[Θ2] Δίνεται η εξίσωση: $x_{k+1} = \dfrac{\alpha x_k}{1+\beta x_k}$ $(\alpha > 1,\ \beta > 0)$.

(α) Δείξτε ότι τα σημεία $x=0$ και $x=\frac{\alpha-1}{\beta}$ είναι τα δύο σημεία ισορροπίας που είναι ασταθή και ασ. ευσταθή, αντίστοιχα.

(β) Επαληθεύστε το αποτέλεσμα στο (α) λύνοντας την εξίσωση μέσω του μετασχηματισμού $z_k = x_k^{-1}$ $(x_k \neq 0)$.

(α) Τα σημεία ισορροπίας είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x = \frac{\alpha x}{1+\beta x} \Rightarrow x=0 \ \text{ή}\ 1 = \frac{\alpha}{1+\beta x} \Rightarrow x = \frac{\alpha-1}{\beta}$$

Επομένως σ.ι $= \{0, \frac{\alpha-1}{\beta}\}$. Έστω $f(x) = \dfrac{\alpha x}{1+\beta x}$. Τότε:

$$f'(x) = \frac{\alpha(1+\cancel{\beta x}) - \alpha \cancel{x}(\beta)}{(1+\beta x)^2} = \frac{\alpha}{(1+\beta x)^2}$$

$$f'(0) = \alpha > 1 \Rightarrow x=0 \ \text{ασταθές σ.ι}$$

$$f'\left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\left(1+\beta\frac{\alpha-1}{\beta}\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\left|f'\left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)\right| < 1 \Rightarrow x = \frac{\alpha-1}{\beta} \ \text{ασ. ευσταθές σημείο ισορροπίας}$$

(β) Θέτοντας $x_k = z_k^{-1} \Rightarrow z_{k+1}^{-1} = \dfrac{\alpha z_k^{-1}}{1+\beta z_k^{-1}} = \dfrac{\alpha}{z_k+\beta}$

$$\Rightarrow \alpha z_{k+1} = z_k + \beta \Rightarrow z_{k+1} = \frac{1}{\alpha} z_k + \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_k = \left(c - \frac{\beta}{\alpha-1}\right)\alpha^{-k} + \frac{\beta}{\alpha-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{\alpha^k(\alpha-1)}{\ldots} = \frac{\alpha-1}{\ldots} \rightarrow \frac{\alpha-1}{\ldots}$$