ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.

[Θ1] Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $y_{k+2} + y_{k+1} - 12\, y_k = k\, 2^k$ $\quad (k \geq 0)$

(β) $y_{k+2} + 4\, y_k = 8 \cdot 2^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ $\quad (k \geq 0)$

(α) Χαρ. εξίσωση ομογενούς $r^2 + r - 12 = (r-3)(r+4)$. Επομένως γενική λύση ομογενούς $y_k = c_1 3^k + c_2 (-4)^k$. Ψάχνουμε ειδική λύση της μορφής: $y_k^* = a_1 2^k + a_2 k 2^k$. Αντικαθιστώντας:

$$a_1 2^{k+2} + a_2 (k+2) 2^{k+2} + a_1 2^{k+1} + a_2 (k+1) 2^{k+1} - 12 a_1 2^k - 12 a_2 k 2^k = k 2^k$$

$$\Rightarrow \underbrace{(10 a_2 - 6 a_1)}_{0} 2^k \underbrace{- 6 a_2}_{1} k 2^k = k 2^k$$

$\Rightarrow a_1 = -5/18$ και $a_2 = -1/6$. Επομένως γενική λύση:

$$y_k = c_1 3^k + c_2 (-4)^k - \frac{5}{18} 2^k - \frac{1}{6} k 2^k \qquad k \geq 0$$

(β) Χαρ. εξίσωση: $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i = 2 e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$ και γενική λύση ομογενούς:

$$y_k = 2^k \left(c_1 \cos \frac{k\pi}{2} + c_2 \sin \frac{k\pi}{2} \right) \qquad k \geq 0.$$

Ειδική λύση μη ομογενούς της μορφής: $y_k^* = 2^k \left(a k \cos \frac{k\pi}{2} + b k \sin \frac{k\pi}{2} \right.$

$$\Rightarrow 2^{k+2} \left[a(k+2) \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) + b(k+2) \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) \right] +$$

$$+ 4 \cdot 2^k \left[a k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + b k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right] = 8 \cdot 2^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow a = -1,\ b = 0$. Επομένως:

$$y_k = 2^k \left(c_1 \cos \frac{k\pi}{2} + c_2 \sin \frac{k\pi}{2} - k \cos \frac{k\pi}{2} \right) \qquad k \geq 0.$$