[09] Έστω ότι (A,B) πλήρως ελέγξιμο και έστω ότι $\exists\, Q=Q^T>0$: $AQA^T-Q=-BB^T$. Δείξτε ότι $\rho(A)<1$.

Έστω $\lambda\in\sigma(A)$ και $\underline{\xi}\in\mathbb{C}^n$, $\underline{\xi}\neq 0$: $\underline{\xi}^*A=\lambda\underline{\xi}^*$. Τότε

$$\underline{\xi}^*(AQA^T-Q)\underline{\xi}=-\underline{\xi}^*BB^T\underline{\xi}\Rightarrow(1-\lambda\bar{\lambda})\underline{\xi}^*Q\underline{\xi}=\|B^T\underline{\xi}\|^2$$

$$\Rightarrow 1-|\lambda|^2=\frac{\|B^T\underline{\xi}\|^2}{\underline{\xi}^*Q\underline{\xi}}\geq 0\quad(\underline{\xi}\neq 0 \text{ και } Q=Q^T>0)$$

Αν $B^T\underline{\xi}=0\Rightarrow\underline{\xi}^*[\lambda I-A\,;\,B]=0$ και τότε σύστημα $(A,\underline{b})$ δεν θα ήταν πλήρως ελέγξιμο. Άρα $B^T\underline{\xi}\neq 0$ και $1-|\lambda|^2>0\Leftrightarrow|\lambda|<1$. Εφόσον λ αυθαίρετη ιδιοτιμή, $\rho(A)<1$.

10] Έστω σύστημα $\underline{x}_{k+1}=A\underline{x}_k+B\underline{u}_k$, $\underline{y}_k=C\underline{x}_k+D\underline{u}_k$ όπου $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$ και $m\geq p$. Δείξτε ότι αν (A,B) πλήρως ελέγξιμο και $\text{Rank}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=n+p$ τότε $\left(\begin{bmatrix}A&0\\C&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\D\end{bmatrix}\right)$ πλήρως ελέγξιμο. (Και αντίστροφα).

$(\Rightarrow)$: Έστω ότι $\left(\begin{pmatrix}A&0\\C&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}\right)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε $\exists\,(\underline{\xi}^*,\underline{\psi}^*)\neq\underline{0}$, $\lambda_0\in\mathbb{C}$:

$$(\underline{\xi}^*\ \ \underline{\psi}^*)\begin{pmatrix}\lambda_0I-A&0&B\\-C&\lambda I&D\end{pmatrix}=\underline{0}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}\underline{\xi}^*(\lambda_0I-A)+\underline{\psi}^*C&=0\\\lambda\,\underline{\psi}^*&=0\\\underline{\xi}^*B+\underline{\psi}^*D&=0\end{aligned}\right\}$$

$\lambda\underline{\psi}^*=0\Rightarrow\lambda=0$ ή $\underline{\psi}=0$. Αν $\lambda=0$, τότε: