Μαθημα 2'

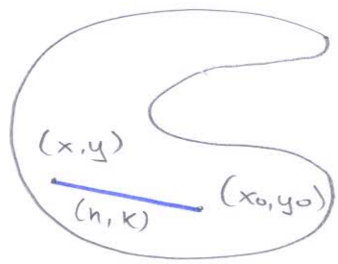
15/05/2015

Σμυρνέλης Παναγιώτης
Γραφείο 112 (Παρ. 2-3)
smpanos@math.uoa.gr

Τύποι του Taylor

§2 Για συναρτήσεις 2 μεταβλητών.

Θ3 | Έστω $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$ (δηλαδή έχει παραγώγους έως τάξης $n+1$ συνεχείς στο U), $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό χωρίο και $(x_0, y_0) \in U$ φιξαρισμένο



Τότε για κάθε $(x,y) \in U$ τ.ω. το ευθύγραμμο τμήμα $[(x_0,y_0),(x,y)] \subset U$, ισχύει θέτοντας $(h,k) = (x-x_0, y-y_0)$

$$(5)\quad f(x,y) = f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot h + f_y(x_0,y_0)\cdot k$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f_x(x_0,y_0)\, h^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)\, hk + f_{yy}(x_0,y_0)\, k^2 \right] + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(x_0,y_0)\cdot h^i k^{n-i} \right] + \underbrace{R_n(x,y)}$$

Υπόλοιπο Taylor

$P_n(x,y)$ Πολυώνυμο Taylor n-βαθμού

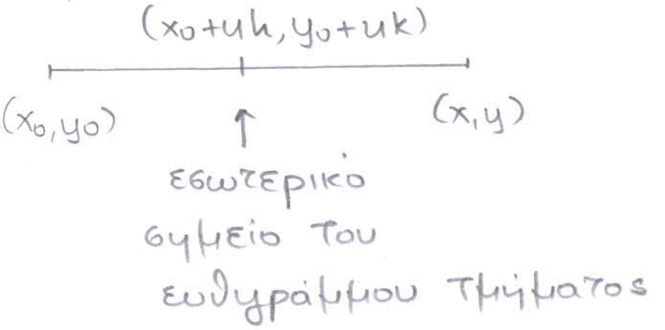
$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

όπου $R_n(x,y)=\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(x_0+uh,y_0+uk)h^i k^{n+1-i}\right]du$

Εναλλακτικά, έχουμε

$$(6) \quad R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(x_0+uh,y_0+uk)h^i k^{n+1-i}$$

για κάποιο $u\in(0,1)$ που εξαρτάται από το (x_0,y_0) και το (x,y)



Απόδειξη Θ3. Αναγόμαστε στο Θ1 του Taylor για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Εφαρμόζουμε τον τύπο (1) στη συνάρτηση στο σημείο 0

$\varphi: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow \varphi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$

Αναλυτικά, $\varphi(t)=f(r(t))$, όπου $r(t)=(x_0,y_0)+t(h,k)$, $t\in[0,1]$

Έχουμε $\varphi(0)=f(x_0,y_0)$, $\varphi(1)=f(x_0+h,y_0+k)=f(x,y)$

$\varphi'(t)=\nabla f(r(t))\cdot r'(t)=f_x(\underbrace{x_0+th,y_0+tk}_{r(t)})\cdot h+f_y(x_0+th,y_0+tk)k$

$\Longrightarrow \varphi'(0)=f_x(x_0,y_0)\cdot h+f_y(x_0,y_0)\cdot k$

Ομοίως, $\varphi''(t)=f_{xx}(x_0+th,y_0+tk)h^2+f_{xy}(x_0+th,y_0+tk)hk$ $+f_{xy}(x_0+th,y_0+tk)hk$, άρα $\varphi''(0)=f_{xx}(x_0,y_0)\cdot h^2+2f_{xy}(x_0,y_0)hk+$ $+f_{yy}(x_0,y_0)\cdot k^2$.

Επαγωγικά, βρίσκουμε:

$$\varphi^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}} (x_0+th, y_0+tk)\, h^i \cdot k^{n-i}$$

$$\varphi^{(n)}(0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}} (x_0, y_0) \cdot h^i \cdot k^{n-i}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (1) ισχύει:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot 1 + \frac{\varphi''(0)}{2!} 1^2 + \dots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)\cdot 1^n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(u)\, du.$$

από τον τύπο (3) $\square$

Σχόλιο 6 Επειδή οι παράγωγοι της f τάξης $n+1$ είναι συνεχείς και φραγμένες σε μια περιοχή του σημείου (x_0,y_0), δηλαδή ισχύει $\left|\frac{\partial^{n+1} f}{\partial_x^i \partial_y^{n+1-i}}(x,y)\right| \le \underset{\text{σταθερά}}{M}$ για $i=0,1,\dots,n+1$ και για $|x-x_0|<\varepsilon$, $|y-y_0|<\varepsilon$.

$$|R_n(x,y)| \overset{(\beta\lambda.5)}{\le} \int_0^1 \left|\frac{\partial^{n+1} f(x,y)}{\partial^i_x \partial_y^{n+1-i}}\right| du \qquad \text{για } |x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon$$

$$\le \frac{2^{n+1}}{n!} M \,\|(x-x_0, y-y_0)\|^{n+1}$$

$$2^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \qquad \begin{cases} |h| \le \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} \\ |k| \le \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} \end{cases}$$

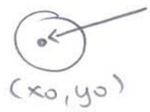
Επομένως, $|R_n(x,y)| \le \underset{\text{σταθερά}}{M'} \cdot \|(x-x_0, y-y_0)\|^{n+1}$ για $|x-x_0|<\varepsilon$, $|y-y_0|<\varepsilon$

$$\boxed{\frac{R_n(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^n} \longrightarrow 0 \text{ καθώς } (x,y)\to(x_0,y_0)}$$

Η προηγούμενη ιδιότητα ισχύει αν υποθέσουμε ΜΟΝΟ ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0)
[δηλαδή οι παράγωγοι της f τάξης $n-1$ υπάρχουν σε μια περιοχή του (x_0,y_0) και είναι διαφορίσιμες στο (x_0,y_0)]

Θ4 Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ και $(x_0,y_0)\in U$. Αν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0) τότε

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-P_n(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^n}=0} \quad (7)$$



Η σχέση (7) έχει τοπικό χαρακτήρα.

ΣΧΟΛΙΑ 7 Το Πολυώνυμο του Taylor $P_n(x,y)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n που έχει την ίδια τιμή στο (x_0,y_0) με την f (Ασκ. 8)

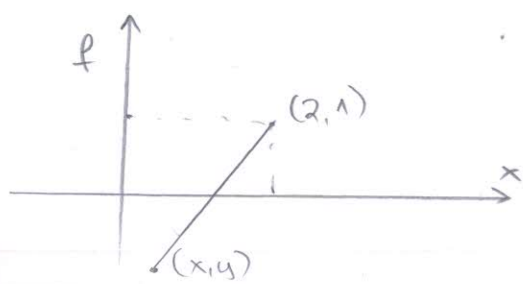
Το Πολυώνυμο του Taylor $P_n(x,y)$ είναι επίσης το μοναδικό Πολυώνυμο βαθμού n που ικανοποιεί τη σχέση (7), όταν βέβαια η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0).

Παράδειγμα Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x,y)=x^y=e^{y\ln x}$ στο $(2,1)$ μέχρι όρων 2ης τάξης.

Απάντηση Η f ορίζεται και είναι C^∞ στο ανοικτό ημιεπίπεδο $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0\}$

Υπολογίζουμε $f(2,1)=2$, $f_x(x,y)=\frac{y}{x}\cdot e^{y\ln x} \Rightarrow f_x(2,1)=1$.

$f_y(2,1)=\ln x\, e^{y\ln x} \Rightarrow f_y(2,1)=2\ln 2$.



$$f_{xx}(x,y) = -\frac{y}{x^2} e^{y\ln x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{y\ln x} \Longrightarrow f_{xx}(2,1)=0$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{x} e^{y\ln x} + \frac{y\ln x}{x} e^{y\ln x} \longrightarrow f_{xy}(2,1) = 1+\ln 2$$

$$f_{yy}(x,y) = (\ln x)^2 e^{y\ln x} \Longrightarrow f_{yy}(2,1) = (\ln 2)^2 \cdot 2 .$$

Άρα για $(x,y)\in U$ έχουμε

$$f(x,y) = 2 + \frac{1}{1!}\left[1\cdot\underbrace{(x-2)}_{h} + 2\ln 2\,\underbrace{(y-1)}_{k}\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[0\,\underbrace{(x-2)^2}_{h^2} + 2(1+\ln 2)\underbrace{(x-2)}_{h}\cdot\underbrace{(y-1)}_{k} + (\ln 2)^2 2\,\underbrace{(y-1)^2}_{k^2}\right] + R_2(x,y)$$

$$\Longrightarrow f(x,y) = \boxed{\underline{2+(x-2)+2\ln 2(y-1)} + (1+\ln 2)(x-2)(y-1) + + (\ln 2)^2(y-1)^2} + R_2(x,y)$$

$$\frac{R_2(x,y)}{(x-2)^2+(y-1)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{καθώς } (x,y)\longrightarrow(2,1) .$$

Υπενθυμίζουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(2,1,f(2,1))$ έχει εξίσωση.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overset{\shortparallel}{(2,1,2)}$

$$\boxed{z = 2 + (x-2) + 2\ln 2(y-1)}$$

Το Πολυώνυμο 2ου βαθμού $P_2(x,y)$ δίνει μια καλύτερη προσέγγιση της f κοντά στο σημείο $(2,1)$.

Ασκ 10 Να δειχθεί ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $u \in (0,1)$ τ.ω. $y\cos x = -uxy\sin(ux) + y\cos(ux)$

Απάντηση $U = \mathbb{R}^2$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f: U \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = y\cos x$$

Έχουμε $f_x(x,y) = -y\sin x$ και $f_y(x,y) = \cos x$, συνεπώς η f είναι κλάσεως C^1 (C^∞)

Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο (6) με $n=0$, $x_0=0$, $y_0=0$.

$x, y \in \mathbb{R}$

$h = x - x_0 = x$

$k = y - y_0 = y$.

Σύμφωνα με τον τύπο (6), υπάρχει $u \in (0,1)$ τ.ω.

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left[f_x(0+ux, 0+uy)\,x + f_y(0+ux, 0+uy)\,y\right]$$

Δηλαδή, $y \cdot \cos x = 0 + [-uy\sin(ux)x + \cos(ux)y]$ που είναι το ζητούμενο

Ασκ 9 Αν η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). Δείξτε ότι το πολυώνυμο του Taylor $P_2(x,y)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο 2ου βαθμού τ.ω.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - P_2(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2} = 0$$

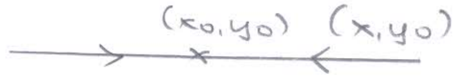
Απάντηση Αν Q είναι ένα άλλο πολυώνυμο 2ου βαθμού με την ίδια ιδιότητα τότε $R(x,y) = P_2(x,y) - Q(x,y)$ είναι ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού που ικανοποιεί $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2} = 0$

Γράφουμε το R στη μορφή:

$$R(x,y) = a + \beta(x-x_0) + \gamma(y-y_0) + \delta(x-x_0)^2 + \varepsilon(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \zeta(y-y_0)^2$$

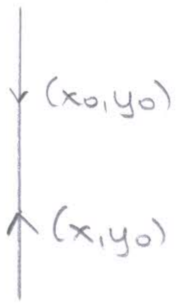
και έχουμε διαδοχικά

• $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y=y_0}} \dfrac{R(x,x_0)}{(x-x_0)^2} = 0$



$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{a+\beta(x-x_0)+\delta(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = 0 \Rightarrow a=\beta=\delta=0$$

• $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ x=x_0}} \dfrac{R(x_0,y)}{(y-y_0)^2} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{\gamma(y-y_0)+\zeta(y-y_0)^2}{(y-y_0)^2} = 0 \Rightarrow \gamma=\zeta=0$

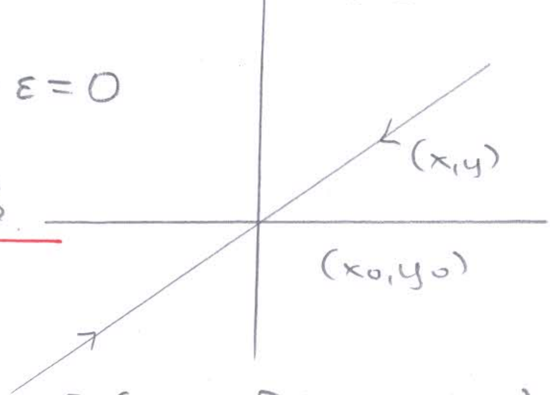


• $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{R(x_0+t, y_0+t)}{2t^2} = 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varepsilon t^2}{2t^2} = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$

Άρα $R=0$ και $Q=P_2$

$\begin{cases} x = x_0+t \\ y=y_0+t \end{cases}$



$R(x,y) = R(x_0+t, y_0+t) = \varepsilon t^2$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = 2t^2$