Θ11] Δείξτε ότι (A,B) πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $(A+BF,\ BG)$ πλήρως ελέγξιμο, όπου $|G| \neq 0$.

(A,B) πλήρως ελέγξιμο $\Leftrightarrow \text{Rank}\,[\lambda_0 I - A \,\vdots\, B] = n \quad \forall \lambda_0 \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}\left([\lambda_0 I - A \,\vdots\, B] \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -F & G \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall \lambda_0 \in \mathbb{C}$$

$$\Leftrightarrow \text{Rank}\left([\lambda_0 I - A - BF \,\vdots\, BG] \right) = n \quad \forall \lambda_0 \in \mathbb{C}$$

$\Leftrightarrow (A+BF,\ BG)$ πλήρως ελέγξιμο.

11*] Έστω το σύστημα $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + E\underline{q}_k$, $\underline{y}_k = C\underline{x}_k$ όπου $\underline{q}_k \in \mathbb{R}^r$ σήμα διαταραχής. Να βρεθεί συνθήκη ώστε η έξοδος του συστήματος $\underline{y}_k$ να είναι ανεξάρτητη του $\underline{q}_k$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ (απόρριψη διαταραχής - disturbance rejection). Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $C = [1 \ \ 1]$ να βρεθούν όλοι οι πίνακες E που εξασφαλίζουν αυτήν την ιδιότητα;

Έχουμε: $$\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B \underline{u}_j + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} E \underline{q}_j}_{0}$$

Για να ισχύει $\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} E \underline{q}_j$ $\forall \underline{q}_j \in \mathbb{R}^r$ $\forall k \geq 0$ πρέπει και αρκεί $CA^m E = 0$ $\forall m \geq 0$ ή ισοδύναμα (Cayley-Hamilton)

$$\Gamma_0 E = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} E = 0 \Leftrightarrow \langle E \rangle \subseteq \mathcal{X}_{\bar{o}} = \text{Ker}(\Gamma_0).$$

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ \ 1] \Rightarrow \Gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \underline{\alpha}^T, \quad \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^r$$