[Θ5] Έστω τα συστήματα $x_{k+1}^i = A_i x_k^i + B_i u_k$, $y_k^i = C_i x_k^i$, $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1,2\}$ όπου

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(α) Δείξτε ότι αν $x_0^1 = x_0^2 = 0$ τότε $y_k^1 = y_k^2$ $\forall k$

(β) Δείξτε ότι τα δύο συστήματα δεν είναι ισοδύναμα.

(α) Αν $x_0^1 = x_0^2 = \underline{0}$, τότε

$$y_k^1 = \sum_{j=0}^{k-1} C_1 A_1^{k-j-1} B_1 u_j, \quad y_k^2 = \sum_{j=0}^{k-1} C_2 A_2^{k-j-1} B_2 u_j$$

Εφόσον $A_1 = A_2^T$, $B_1 = C_2^T$, $C_1 = B_2^T$ έχουμε

$$C_1 A_1^k B_1 = (C_1 A_1^k B_1)^T = B_1^T (A_1^T)^k C_1^T = C_2 A_2^k B_2$$

και επομένως $y_k^1 = y_k^2$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

(β) Τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα αν υπάρχει $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix}$, $|Q| \neq 0$: $QA_1 = A_2 Q$, $QB_1 = B_2$ και $C_1 = C_2 Q$. Έχουμε:

$$QB_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \end{bmatrix} = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{q_1 = q_3 = 1}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{q_1 = q_2 = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} QA_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1+2q_4 \end{bmatrix} \\ A_2 Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1+2q_4 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow QA_1 \neq A_2 Q \quad \forall q_4 \in \mathbb{R}.$$