$$(\xi^* \;\; \psi^*)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$$ (άτοπο γιατί ο πίνακας έχει πλήρες rank)

~~Αν~~ Αν $\psi = 0 \Rightarrow \xi \neq 0$ και $\xi^*(\lambda_0 I - A \,;\, B) = 0$ (άτοπο γιατί $(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο).

$(\Leftarrow)$: Αν $\left( \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \right)$ πλήρως ελέγξιμο, τότε

αμέσως έχουμε $(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο: Σε διαφορετική περίπτωση ~~αν~~ για κάποιο $\lambda_0 \in \sigma(A)$: $\xi^* A = \lambda \xi^*$ $(\xi \neq 0)$ ~~θα~~ και $\xi^* B = 0$ ~~έχουμε~~:

$$(\xi^* \,;\, 0)\left[\begin{array}{cc|c} \lambda_0 I - A & 0 & B \\ -C & +\lambda_0 I & D \end{array}\right] = 0 \Rightarrow \quad \text{(άτοπο).}$$

$$\Rightarrow \cancel{\xi^* [\lambda_0 I - A \,;\, B] = 0 \;\; (\text{άτοπο})}$$

Επίσης για $\lambda = 0 \in \sigma\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ~~θα έχουμε~~ έχουμε:

$$\text{Rank}\left[\begin{array}{cc|c} -A & 0 & B \\ -C & 0 & D \end{array}\right] = n+p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = n+p. \qquad \square$$