$ το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα, δηλ. $\underline{\xi} \neq \underline{0}$, $\underline{\xi}^T \tilde{A}_{22} = s_0 \underline{\xi}^T$. Θα δείξουμε ότι $Rank([s_0 I - A \vdots B]) < n$, η ισοδύναμα ότι:

$$Rank\left(Q^{-1} [s_0 I - A \vdots B] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \right) < n$$

Έχουμε:

$$[\underline{0}^T \vdots \underline{\xi}^T] Q^{-1} [s_0 I - A \vdots B] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} =$$

$$= [\underline{0}^T \vdots \underline{\xi}^T] [s_0 I - Q^{-1} A Q \vdots Q^{-1} B] =$$

$$= [\underline{0}^T \vdots \underline{\xi}^T] \begin{bmatrix} s_0 I - \tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} & \vdots & \tilde{B}_1 \\ 0 & s_0 I - \tilde{A}_{22} & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0^T \vdots \underline{\xi}^T (s_0 I - \tilde{A}_{22}) \vdots \underline{0}^T] = \underline{0}^T$$

Επομένως οι γραμμές του πίνακα $[s_0 I - A \vdots B]$ είναι γραμμικά εξαρτημένες και επομένως $Rank[s_0 I - A \vdots B] < n$. □

<u>Παρατήρηση</u>:

Εφόσον $Rank([s_0 I - A]) = n$ αν $s_0 \notin \sigma(A)$, μία ισοδύναμη πρόταση με το Θεώρημα είναι:

$\Sigma_c(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $Rank([sI - A \vdots B]) = n$ $\forall s \in \mathbb{C}$.

<u>Παρατηρησιμότητα</u> : Έστω σύστημα:

$\Sigma: \quad \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \,, \quad \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \,, \qquad k \geq 0, \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

<u>Ερώτηση</u>: Αν η ακολουθία $\{\underline{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ είναι γνωστή και παρατηρούμε την έξοδο του συστήματος $\{\underline{y}_k : 0 \leq k \leq j\}$ είναι δυνατόν να προβλέψουμε την έξοδο γιά $k > j$;

Ναί, αν μπορούμε να εκτιμήσουμε χωρίς σφάλμα την αρχική κατάσταση $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (γιατί από τα $\underline{x}_0$ και $\underline{u}_k$ υπολογίζουμε τα διανύσματα κατάστασης $\underline{x}_k$ και από τα $\underline{x}_k$ και $\underline{u}_k$ τα διανύσματα εξόδου $\underline{y}_k$). Χωρίς βλάβη γενικότητας θεωρούμε ότι $\underline{u}_k = \underline{0}$, $k \in \mathbb{N}_0$ και εξετάζουμε το σύστημα εξόδου: $\Sigma_0(A,C)$: $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $\underline{y}_k = C\underline{x}_k$, $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω ότι η λύση του συστήματος $\Sigma_0(A,C)$ είναι $(\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ με αρχική κατάσταση $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Το σύστημα $\Sigma_0(A,C)$ είναι <u>πλήρως παρατηρήσιμο</u> αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε η αρχική ~~συνθήκη~~ κατάσταση $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ να καθορίζεται (μονοσήμαντα) από την πεπερασμένη ακολουθία $\{\underline{y}_0, \underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_k\}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν η αρχική κατάσταση $\underline{x}_0$ καθορίζεται μονοσήμαντα, το ίδιο ισχύει για την ακολουθία διανυσμάτων κατάστασης $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ και εξόδου $(\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, ως

$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0$ και $\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0$, αντίστοιχα. (Υποθέτουμε ότι οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ που ορίζουν το Σ_o είναι γνωστοί).

<u>Θεώρημα</u>: ~~Εστω ότι~~ Το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = n$ όπου,

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline CA^2 \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn\times n}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Από τις διαστάσεις του Γ_o έχουμε $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) \leq n$. Έχουμε ισότητα ($\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = n$) αν και μόνο αν οι n στήλες του Γ_o είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

<u>Απόδειξη</u>: Έχουμε: $\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0$, $k \geq 0$, και επομένως:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{y}_0 \\ \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{Y}_{n-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma_o} \underline{x}_0 = \Gamma_o \underline{x}_0$$

$(\Leftarrow)$: Αν $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = n$, τότε $\Gamma_o^T \Gamma_o$ αντιστρέψιμος και $\underline{Y}_{n-1} = \Gamma_o \underline{x}_0 \Rightarrow \Gamma_o^T \underline{Y}_{n-1} = \Gamma_o^T \Gamma_o \underline{x}_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{x}_0 = (\Gamma_o^T \Gamma_o)^{-1} \Gamma_o^T \underline{Y}_{n-1}$$

Άρα η αρχική κατάσταση $\underline{x_0}$ καθορίζεται μονοσήμαντα από τις μετρήσεις $(\underline{y_k})_{k=0}^{n-1}$ και επομένως το $\Sigma_o(A,C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

$(\Rightarrow)$: Έστω ότι $\Sigma_o(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αλλά $\text{Rank}(\Gamma_o)<n$. Τότε $\exists\, \underline{\xi}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{\xi}\neq 0$, τ.ω $\Gamma_o\underline{\xi}=\underline{0}$

$$\Rightarrow C\underline{\xi}=\underline{0},\ CA\underline{\xi}=0,\ldots,\ CA^{n-1}\underline{\xi}=\underline{0}$$

$$\Rightarrow CA^k\underline{\xi}=\underline{0}\quad \forall k\in\mathbb{N}_0 \quad \text{(Cayley-Hamilton)}$$

Συμπεραίνουμε ότι το $\Sigma_o(A,C)$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο γιατί είναι αδύνατον από την ακολουθία εξόδου $(\underline{y_k})_{k=0}^{N}$ (με αυθαίρετα μεγάλο N) να διακρίνουμε αν η αρχική κατάσταση είναι $\underline{x_0}=\underline{0}$ ή $\underline{x_0}=\underline{\xi}\ (\neq 0)$. □

<u>Θεώρημα</u>: (Δυικότητα ελεγξιμότητας / παρατηρησιμότητας). $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_o(A^T,B^T)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

<u>Απόδειξη</u>:

$\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο $\Leftrightarrow \text{Rank}([B\,|\,AB\,|\cdots A^{n-1}B])=n$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}\left(\begin{bmatrix} B^T \\ A^TB^T \\ \vdots \\ B^T(A^T)^{n-1}\end{bmatrix}\right)=n \Leftrightarrow \Sigma_o(A^T,B^T) \text{ πλήρως παρατηρήσιμο.}$$

□

Παρατήρηση: Ο ~~παρ~~ μηδενόχωρος του πίνακα Γ_o,

$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o) = \{ \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n : \Gamma_o \underline{\xi} = \underline{0} \}$ είναι ο "μη-παρατηρήσιμος" υπόχωρος του $\Sigma_o(A,C)$. Από το Θεώρημα Rank-Nullity της Γραμμικής Άλγεβρας έχουμε:

$$\mathrm{Rank}(\Gamma_o) + \mathrm{Null}(\Gamma_o) = n \Rightarrow \dim(\mathcal{X}_{\bar{o}}) = n - \mathrm{Rank}(\Gamma_o)$$

όπου $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) = \dim \mathcal{R}(\Gamma_o)$ και $\mathrm{Null}(\Gamma_o) = \dim \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ είναι ο μεγαλύτερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχεται στον ~~$\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$~~ $\mathcal{N}_c(C)$. (Άσκηση!).

Θεώρημα: $\Sigma_o(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$\mathrm{Rank}\left(\begin{bmatrix} s_o I_n - A \\ \hline C \end{bmatrix}\right) = n \quad \forall s_o \in \sigma(A)$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε δυϊκότητα ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας. Έχουμε:

$\Sigma_o(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A^T, C^T)$ πλήρως ελέγξιμο,

$$\Leftrightarrow \mathrm{Rank}([s_o I_n - A^T \,\vdots\, C^T]) = n \quad \forall s_o \in \sigma(A^T) = \sigma(A)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Rank}\left(\begin{bmatrix} s_o I - A \\ \hline C \end{bmatrix}\right) = n \quad \forall s_o \in \sigma(A)$$

$\square$