[Θ12] Έστω το σύστημα $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}\,u_k$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. (β) Δείξτε ότι τα $(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο. (γ) Να βρεθεί $\underline{f}^T = [f_0\ f_1\ f_2]$ ώστε αν $A_c = A + \underline{b}\,\underline{f}^T$, $\chi_{A_c}(\lambda) = \lambda^3$.

(α) $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \lambda + a_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a_1 & \lambda + a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ a_0 & \lambda + a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 + a_2\lambda + a_1) + a_0 = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

(β) $$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow |\Gamma_c| = -1 \neq 0.$$

(γ) $$\underbrace{A + \underline{b}\,\underline{f}^T}_{A_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_0\ f_1\ f_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_0 - a_0 & f_1 - a_1 & f_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_{A_c}(\lambda) = \lambda^3 + (a_2 - f_2)\lambda^2 + (a_1 - f_1)\lambda + (a_0 - f_0) \equiv \lambda^3$$

$$\Leftrightarrow \underline{f}^T = [a_0\ a_1\ a_2].$$