(α) Πίνακας παρατηρησιμότητας

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Rank}(\Gamma_o) = 2$$

Επομένως το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

(β) Έστω παρατηρητής: $\underline{\xi}_{k+1} = A\underline{\xi}_k + L(C\xi_k - y_k) + Bu_k$

$$= (A+LC)\underline{\xi}_k - Ly_k + Bu_k$$

Αν $L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A+LC = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+3L_1 & -2-L_1 \\ 3+3L_2 & -1-L_2 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow |zI-(A+LC)| = z^2 + z\underbrace{(L_2-3L_1)}_{0} + 5\underbrace{(1+L_2)}_{0}$$

$\Rightarrow L_1 = -1/3$ καί $L_2 = -1$. Σε αυτή την περίπτωση

$$A+LC = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+LC)^2 = 0 \Rightarrow \underline{N=2}$$

$N=2$ είναι ο ελάχιστος ακέραιος γιά τον οποίο $e_k = 0$, $k \geq N$ γιατί δεν υπάρχουν L_1, L_2 γιά τους οποίους $A+LC=0$.

(γ) $A+BK = \begin{bmatrix} 7/4 & -5/4 \\ 9/4 & -7/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma(A+BK) = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$

Από την "αρχή διαχωρισμού" $\sigma(A_c) = \sigma(A+BK) \cup (A+LC)$

$$= \{\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 0\}.$$