[Θ6] Δίδεται τό σύστημα: $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B u_k$, $y_k = C\underline{x}_k$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

καί

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 = \underline{0}, \quad u_k = 1 \quad (k \geq 0)$$

(α) Να βρεθεί $\{y_k : k \geq 0\}$ μέ δύο τρόπους (συνέλιξη, μετασχηματισμός Z).

(β) Αν $y_0 = y_1 = 1$ καί $u_k = 0 \ \forall k$, μπορεί νά βρεθεί η αρχική κατάσταση $\underline{x}_0$ μονοσήμαντα (καί αν ναί ποιά είναι;).

(α) $$x_k = A^k \cancel{x_0}^{\,0} + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underbrace{u_j}_{1} = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B \quad (k \geq 0)$$

$$\Rightarrow y_k = \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} B = C(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})B.$$

Έχουμε: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \cdots, A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 1 & 2(k-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k & 2(1+2+\cdots+(k-1)) \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2\frac{(k-1)k}{2} \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k & k(k-1) \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & k(k-1) \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{2k + 3k^2} \quad (k \geq 0).$$