[Θ3] Να λυθεί το σύστημα : $\underline{y}_{k+1} = A\,\underline{y}_k + g_k$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad g_k = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε: $A^k = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$ Επομένως

$$y_k = A^k y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} g_j =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k & k2^k \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 2^{k-j-1} & (k-j-1)2^{k-j-2} \\ 0 & 2^{k-j-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} j2^{k-j-1} + (k-j-1)2^{k-j-2} \\ 2^{k-j-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k \\ 0 \end{bmatrix} + 2^k \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k-1} j\left(\frac{1}{2}\right)^j + \left(\frac{k-1}{4}\right)\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j \\ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j \end{bmatrix}$$

με χρήση της ταυτότητας: $\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j a^j = \frac{a(1-a^k) - k a^{k+1}(1-a)}{(1-a)^2}$

Επομένως

$$y_k = \begin{bmatrix} 2^k \\ 0 \end{bmatrix} + 2^k \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) - k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} + \frac{k-1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k \\ 0 \end{bmatrix} + 2^k \begin{pmatrix} -\frac{k}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{k}{2} - \frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}\right) \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k2^{k-1} - \frac{3}{4}k \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k + k2^{k-1} - \frac{3}{4}k \\ \end{bmatrix}$$