Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Ηλεκτρονική Τάξη: http://eclass.uoa.gr

Σημειώσεις Φοιτητών

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Μάθημα:

651. Στοχαστικές ανελίξεις

Διδάσκων: Α. Μπουρνέτας

Ευχαριστούμε για τις σημειώσεις την: Daisy Duck

Το περιεχόμενο των ηλεκτρονικών μαθημάτων που φιλοξενεί η πλατφόρμα η-Τάξη ΕΚΠΑ, καθώς και τα πνευματικά δικαιώματα του υλικού αυτού, ανήκουν στους συγγραφείς τους. Για οποιαδήποτε χρήση ή αναδημοσίευση του περιεχομένου παρακαλούμε επικοινωνήστε με τους υπεύθυνους των αντίστοιχων μαθημάτων.

08/10/2014

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

Μάθημα 1

Δυναμικά Συστήματα: φαινόμενα που η κατάστασή τους αλλάζει με το χρόνο.
Διακρίνονται σε Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά
(Σε αυτό το μάθημα μελετούμε τα στοχαστικά :) !)

Στοχαστική Ανέλιξη (Διαδικασία): $\{X(t), t\in T\}$
T= σύνολο δεικτών. $\forall t\in T$ η $X(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Παραδείγματα:

1) $T=\{1,2,\dots,10\}$, $X(t)$ = θερμοκρασία το πρωί της ημέρας t (όπου $t=1$, 09/10/2014)

2) Νοσοκομείο, χώρος αναμονής στα επείγοντα.
Έστω $t=0$ συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
Έστω $N(t)$ = αριθμός των ασθενών που περιμένουν στο χώρο αναμονής τη στιγμή t.
Το $\{N(t), t=0\}$ είναι στοχ. ανέλιξη
$T=[0,\infty)$ (αφού δεν έχω πει μέχρι πότε θα μετράω)

T → αριθμήσιμο ⇒ ανέλιξη διακριτού χρόνου
T → υπεραριθμήσιμο ⇒ ανέλιξη συνεχούς χρόνου

$\forall t\in T$, η $X(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή, στο χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) → κατάσταση τη στιγμή t

Αν $X(t)$ είναι διακριτή, μιλάμε για διακριτό χώρο καταστάσεων.

Αν συνεχής, μιλάμε για συνεχή χώρο καταστάσεων.

$X(t) \in S$, $\forall t \in T$, S: χώρος καταστάσεων

Αν $X(t)$ διακριτή $\Rightarrow$ S αριθμήσιμο

Αν $X(t)$ συνεχής $\rightarrow$ S υπεραριθμήσιμο

(σύγγραμμα Φακίνου)

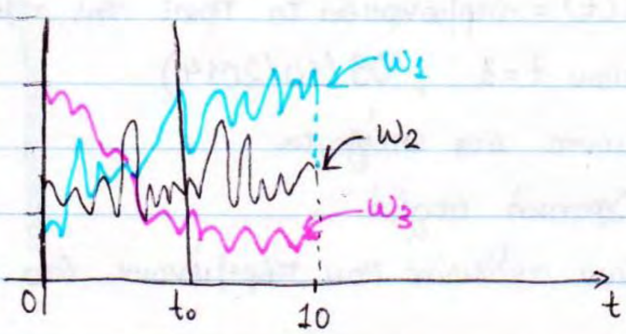
Κατάσταση $X(t)$ τυχαία μεταβλητή

$\forall t \quad X(t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\underbrace{X(t,}_{\text{χρονική στιγμή}}\underbrace{\omega)}_{\text{αποτέλεσμα φαινομένου}}$$

$$X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$X(t)$ θερμοκρασία , $T = [0,10]$



$\forall w_0$ σταθερό $\quad X(t, w_0): T \rightarrow \mathbb{R}$

Υλοποίηση (σενάριο) της διαδικασίας κάτω από το <u>$w = w_0$</u>

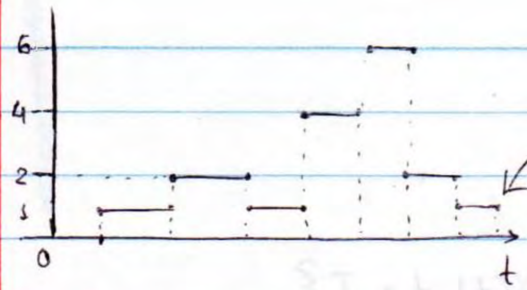
$\forall t = t_0 =$ σταθ. $\quad X(t_0, w): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Τυχαία μεταβλητή

<u>Παράδειγμα 2 (συνέχεια)</u>

$N(t)$ = αριθμός ασθενών τη στιγμή t

$\{N(t), t \in [0, \infty)\}$



Παράδειγμα 3

Ρίχνω δίκαιο ζάρι (ανεξάρτητες ρίψεις)

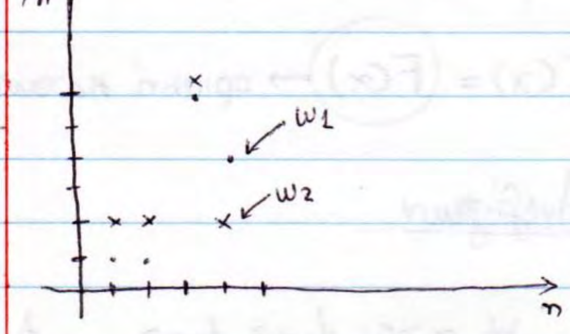
Y_n = αποτέλεσμα της n-οστής ρίψης

$Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (αιτμ)

$$P(Y_n = i) = \frac{1}{6} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$
$$\forall i = 1, 2, \ldots, 6$$

$\{Y_n : n = 1, 2, \ldots\}$ $\quad T = \{1, 2, \ldots\}$ (Πολύ τετριμμένη :))

$$S = \{1, \ldots, 6\}$$

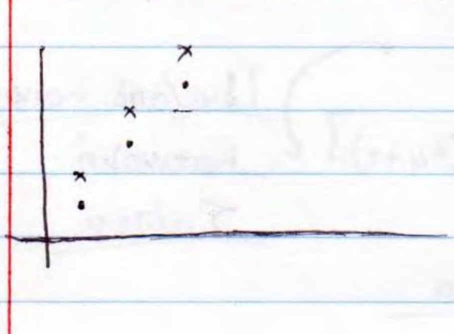


Έστω $X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$

$\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ $\quad T = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$

$$S = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$$

(Σαν χώρο καταστάσεων εννοώ όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις X_n, πχ. $X_1 \to \{1, \ldots, 6\}$, $X_2 \to \{2, \ldots 12\}$ κλπ)



$$\boxed{X_n = Y_{n-1} + Y_n}$$

10/10/2014

Μάθημα 2

Έστω στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$

Μεταβατική Κατανομή

$F_t(x) = P(X(t) \le x), x \in \mathbb{R}$

(*) Για τον πλήρη ορισμό μιας στοχαστικής ανέλιξης απαιτούνται

i) T

ii) S (χώρος καταστάσεων)

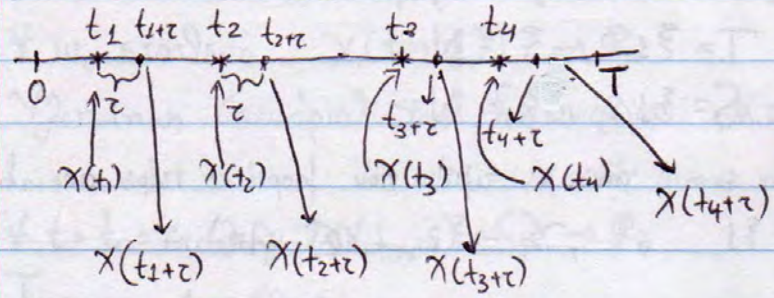
iii) $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_n) \le x_n)$ $\forall n, \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall x_1, \dots, x_n \in S$

Όταν $t \to \infty$? $\lim\limits_{t \to \infty} F_t(x) = F(x) \to$ οριακή κατανομή

Κατηγορίες Στοχαστικών Ανελίξεων

1) Στάσιμες

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall \tau > 0 : t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau \in T$



$[X(t_1)\ X(t_2)\ X(t_3)\ X(t_4)]$
$[X(t_1+\tau)\ X(t_2+\tau)\ X(t_3+\tau)\ X(t_4+\tau)]$ ίδια/από κοινού κατανομή

Συνέπεια

$\forall t, \tau$, $X(t), X(t+\tau)$ ισόνομα

2) Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις

$\forall\ t_1, \dots, t_n,\ t_1 < t_2 < \dots < t_n$
τότε οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2), \dots,$
$X(t_n)-X(t_{n-1})$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες

Ομογενείς προσαυξήσεις
Έστω $Y(s,t) = X(t) - X(s)$, $s<t$. Η κατανομή της $Y(s,t)$ εξαρτάται μόνο από το $t-s$ και όχι από τις συγκεκριμένες τιμές των s,t.

Παράδειγμα
Έστω X_n = τιμή μιας μετοχής στην αρχή της μέρας n.

$$Y_n = X_{n+1} - X_n \qquad X_{n+1} = X_n + Y_n$$

Υπόθεση 1
$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ αιτμ. → αθροιστικό μοντέλο

$\boxed{X_n = Y_1 + \dots + Y_{n-1}}$ ανεξάρτητες προσαυξήσεις

π.χ. $X_9 - X_7 = Y_7 + Y_8$
$X_{13} - X_{10} = Y_{10} + Y_{11} + Y_{12}$ } ανεξάρτητες

Πολλαπλασιαστικό μοντέλο

$$X_{n+1} = X_n \cdot (1+Y_n) \Rightarrow X_{n+1} - X_n = X_n \cdot Y_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = Y_n$$

$Y_n > -1$
$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ αιτμ.

$X_n = (1+Y_1)(1+Y_2)\dots(1+Y_{n-1}) \cdot X_1$

$X_2 - X_1 = (1+Y_1)X_1 - X_1 = Y_1 \cdot X_1$

$X_3 - X_2 = (1+Y_2)(1+Y_1)X_1 - (1+Y_1)X_1 = Y_2(1+Y_1)X_1$

όχι ανεξάρτητα
(εξαρτώνται από το Y_1)

Έστω $Z_n = \log X_n$

$$Z_n = \underbrace{\log(1+Y_1)}_{\text{λογαριθμημένη απόδοση}} + \underbrace{\log(1+Y_2)+\dots+\log(1+Y_{n-1}) + \log Y_1}_{\text{αιτμ.}}$$

πραγματική απόδοση

3) Ανανεωτικές Διαδικασίες

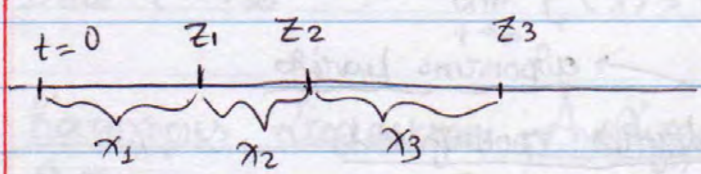
Έστω X_1, X_2 αιτμ. $P(X_1 \le x) = F(x)$

(έστω συνεχείς με σ.π.π. (συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας $f(x) = F'(x)$

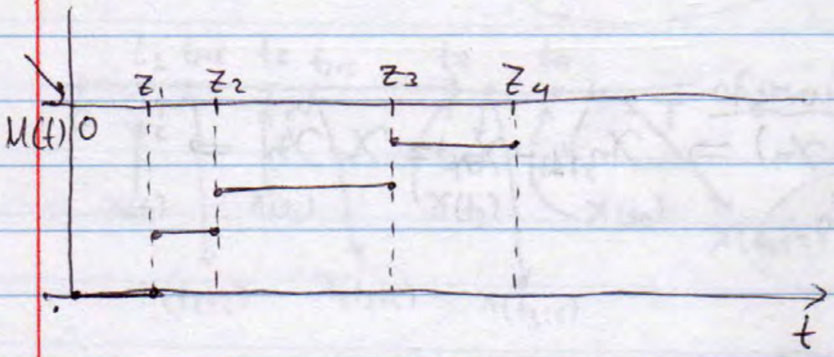
Έστω $Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ [τυχαίος περίπατος]

$(Z_0 = 0)$ ανέλιξη διακριτού χρόνου

Έστω ότι το X_n είναι η διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων.



Έστω $N(t)$ = αριθμός γεγονότων στο διάστημα $(0, t]$, $\forall t > 0$



15/10/2014

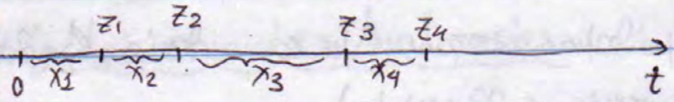
Μάθημα 3

Υπενθύμιση: Ανανεωτικές Διαδικασίες

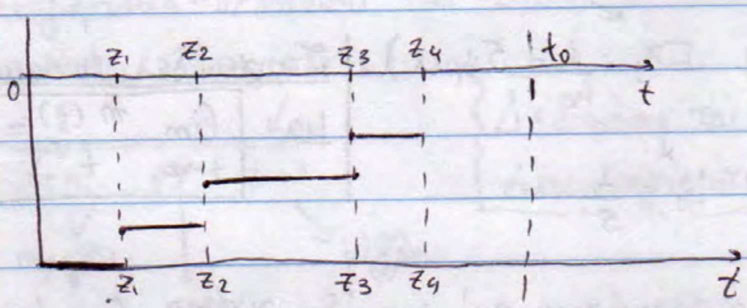
Έστω X_1, X_2, ατμ (συνεχείς) με σ.π.π. $f(x)$, $E(X_1) = \frac{1}{\mu}$

X_n = χρόνος μεταξύ $(n-1)^{\text{οστού}}$ και $n^{\text{οστού}}$ συμβάντος

$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$



$\underbrace{\{N(t),\ t \geq 0\}}_{\text{Ανανεωτική διαδικασία}}$, $N(t)$ = αριθμός συμβάντων στο διάστημα $(0, t]$



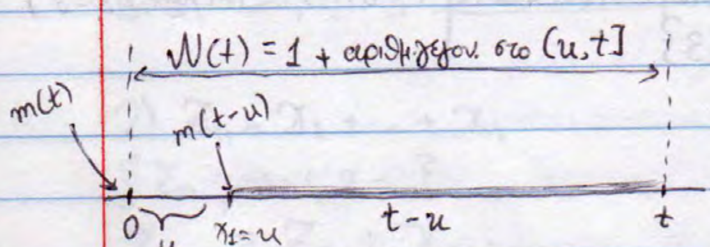
(Τα φαινόμενα που έχουμε υποθέσει ανεβαίνουν ένα-ένα: με άλλα λόγια κάθε μετάβαση/άλμα που συμβαίνει έχει τιμή 1)

Έστω $m(t) = E(N(t)),\ t \geq 0$: <u>ανανεωτική συνάρτηση</u>

$$m(t) = E(N(t)) = \int_0^\infty E[N(t) \mid X_1 = u] f(u) du$$

Αν $u > t$ $\quad E[N(t) \mid X_1 = u] = 0 \Rightarrow m(t) = \int_0^t E[N(t) \mid X_1 = u] f(u) du$

Έστω $X_1 - u < t$



$$E[N(t) \mid X_1 = u] = 1 + \underbrace{E[\#\ \text{γεγ. στο } (u,t]]}_{m(t-u)}$$

$$\Rightarrow m(t) = \int_0^t [1+m(t-u)]f(u)du = \int_0^t f(u)du + \int_0^t m(t-u)f(u)du$$

$$= F(t) + \int_0^t m(t-u)f(u)du \qquad \boxed{m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u)f(u)du}$$

(Είναι σημαντικός για το μάθημα ο τρόπος με τον οποίο βγάλαμε τον τύπο της $m(t)$. Ο Ανανεωτικός συλλογισμός)

$\lim_{t\to\infty} m(t) = \infty$ (όταν $EX_1 < \infty$)

η αναμενόμενη τιμή του X_1

$E(X_1) = \frac{1}{\mu}$ (π.χ. $EX_1 = \frac{1}{\mu_1} = 5$ ώρες)

$\mu = \frac{1}{5}$

Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα: $\boxed{\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \mu}$

μ = μέσος αριθμός γεγονότων ανά μονάδα χρόνου (συχνότητα)
($\approx m(t) \approx \mu_1 \cdot t$)

Πιθανότητες

A, B ανεξάρτητα
$P(B|A) = P(B)$
A, B ανεξάρτητα δεδομένου του Γ
$P(B|A\Gamma) = P(B|\Gamma)$

Παράδειγμα: X_1, X_2, X_3 α.ι.τ.μ., $\in \{0, 1, 2, 3\}$ ($P_0\ P_1\ P_2\ P_3$)

$Z_1 = X_1$, $Z_2 = X_1 + X_2$ $Z_3 = X_1 + X_2 + X_3$
$A = \{X_1 = 2\}$, $B = \{Z_3 = 3\}$
A, B ανεξάρτητα? ΟΧΙ

$P(B|A) = P(X_2 + X_3 = 1)$

Έστω $\Gamma = \{Z_2 = 2\}$
$P(B|\underset{A\cap\Gamma}{\overset{\shortparallel}{A\Gamma}}) = P(B|(X_1 = 2, X_2 = 0)) = P(X_3 = 1)$

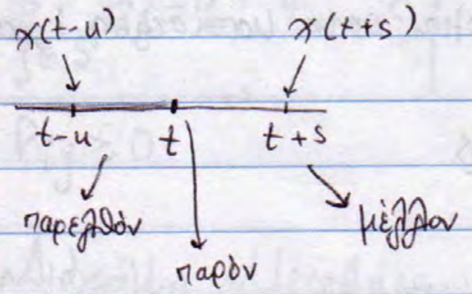
$P(B|\Gamma) = P(B|X_1+X_2=2) = P(X_3=1)$

Δηλαδή $P(B|A\Gamma) = P(B|\Gamma)$, άρα A, B ανεξάρτητα δεδομένου Γ
(ενώ τα A, B από μόνα τους όχι ανεξάρτητα)

4) Μαρκοβιανές Διαδικασίες

$\{X(t), t \geq 0\}$

Μαρκοβιανή Ιδιότητα: $\forall\ t, s, u > 0$, $X(t+s)$, $X(t-u)$
ανεξάρτητες δεδομένου ότι $X(t) = x$



{ Δεδομένου του παρόντος, το μέλλον είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν }

Σε διακριτό χρόνο $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$

$X_{n+k}, X_{n-\ell}$ ανεξάρτητα δεδομένου του $X_n = x$, $\forall\ k, \ell > 0$

X_n = κατάσταση βήματος n

Παραδ. ανεξ. ρίψεις ζαριού

1) X_n = αποτέλεσμα $n^{\text{οστής}}$ ρίψης

X_{n+1} ανεξάρτητη της X_n
της X_{n-1}
της X_{n-2}
$\vdots$

$\{X_n, n=1,2,\dots\}$ μηδενική μνήμη

2) $Z_n = X_1 + \dots + X_n$

$\{Z_n, n=1,2,\dots\}$

$Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1}$

Μαρκοβιανή (το μέλλον ανεξάρτητο από το παρελθόν)

↑ μνήμη 1

$P(Z_{n+1}=k \mid Z_n=\ell, Z_{n-1}=w) = P[Z_{n+1}=k \mid Z_n=\ell]$

<u>Μαρκοβιανή Διαδικασία Διακριτού Χρόνου</u>

Χώρος καταστάσεων $S \subseteq \{0,1,2,\dots\}$ (<u>διακριτές</u>)

Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (ΜΑΔΧ)

Έστω $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$, $X_n \in S$

Αν $X_n=i$ η X_{n+1} εξαρτάται μόνο από το i

$P[X_{n+1}=j \mid X_n=i] = P_{ij}$ = Πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος $\forall\, i,j \in S$

(η πιθανότητα αν σήμερα βρίσκομαι στην κατάσταση i, αύριο να βρίσκομαι στη κατάσταση j)

<u>Πίνακας Πιθανοτήτων μετάβασης</u>

Αν $S=\{0,1,\dots,M\}$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} i \backslash j \\ \end{array} \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1M} \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \dots & P_{MM} \end{pmatrix}_{(M+1)\times(M+1)} \begin{array}{l} \to X_n=0 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(γραμμές = παρόν, στήλες = μέλλον)

i) $P_{ij} \geq 0 \;\forall\, i,j$

ii) $\forall\, i \in S$, $\sum_{j \in S} P_{ij} = 1$

} στοχαστικός πίνακας.

$P_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ (ομογενής ως προς n)

17/10/2014

<u>Μάθημα 4</u>

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

$\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$

Χώρος Καταστάσεων $X_n \in S \subseteq \{0,1,2,\dots\}$

$$P_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P(X_1=j \mid X_0=i) \quad \forall n$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

δεσμευμένη κατανομή της $X_1 \mid X_0 = 0$

(μπορεί να είναι άπειρος, μπορεί να είναι πεπερασμένος. Αν είναι πεπερασμένος, είναι τετραγωνικός)

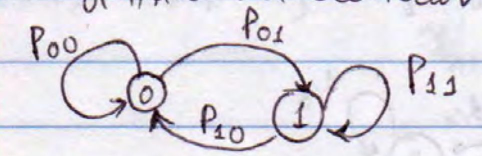
στοχαστικός πίνακας

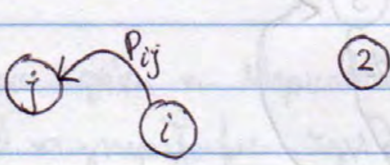
Κάθε γραμμή του πίνακα είναι διάνυσμα πιθανότητας, παρουσιάζει μία δεσμευμένη κατανομή

$$\boxed{\sum_{j \in S} P_{ij} = 1 \quad \forall i \in S}$$

$P_{ij} \geq 0$

Διάγραμμα Μεταβάσεων ενός βήματος





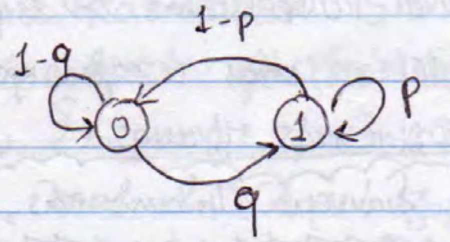
Παραδείγματα

1) Φως { ανοιχτό / κλειστό

Αν ανοιχτό $\xrightarrow[\text{στιγμή}]{\text{επόμενη}}$
- ανοιχτό με πιθανότητα p
- κλειστό με πιθανότητα $1-p$

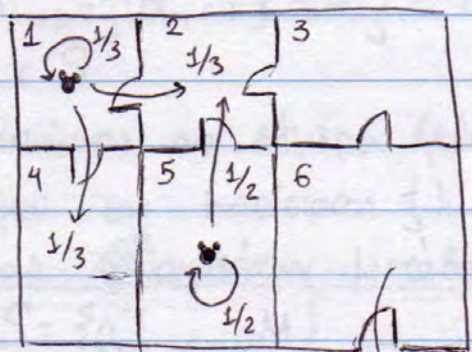
Αν κλειστό
- ανοιχτό q
- κλειστό $1-q$

$X_n = \begin{cases} 0 & \text{κλειστό} \\ 1 & \text{ανοιχτό} \end{cases}$ $S=\{0,1\}$



$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

2)



← σπίτι (λαβύρινθος)

ποντίκι

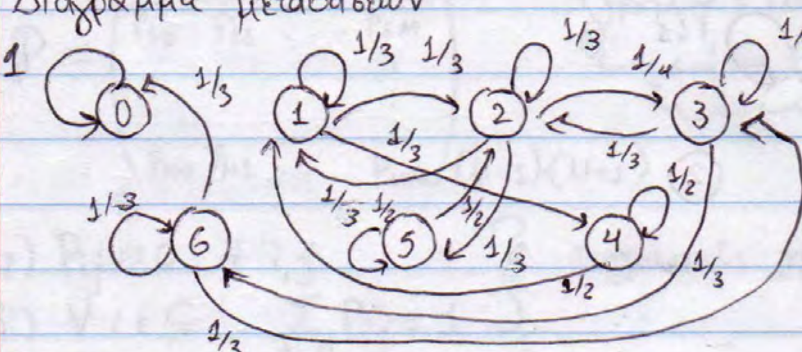
(κοιτάμε τη μετακίνηση του ποντικού)

$S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

0: έξω

(αν βγει έξω δεν επιστρέφει!)

Διάγραμμα μεταβάσεων



0 = απορροφητική κατάσταση

άσκηση: να φτιάξουμε τον πίνακα

3) Καιρός → 0 βροχή, → 1 λιακάδα

Χθες	Σήμερα	Αύριο
0	0	→ 0 (0,75) → 1 (0,25)
0	1	→ 0 (0,40) → 1 (0,60)
1	0	→ 0 (0,70) → 1 (0,30)

Χ	Σ	Α
1	1	→ 0 (0,2) → 1 (0,8)

α) $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ $X_n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ (καιρός Ημέρ. n)

Μαρκοβιανή ιδιότητα (δεν ισχύει)

0,8 $P(X_2=1 \mid X_0=1, X_1=1) =$

$\neq$

0,6 $P(X_2=1 \mid X_0=0, X_1=1) = P(X_2=1 \mid X_1=1)$

β) Έστω $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$

$S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Έστω $Y_n = (0,0)$ $\left[\begin{array}{l} \Rightarrow X_{n-1}=0 \\ X_n = 0 \end{array}\right.$ $Y_{n+1} = (X_n, X_{n+1})$

$\{Y_n, n=1,2,\dots\}$

$X_{n+1} = \begin{cases} 0 \ (0{,}75) & Y_{n+1} = (0,0) \\ 1 \ (0{,}25) & Y_{n+1} = (0,1) \end{cases}$

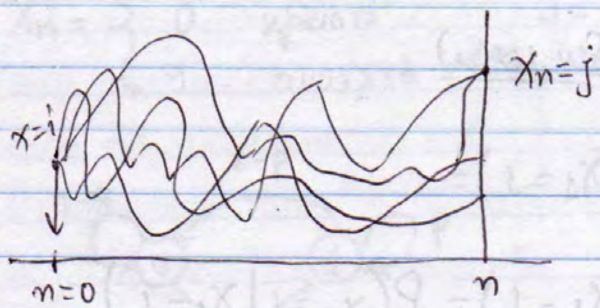
Τώρα ισχύει η Μαρκοβιανή Ιδιότητα, γιατί για να βρούμε το Y_{n+1} αρκεί να γνωρίζουμε το Y_n

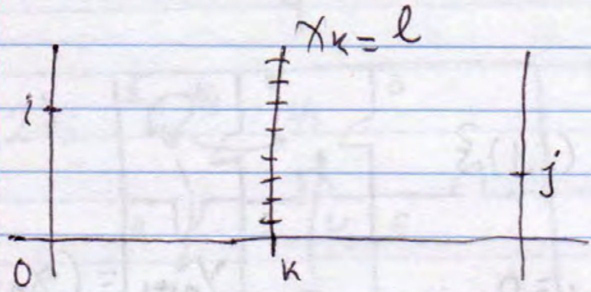
Μεταβατική Κατανομή: $P_j^{(n)} = P(X_n = j)$, $n=0,1,\dots$, $j \in S$
(η πιθανότητα μετά από n βήματα το σύστημά μου να είναι στην κατάσταση j)
$\forall n$, $P^{(n)} = (P_0^{(n)}, P_1^{(n)}, \dots)$ διάνυσμα πιθανότητας.
Δίνονται $P_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$
$P(X_1 = 0) = ? = \sum_i P(X_0 = i) \underline{P_{i0}}$

$P^{(0)}(j) = P(X_0 = j)$
$\underbrace{P^{(0)} = (P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, \dots)}_{\text{αρχική κατανομή}}$

$$\text{Έστω } P_{ij}^{(n)} = P(X_n=j \mid X_0=i) = \sum_{l\in S} \overbrace{P(X_n=j \mid \cancel{X_0=i}, X_k=l)}^{P_{lj}^{(n-k)}} \cdot \underbrace{P(X_k=l \mid X_0=i)}_{P_{il}^{(k)}}$$

λόγω της μαρκοβιανής ιδιότητας





$0<k<n$

$X_k \in \{0,1,2,\dots\}$

$$\boxed{P_{ij}^{(n)} = \sum_{l\in S} P_{il}^{(k)} \cdot P_{lj}^{(n-k)}} \quad \forall\ k=1,2,\dots,n-1$$

$n=2,\ k=1$

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_l P_{il} P_{lj}$$

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} P_{ij}^{(2)} & \\ & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1M} \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \cdots & P_{MM} \end{pmatrix} \end{array} \; P_{il},\ l=0,1,\dots$$

$P_{lj},\ l=0,1,\dots$

$$\Rightarrow \boxed{P^{(2)} = P^2} \Longrightarrow \boxed{P^{(k)} = P^k} \quad \forall k$$

24/10/2014

Μάθημα 5

Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου

$\mathbb{P} = (P_{ij})\ i,j \in S$
$\mathbb{P}^{(n)} = (P_{ij}^{(n)}) = \mathbb{P}^n$
$P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

Αρχική Κατανομή
$\underline{P}^{(0)} = (P_0^{(0)}\ P_1^{(0)} \dots)$
$P_i^{(0)} = P(X_0 = i)$

Ορισμός Μεταβατική Κατανομή
$\underline{P}^{(n)} = (P_0^{(n)}\ P_1^{(n)} \dots)\ ,\ P_j^{(n)} = P(X_n = j)$
$P_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_0 = i)\ P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{i \in S} P_i^{(0)} P_{ij}^{(n)}$

$$\boxed{\underline{P}^{(n)} = \underline{P}^{(0)} \cdot \mathbb{P}^n}$$

Άσκηση $\boxed{6.14}$

$\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$
$X_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n^{\text{οστό}} \text{ φανάρι κόκκινο} \\ 1 & \text{αν } n^{\text{οστό}} \text{ φανάρι πράσινο} \end{cases}$ $\quad S = \{0, 1\}$

$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^{(2)} = (\quad)$
$\mathbb{P}^{(n)} = ?$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$ $\det(A-\lambda I)=0$, λ ιδιοτιμή

$$\mathbb{P} = U^{-1} \Lambda U \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad U = (\underline{u}_1 \ \underline{u}_2)$$

$$\mathbb{P}^n = U^{-1} \Lambda^n U$$

$\underline{u}$ ιδιοδιάνυσμα

λ_i ιδιοτιμή

$\det(P-\lambda I) = (p-\lambda)^2 - (1-p)^2 = p^2 - 2\lambda p + \lambda^2 - (1-2p+p^2) = p^2 - 2\lambda p + \lambda^2 - 1 + 2p - p^2 = \lambda^2 - 2p\lambda + 2p - 1$ (τα λ_1, λ_2 είναι ρίζες)

Εδώ $\lambda_1 = 2p-1$

$\lambda_2 = 1$, $\underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Τελικά</u>

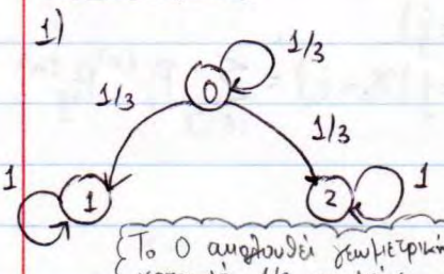
$(A-\lambda I)X = 0$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ λύνουμε το σύστημα για να βρούμε το X που είναι ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbb{P}^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\lambda_1^n & 1-\lambda_1^n \\ 1-\lambda_1^n & 1+\lambda_1^n \end{pmatrix}$$

Όταν $p \in (0,1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

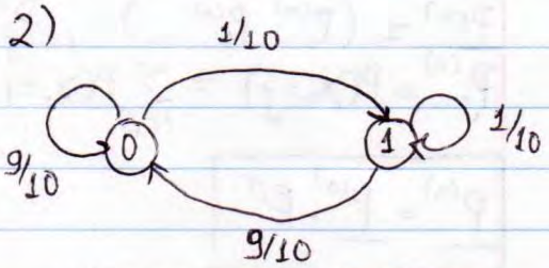
<u>Παράδειγμα:</u>

1)



Το 0 ακολουθεί γεωμετρική κατανομή 1/2 να μείνει 1/2 να φύγει

2)



Μεγαλύτερη πιθανότητα να βρίσκεται στο 0 παρά στο 1 (αλλά στο 1 η πιθανότητα ≠ 0)

<u>Παρένθεση</u>

1) Ζάρι ανεξάρτητες ρίψεις

N = αριθμός ρίψεων έως την πρώτη φορά 1

$N \sim Geom(1/6)$ $\quad \sum^{\infty} P(N=k) = 1$

$P(N=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$, $k = 1, 2, \ldots$

2) α-ζάρια → 1ο δίκαιο
↘ 2ο δεν είναι 1

Επιλέγω ζάρι στην τύχη, ανεξάρτητες ρίψεις.

T = αριθμός ρίψεων μέχρι την πρώτη φορά "1"

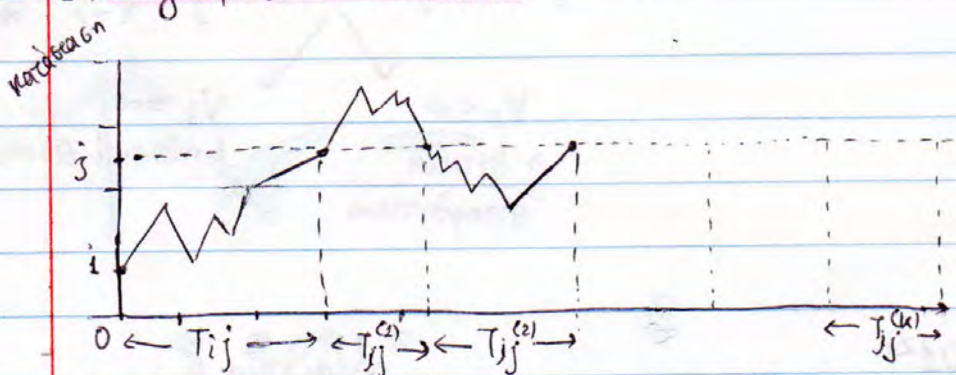
$$P(T=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

$$P(T=k)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right]+\frac{1}{2}\cdot 0,\ \forall\ k=1,2,..$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(T=k)=\frac{1}{2}\sum^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\neq 1$$ δεν είναι γνωστή κατανομή

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά ΜΑΔΧ
(Μαρκοβιανή Αλυσίδας Διακριτού Χρόνου)

1) Ταξινόμηση Καταστάσεων

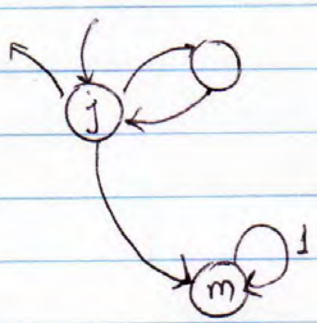


Μαρκοβιανή Ιδιότητα $\Rightarrow$ $T_{ij}, T_{jj}^{(1)}, T_{jj}^{(2)} \dots$ ανεξάρτητες τ.μ.

$T_{jj}^{(1)}, T_{jj}^{(2)}$ ισόνομα

T_{ij}: χρόνος πρώτης μετάβασης από το i στο j $(i\to j)$

$T_{jj}^{(1)}, T_{jj}^{(2)}\dots$: χρόνος επανόδου στη j



$P(T_{jj}=\infty)>0$ (j παροδική)

$P(T_{00}=\infty)=0$

$$T_{ij}=\min\{n\in\mathbb{N}: X_n=j \mid X_0=i\}$$

$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij}=n)$, $n=1,2,\dots$

Έστω $i=j$ T_{jj} χρόνος επανόδου

1) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1 \Rightarrow P(T_{jj}<\infty) < 1 \Rightarrow P(\text{μη επανόδου}) > 0$

j παροδική

2) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$ j : επαναληπτική κατάσταση

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_{jj}=n) = P(T_{jj}<\infty)$$

Έστω $V_j = E(T_{jj})$ → αν j παροδική $\Rightarrow V_j = \infty$

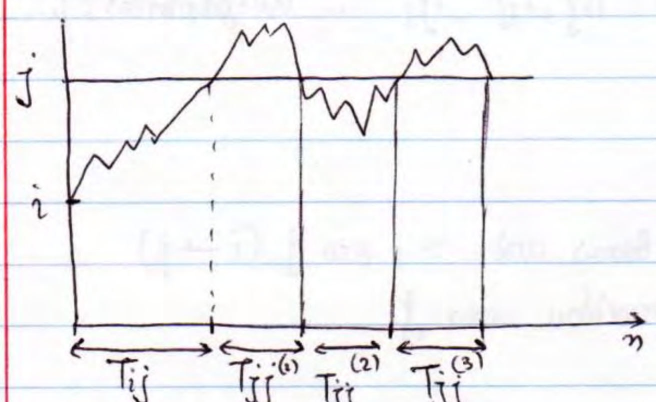
→ αν j επαναληπτική $\Rightarrow V_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f^{(\dots}$

$V_0 < \infty$ j θετικά επαναληπτική

$V_1 = \infty$ μηδενικά επαναληπτική

29/10/2014

Μάθημα 6



T_{ij} = χρόνος πρώτης μετάβασης $i \to j$

$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij}=n)$, $n=1,2,\dots$

Όταν $i=j$, $T_{jj}^{(n)}$ = χρόνος επανόδου στην j

$f_{jj}^{(n)} = P(T_{jj}=n)$

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij}<\infty)$$

$$f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = P(T_{jj}<\infty)$$

$V_j = E[T_{jj}]$ αναμενόμενος χρόνος επανόδου

Ορισμός $(V_j=\infty)$

- j παροδική αν $f_{jj}<1$
- j επαναληπτική αν $f_{jj}=1$

αν $V_j<\infty$ **θετικά επαναληπτική**

αν $V_j=\infty$ **μηδενικά επαναληπτική**

Έστω $I_{ij}^{(n)} = 1(X_n=j \mid X_0=i) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_n=j \\ 0, & \text{αν } X_n\neq j \end{cases}$

Δηλαδή $I_{ij}^{(n)} \sim \text{Bernoulli}(P_{ij}^{(n)})$

όπου $P[I_{ij}^{(n)}=1] = P[X_n=j \mid X_0=i] = P_{ij}^{(n)} \Rightarrow E[I_{ij}^{(n)}] = P_{ij}^{(n)}$

Έστω $M_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} I_{ij}^{(k)}$ = αριθμός επισκέψεων στην j στα πρώτα n βήματα

Έστω $m_{ij}(n) = E[M_{ij}(n)] = E\sum_{k=1}^{n} I_{ij}(k) = \sum_{k=1}^{n} E[I_{ij}(k)] = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)}$ (*)

Καθώς $n\to\infty$

$M_{ij} \xrightarrow{?}$

Ισχύει ότι $M_{ij}(n+1) \geq M_{ij}(n) \geq 0 \;\Rightarrow\; \exists \lim_{n\to\infty} M_{ij}(n) = M_{ij}(\infty)\ (\leq\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{ij}(k)$

αύξουσα! όσο περνάνε τα βήματα, ο αριθμός επισκέψεων ή θα μένει σταθερός ή θα αυξάνεται!

το όριο μπορεί να είναι και άπειρο!

Κατανομή της $M_{ij}(\infty)$

- $P[M_{ij}(\infty)=0] = P[T_{ij}=\infty] = 1-f_{ij}$
- $P[M_{ij}(\infty)=k] = \underbrace{f_{ij}}_{\text{1η φορά στο } j} \cdot \underbrace{f_{jj}^{k-1}}_{k-1 \text{ επάνοδος στο } j} \underbrace{(1-f_{jj})}_{\text{ποτέ ξανά στο } j}, \quad k=1,2,\dots$

Περιπτώσεις

(A) j **παροδική**: $f_{jj}<1 \Rightarrow 1-f_{jj}>0$

$P[M_{ij}(\infty)<\infty] = P[M_{ij}(\infty)=0] + \sum_{k=1}^{\infty} P[M_{ij}(\infty)=k] =$

$= (j - f_{ij}) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij} f_{jj}^{k-1} (1-f_{jj}) = 1$ ($M_{ij}(\infty) < \infty$ με πιθ. 1)

$\Rightarrow m_{ij}(\infty) = E[M_{ij}(\infty)] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P[M_{ij}(\infty) = k] = \dfrac{f_{ij}}{1-f_{jj}} < \infty$

(B) j <u>επαναληπτική</u>: $f_{jj} = 1$

$\Rightarrow P[M_{ij}(\infty) = k] = \begin{cases} 1 - f_{ij}, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$

$\Rightarrow P[M_{ij}(\infty) < \infty] = \sum_{k=0}^{\infty} P[M_{ij}(\infty) = k] = 1 - f_{ij} < 1$

Άρα $\boxed{P[M_{ij}(\infty) = \infty] = f_{ij}} \Rightarrow \boxed{m_{ij}(\infty) = \infty}$

(A) j παροδική $\Rightarrow M_{ij}(\infty) < \infty$ με πιθανότητα 1

$m_{ij}(\infty) = E[M_{ij}(\infty)] = \dfrac{f_{ij}}{1-f_{jj}} < \infty$

(B) j επαναληπτική $\Rightarrow M_{ij}(\infty) = \begin{cases} 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - f_{ij} \\ \infty, & \text{με πιθανότητα } f_{ij} \end{cases}$

$m_{ij}(\infty) = \infty$

<u>Θυμόμαστε (*)</u>: $m_{jj}(n) = E[M_{jj}(n)] = \sum_{k=1}^{n} P_{jj}(k)$

Για $n \to \infty$, $m_{jj}(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}(k)$

<u>Θεώρημα</u>: j παροδική $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}^{(k)} < \infty$

$m_{jj} = \begin{cases} \dfrac{f_{jj}}{1-f_{jj}}, & j \text{ παροδική} \\ \infty, & j \text{ επαναληπτική} \end{cases}$

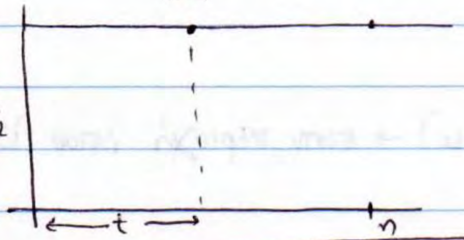
$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n$$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(t)} P_{kj}^{(n-t)} \quad \forall t < n$$

$$f_{ij}^{(n)} = P[T_{ij} = n]$$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{t=1}^{n} P[T_{ij} = t] \cdot P_{jj}^{(n-t)}$$



$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

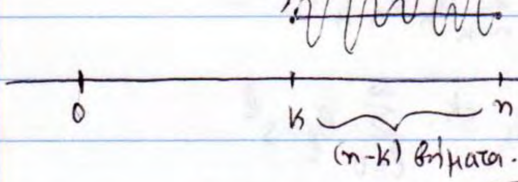
$$\Rightarrow \boxed{P_{ij}^{(n)} = \sum_{t=1}^{n} f_{ij}^{(t)} \cdot P_{jj}^{(n-t)}}$$

31/10/2014

<u>Μάθημα 7</u>

Υπενθύμιση! $\forall\, i,j \quad P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} \cdot P_{jj}^{(n-k)}$

$\forall\, n \geq 1$



Ειδικότερα $P_{jj}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{jj}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$ → πιθανότητα επανόδου σε k-βήματα

<u>"Παράρτημα" : (Πιθανό) - Γεννήτριες</u>

Έστω ακολουθία $\{a_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$

Γεννήτρια συνάρτηση $A(S) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S^n$

Όταν κατανομή πιθανότητας $\{P_n, n=0,1,2,\dots\}$
↪ (ισοδ. X τ.μ. με $P(X=n)=P_n, n=0,1,\dots$)

Πιθανογεννήτρια: $P(s)=\sum_{n=0}^{n} P_n\cdot s^n = E(s^X) = E\left[(e^{\ln s})^X\right] =$

$= E\left(e^{(\ln s)X}\right) = M_X(\ln s)$

1) $|s|<1 \Rightarrow P(s)<\infty$ (συγκλίνει) → στην περιοχή όπου $|s|<1$
2) $P(1)=1$
3) $P'(1)=\sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n = E(X)$
4) Η πιθανογεννήτρια όπως και η ροπογεννήτρια χαρακτηρίζει την κατανομή.
Δηλαδή, αν ξέρω την πιθανογεννήτρια, ξέρω και τη κατανομή της.

• Έστω ακολουθίες $\left.\begin{matrix}\{a_n, n=0,1,2,\dots\} \\ \{b_n, n=0,1,2,\dots\}\end{matrix}\right\} \begin{matrix} A(s) \\ B(s)\end{matrix}$ <u>γεννήτριες</u>

$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$ <u>συνέλιξη</u> των $\{a_n\}, \{b_n\}$

Έστω $\Gamma(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\, s^n \Longrightarrow \Gamma(s)=A(s)B(s)$

$s^n = s^k \cdot s^{n-k}$

$\Gamma(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\, s^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=k} a_k b_{n-k}\cdot s^n =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot s^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} b_{n-k} s^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, s^k \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \cdot s^\ell$

$\{P_{ij}^{(n)}, n=0,1,2,\dots\}$ ακολουθία $\quad P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$

$P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}\cdot s^n$ (γεννήτρια)

$\{f_{ij}^{(n)}, n=0,1,2,\dots\}$, $f_{ij}^{(0)}=0$ (κατανομή της T_{ij})
$\overset{\shortparallel}{P[T_{ij}=n]}$

$F_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$ (πιθανογεννήτρια της T_{ij})

α) Όταν $i \neq j \Rightarrow P_{ij}(s) = F_{ij}(s) \cdot P_{jj}(s)$

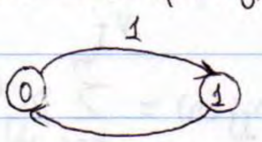
β) Όταν $i = j \Rightarrow P_{jj}(s) = 1 + F_{jj}(s) \cdot P_{jj}(s)$

$$P_{jj}(s) = \frac{1}{1 - F_{jj}(s)}$$

Οριακή Κατανομή ΜΑΔΧ (Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου)

$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)}$

(*) Αντιπαράδειγμα



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{01}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

$\{P_{01}^{(n)}\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\} \Rightarrow \lim P_{01}^{(n)} \nexists$

Ⓐ Έστω j παροδική

$m_{ij}(n) = E[M_{ij}(n)] = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)}$

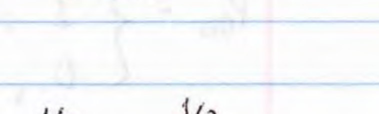
j - παροδική $\Rightarrow m_{jj}(\infty) < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}^{(k)} < \infty \Rightarrow \lim_{k \to \infty} P_{ij}^{(k)} = 0$

Ⓑ Έστω j επαναληπτική

$f_{jj} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} = 1 = P(T_{jj} < \infty)$

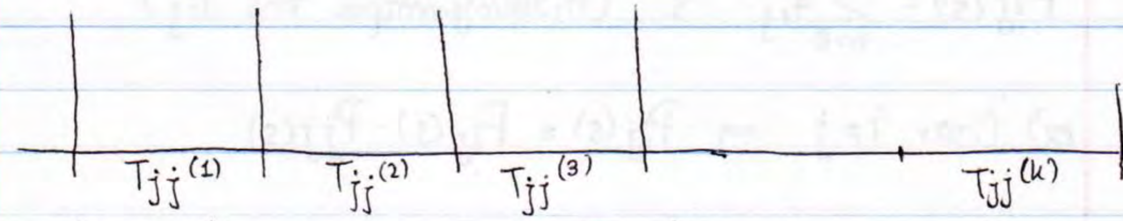
$V_j = E[T_{jj}]$ → $= \infty$ j μηδ. επαναληπτική; → $< \infty$ j θετικά επαναληπτική

↓ αναμενόμενος χρόνος επανόδου 🙂



0. παροδική $\Rightarrow \lim_{k \to \infty} P_{00}^{(k)} = 0$

1 επαναληπτική | $\lim_{k \to \infty}$



$T_{jj}^{(1)}, T_{jj}^{(2)}, \dots$, αιτμ $E\left[T_{jj}^{(k)}\right] = V_j$

$M_{jj}(n) = E$ (αρ. επανόδων σε n- βήμα $| X_0 = j$) = αναν. διαδικ.

• Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{jj}(n)}{n} = \mu = \frac{1}{V_j}$$

Γνωρίζουμε: $m_{jj}(n) = \sum_{k=1}^{n} P_{jj}^{(k)} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{jj}^{(k)} = \frac{1}{V_j}}$

Όμως τι γίνεται $\lim_{k\to\infty} P_{jj}^{(k)}$ — επαναληπτική —

$$C - \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{V_j} \quad \text{(Cesaro limit)}$$

αν $\exists \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} \Rightarrow$

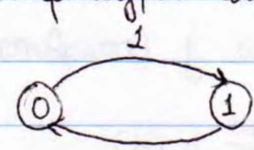
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{V_j}$

Θεώρημα: Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow C - \lim_{n\to\infty} a_n = a$. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει

$$P_{00}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 0, 2, 4, \dots \\ 0, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$\{P_{00}^{(n)}\} = \{1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$$

Αντιπαράδειγμα (συνέχεια)



Έστω $\bar{P}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} P_{00}^{(k)}$

$\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \dots\} \to \frac{1}{2}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{m_{00}(n)}{n} = \frac{1}{2}$

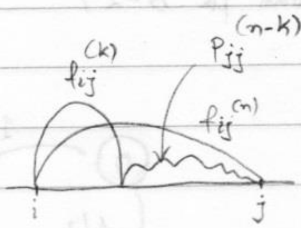
05/11/2014

Μάθημα 8

$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$$

① j παροδική $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0 \;\; \forall i$



② $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \underbrace{f_{ij}}_{\text{πιθανότητα του } i \text{ να πάει στο } j} \; \underbrace{\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)}}_{\text{πιθανότητα επανόδου στο } j \text{ σε "άπειρα" βήματα}}$

Όταν j επαναληπτική

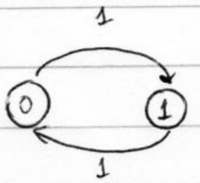
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{jj}^{(k)} = \frac{1}{V_j}, \quad V_j = E[T_{jj}] = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)}$$

Γνωρίζουμε $\lim_{n\to\infty} \frac{m_{jj}^{(n)}}{n} = \frac{1}{V_j}$ (ανανεωτικό θεώρημα)

όπου $m_{jj}(n) = E\left[\sum_{k=1}^{n} 1(X_k = j) \mid X_0 = j\right]$

$\Rightarrow$ ⟶ αν $\exists \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} \to \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{V_j}$

μπορεί να μην υπάρχει το όριο.

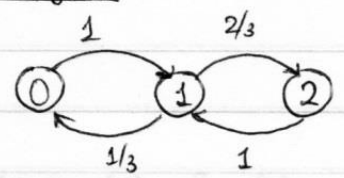


$$P_{00}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$\{P_{00}^{(n)}\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ (αυτή η ακολουθία δεν έχει όριο γιατί είναι περιοδική)

Κατάσταση j είναι <u>περιοδική</u> (με περίοδο d)
Αν $P_{jj}^{(n)} = 0 \;\; \forall n \neq kd, \; k \in \mathbb{N}$ Αν $d = 1$, η j <u>απεριοδική</u>

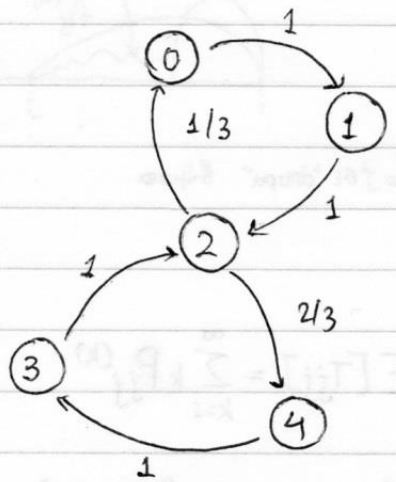
Παράδειγμα:



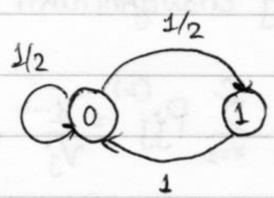
$P_{00}^{(n)}$

n	$>0, =0$
1	0
2	+
3	0
4	+
5	0

(Περιοδική με $\partial=2$)



$\leftarrow \partial = 3$



$\leftarrow \partial = 1$.

$f_{00}^{(1)} = \frac{1}{2} > 0$

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_j &= \text{ΜΚΔ}\{n : f_{jj}^{(n)} > 0\} \\ &= \text{ΜΚΔ}\{n : P_{jj}^{(n)} > 0\}\end{aligned}}$$

$\{n : f_{jj}^{(n)} > 0\} = \{1, \dots\} \rightarrow \partial_j = 1$

Αν $P_{00}^{(1)} = 0$

$P_{00}^{(2)} > 0$ $\quad \{n : P_{jj}^{(n)} > 0\} = \{2, 3, \dots\} \Rightarrow \partial = 1$

$P_{00}^{(3)} > 0$

$\partial_j = \text{ΜΚΔ}\{n : P_{jj}^{(n)} > 0\}$

$\partial_j = 1$ απεριοδική

$\partial_j > 1$ περιοδική με περίοδο j

Θεώρημα: Έστω j επαναληπτική

Αν j → μηδενικά επαναληπτική $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = 0$

Αν j → θετικά επαναληπτική $\Rightarrow$ → $\partial_j = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{V_j} > 0$

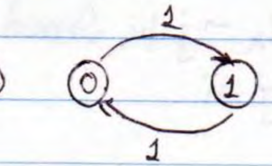
→ $\partial_j > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} \nexists$ ⊛

$$\circledast \quad \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n\partial_j)} = \frac{\partial_j}{V_j}$$

Επίσης:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{jj}(n)}{n} = \begin{cases} 0, & j \text{ περιοδική ή μηδενικά επαναληπτική} \\ \frac{1}{V_j}, & j \text{ θετικά επαναληπτική} \end{cases}$$

Παράδειγμα

① 

θετ. επαναληπτική & περιοδική :)

$\lim_{n\to\infty} P_{00}^{(n)} = ? \Rightarrow \nexists$ (λόγω περιοδικότητας)

Στο πρώτο βήμα ($n=1$) η $P_{00}^{(1)} = 0$, αφού πηγαίνει με πιθ. 1 στο 1· Στο δευτ. βήμα ($n=2$) η $P_{00}^{(2)} = 1$, αφού ήταν στο 1 και γυρνάει με πιθ. 1 στο 0· κοκ.
$n=1 \Rightarrow P_{00}^{(1)} = 0$
$P_{00}^{(2)} = 1$
$P_{00}^{(3)} = 0$
$P_{00}^{(4)} = 0$
δηλ. $P_{00}^{(n)} = 0$, όταν το n πολ/σιο του 2 άρα είναι περιοδική με $\partial = 2$

$j=0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{00}(n)}{n} = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{2}$$

$f_{00}^{(k)}, \ k = 1, 2, \ldots$

$$f_{00}^{(k)} = \begin{cases} 1, & k=2 \\ 0, & k\neq 2 \end{cases} \quad P[T_{00}=2]=1$$

$f_{00} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(k)} = 1 \Rightarrow$ 0 επαναληπτική

$V_j = E[T_{jj}] = 2 < \infty \Rightarrow$ 0 θετικά επαναληπτική

0 περιοδική, $\partial_0 = 2$

$\lim_{n\to\infty} P_{10}^{(n)} = f_{10} \cdot \lim_{n\to\infty} P_{00}^{(n)}$ ($\nexists$ αφού το $\lim_{n\to\infty} P_{00}^{(n)}$ $\nexists$. αλλιώς, θα έπρεπε να υπολογίσουμε και το f_{10} για να βρούμε τελικά το όριο)

$f_{10} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{10}^{(k)} \qquad f_{10}^{(k)} = P[T_{10}=k]$

12/11/2014

Μάθημα 9

Επικοινωνία Καταστάσεων

Ορισμοί 1) Η κατάσταση j είναι προσιτή από i $(i \to j)$ αν $\exists\, n$: $P_{ij}^{(n)} > 0$

$\Rightarrow \exists$ μονοπάτι: $i \to i_0 \to i_1 \to \dots \to i_k \to j$ με θετική πιθανότητα

2) Οι i,j επικοινωνούν αν $i \to j$ και $j \to i$

Παρατηρήσεις:

1) $i \leftrightarrow i$ (συμβατικά $P_{ii}^{(0)} = 1$)

2) $i \to j$, $j \to k \Rightarrow i \to k$

3) $i \leftrightarrow i$, $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$, $j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$

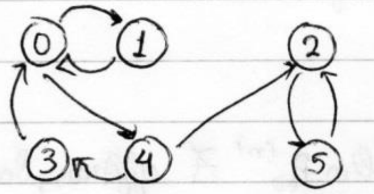
$\leftrightarrow$: σχέση ισοδυναμίας

$S = C_1 \cup C_2 \cup \dots$

$C_\ell \cap C_m = \emptyset \quad \forall\, \ell \neq m$

: $\forall\, i,j \in C_\ell \Rightarrow i \leftrightarrow j$

$\forall\, i \in C_\ell,\ j \in C_m,\ \ell \neq m \Rightarrow i \not\leftrightarrow j$



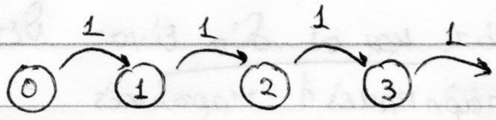
$S = \{0,1,2,3,4,5\}$

$\left.\begin{array}{l} C_1 = \{0,1,3,4,\} \\ C_2 = \{2,5\} \end{array}\right\}$ κλάσεις επικοινωνίας

$\left.\begin{array}{l} 0 \leftrightarrow 1 \\ 0 \leftrightarrow 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \leftrightarrow 3$

$2 \not\leftrightarrow 4$

Παρ. 2

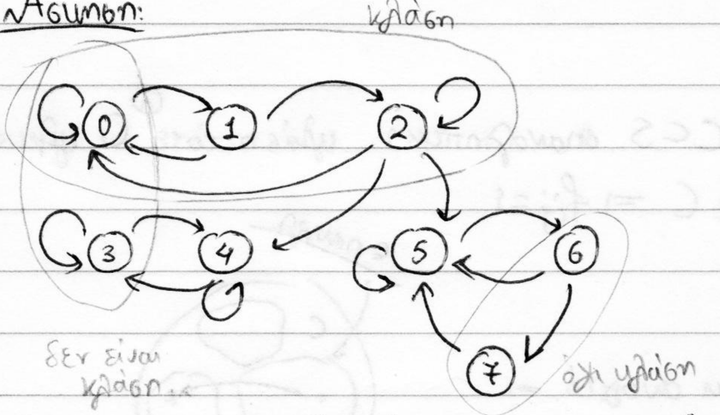


$C_0 = \{0\}$

$C_1 = \{1\}$

$\vdots$

Άσκηση:



$C_1 = \{0,1,2\}$

$C_2 = \{3,4\}$

$C_3 = \{5,6,7\}$

C_3 = κλειστό , $C_2 = \{3,4\}$ = κλειστό $C \cup C$ κλειστό

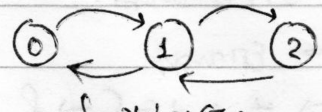
Ορισμοί

α) $C \subset S$ κλειστό σύνολο αν $\forall i \in C,\ j \notin C \Rightarrow P_{ij} = 0$

β) $C \subseteq S$ ανοιχτό αν C όχι κλειστό $\Leftrightarrow \exists\, i \in C,\ j \notin C$ $P_{ij} > 0$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\forall i \in C\ \exists\, j \notin C : P_{ij} > 0$

Ορισμός:

Μια ΜΑ αδιαχώριστη αν αποτελείται από μία κλάση επικοινωνίας $\Leftrightarrow$ Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν



αδιαχώριστη

Αν ΜΑ αδιαχώριστη $\Rightarrow \forall\, C \subset S$, C ανοιχτό

Θεώρημα 1: Αν $i \longleftrightarrow j$ τότε και οι δύο είναι θετικά επαναληπτική ή μηδενικά επαναληπτικές ή παροδικές επίσης απεριοδικές ή περιοδικές με την ίδια περίοδο

Πόρισμα

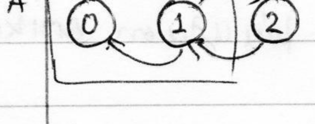
1) Όλες οι καταστάσεις μιας κλάσης επικοινωνίας είναι του ίδιου τύπου
2) Αν μία ΜΑ είναι αδιαχώριστη τότε όλες οι καταστάσεις ιδίου τύπου

Θεώρημα 2: Αν $C \subset S$ επαναληπτική κλάση τότε C κλειστό ⓐ σύνολο και $\forall\, i,j \in C \Rightarrow f_{ij} = 1$

ⓐ Αρκεί να δείξω
Αν A κλάση και ανοιχτό $\Rightarrow$ Απαροδική

Απόδειξη: Έστω $A \subset S$, κλάση, ανοιχτό σύνολο $\Rightarrow \exists\, i \in A, j \notin A$: $P_{ij} > 0 \Rightarrow i \to j$. Όμως τότε $j \not\to i \Rightarrow f_{ji} = 0$ $f \neq j,i$

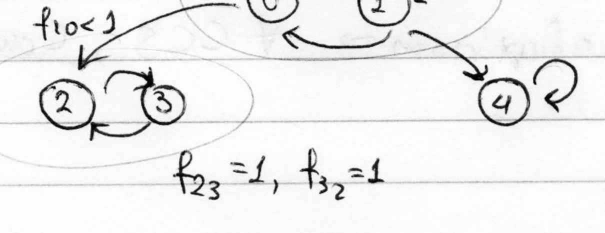
Τότε $f_{ii} = P_{ij} \cdot \cancel{f_{ji}}^{0} + P_{i \neq j} \cdot P[\text{επιστ. } i \mid X_1 \neq j] =$
$= (1 - P_{jj}) P[\ \mid\ ] < 1 \Rightarrow$ i παροδική



A ανοιχτό κ όμως $1,2 \in A$ επαναλ.

Αν C κλειστή κλάση $\begin{cases} \Rightarrow \text{επαναλ.} \\ \Rightarrow \forall\, i,j \in C \Rightarrow f_{i,j} = 1 \end{cases}$

$f_{01} < 1$
$f_{10} < 1$



$f_{23} = 1$, $f_{32} = 1$

$C_1 = \{2,3\} \Rightarrow$ επαναλ. (κλειστή)
$C_2 = \{0,1\}$ ανοιχτή $\Rightarrow$ παροδική
$C_3 = \{4\}$
ανοιχτή $\Rightarrow$ παροδική

Ανοιχτή κλάση $\Rightarrow$ παροδική
Επαναλ. κλάση $\Rightarrow$ κλειστή
Κλειστή κλάση $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{matrix} \text{γενικά} \\ \text{οτιδήποτε} \end{matrix} \right\}$ αν $|C|<\infty \Rightarrow$ θετικά επαναληπτική

19/11/2014

Μάθημα 10

Οριακές πιθανότητες $\left(\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}\right)$

C-οριακές πιθανότητες $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} m_{ij}(n)$

Επικοινωνία Καταστάσεων

Κλάσεις επικοινωνίας $\rightarrow$ ανοικτές
$\searrow$ κλειστές

Αδιαχώριστη αλυσίδα (1 κλάση)

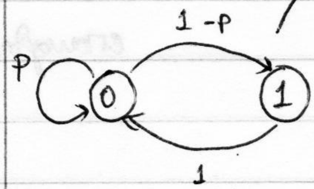
Υπενθύμιση: 1) Στάσιμη στοχαστική ανέλιξη
2) Για Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου $\underline{P}^{(n)} = (P_j^{(n)}, j\in S)$
$\underline{P}^{(n)}$ μεταβατική κατανομή, $P_j^{(n)} = P(X_n=j)$
$\underline{P}^{(n)} = \underline{P}^{(0)}\cdot \mathbb{P}^n$
$\Rightarrow$ Η ΜΑΣΧ είναι στάσιμη αν $\underline{P}^{(n)} =$ σταθερό $\forall n$

Έστω $\underline{\Pi} = (\pi_j, j\in S)$ διάνυσμα πιθανότητας τέτοιο ώστε $\underline{\Pi} = \underline{\Pi}\cdot \mathbb{P}$
($\Leftrightarrow \underline{\Pi}\cdot(I-\mathbb{P}) = 0$ για $|S|<\infty$)

διάνυσμα στάσιμης κατανομής

Τότε αν $\underline{P}^{(0)} = \underline{\Pi} \Rightarrow \underline{P}^{(1)} = \underline{P}^{(0)}\mathbb{P}^1 = \underline{\Pi}\cdot\mathbb{P} = \underline{\Pi}$
$\Rightarrow \underline{P}^{(2)} = \underline{\Pi} \Rightarrow \boxed{\underline{P}^{(n)} = \underline{\Pi}\ \forall n}$

Ταράδειγμα:



$\Theta E \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \underline{p}^{(n)} = \underline{w}$ (ανεξ. του $\underline{p}^{(0)}$)

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Έστω π.χ. $X_0=0$ δηλ. $\underline{p}^{(0)} = (1,0)$

$$\underline{p}^{(1)} = (1,0)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (p\,,\,1-p) \neq p^{(0)}$$

$$\underline{\pi} = \underline{\pi}\cdot\mathbb{P}$$

$$(\pi_0 \ \ \pi_1) = (\pi_0 \ \ \pi_1)\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_0 p + \pi_1,\ \pi_1(1-p))$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 p + \pi_1 \\ \pi_1 &= \pi_0(1-p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_0(1-p) \\ \pi_1 &= \pi_0(1-p) \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &(1-\pi_0) = \pi_0(1-p) \\ &\pi_0 = \frac{1}{2-p} \qquad \pi_1 = \frac{1-p}{2-p} \end{aligned}$$

Αν $p^{(0)} = \left(\frac{1}{2p}, \frac{1-p}{2}\right) \Rightarrow \dots\ \underline{p}^{(n)} = \left(\frac{1}{2-p}, \frac{1-p}{2-p}\right)\ \forall n$

Έστω διάνυσμα $\underline{\pi} = (\pi_j,\ j\in S)$ τέτοιο ώστε

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\pi} = \underline{\pi}\cdot\mathbb{P} \\ &\sum_{j\in S}\pi_j = 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} &\pi_j = \sum_{i\in S}\pi_i P_{ij} \quad \forall\, j\in S \\ &\sum_{j\in S}\pi_j = 1 \end{aligned}$$

εξισώσεις ισορροπίας

εξίσωση κανονικοποίησης

Αν $\underline{\pi} \geq 0 \Rightarrow$ (π στάσιμη κατανομή της ΜΑΔΧ) $\Rightarrow$ Αν $\underline{p}^{(0)} = \underline{\pi} \Rightarrow \underline{p}^{(n)} = \underline{\pi}\ \forall n$

Εξισώσεις ισορροπίας

$$\pi_j = \sum_{i\in S}\pi_i P_{ij} \quad j\in S$$

$\underline{\pi}=0$ πάντα λύση

Μας ενδιαφέρουν οι μη αρνητικές/μη μηδενικές λύσεις

Παρατηρήσεις

1) Έστω $\underline{\pi}^{(0)} = \underline{\pi}^{(0)} \mathbb{P}$, $\underline{\pi}^{(0)} \geq 0$, $\underline{\pi}^{(0)} \neq \underline{0}$

$\Rightarrow \exists$ άπειρες λύσεις $\underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot \mathbb{P}$, $\underline{\pi} \geq 0$, $\underline{\pi} \neq \underline{0}$

$$\underline{\pi} = \lambda \pi^{(0)}, \lambda > 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\pi} \geq 0 \\ \underline{\pi} \neq 0 \\ \underline{\pi} = \lambda \underline{\pi}^{(0)} = \lambda \cdot \pi^{(0)} \mathbb{P} = \underline{\pi} \cdot \mathbb{P} \end{cases}$$

2) Έστω $\underline{\pi}^{(0)} = \underline{\pi}^{(0)} \mathbb{P}$, $\pi^{(0)} \geq 0$, $\neq \underline{0}$

$\Rightarrow \exists$ λύση του $\begin{array}{l} \underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot \mathbb{P} \\ \sum_{j \in S} \pi_j = 1 \end{array}$

Αν $\sum_j \pi_j^{(0)} = 1$ ✓

Αν $\sum_j \pi_j^{(0)} = R > 0$, $R \neq 1$

για $\lambda = 1/R$ $\quad \underline{\pi} = \frac{1}{R} \underline{\pi}^{(0)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot \mathbb{P} \\ \sum \pi_j = \frac{1}{R} \sum \pi_j^{(0)} = 1 \end{array}}$

Ερώτημα: Πότε $\exists$ λύση των εξισώσεων στάσιμης κατανομής;

(A) ΜΑΔΧ αδιαχώριστη

(B) ΜΑΔΧ διαχωρίσιμη.

(A) Θεώρημα: Έστω αδιαχώριστη ΜΑΔΧ

Η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική αννν έχει μοναδική στάσιμη κατανομή $\underline{\pi}$ τέτοια ώστε $\pi_j > 0 \ \forall j \in S$

Σ' αυτή την περίπτωση $\boxed{\pi_j = \frac{1}{V_j}, j \in S}$

$\vartheta.E.$ αδιαχ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\underline{\pi} = \underline{\pi}\cdot \mathbb{P} \\ \sum \pi_j = 1\end{array}\right\}$ αυτό το σύστημα έχει μοναδ. λύση

Για $\vartheta.E.$ αδιαχ.

$$\lim P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{v_j} \quad \text{(απεριοδική)}$$

$$\lim \frac{1}{n} m_{ij}^{(n)} = \frac{1}{v_j}$$

28/11/2014

Μάθημα 11

Στάσιμη Κατανομή

$\underline{\pi} = (\pi_j)_{j\in S}$ κατανομή πιθ. : στάσιμη κατανομή αν $\underline{\pi} = \underline{\pi}\,\mathbb{P}$,

$\pi_j = \sum_{j\in S} \pi_i P_{ij}$, $\forall j \in S$

$\sum_{j\in S} \pi_j = 1$

Αν $\underline{P}^{(0)} = \underline{\pi} \Rightarrow \underline{P}^{(n)} = \underline{\pi} \quad \forall n \geq 1$

Θεώρημα: Μία Μ.Α. αδιαχώριστη θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow$ $\exists$ μοναδική στάσιμη κατανομή $\underline{\pi}$, με $\pi_j > 0 \ \forall j$

Τότε $\pi_j = \frac{1}{v_j} \ \forall j$

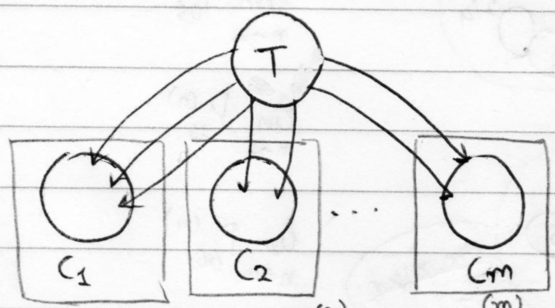
απεριοδική: $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \overset{\pi_j}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{v_j}}} \ \forall j \in S$ (αδιαχ. θετ. επαν.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{ij}(n)}{n} = \frac{1}{v_j}$$

Διαχωρίσιμες αλυσίδες ($|S|<\infty$)

Μία διαχωρίσιμη ΜΑΔΧ έχει $C_1, C_2, \dots, C_m$ θετικά επαναληπτικές κλάσεις ($m \geq 1$)

T = σύνολο παροδικών καταστάσεων.



$\underline{\pi}^{(1)}$ μοναδική στας. κατανομή $\quad \underline{\pi}^{(2)} \quad \underline{\pi}^{(m)}$

$$\begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & \cdots & C_m & T \\ \hline C_1 & \mathbb{P}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & \mathbb{P}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_m & 0 & 0 & 0 & \mathbb{P}_m & 0 \\ T & & & R & & \end{array} = \mathbb{P}$$

$\underline{\pi}^{(1)} = \pi^{(1)} \mathbb{P}_1$

$\underline{\pi}^{(1)} \underline{e} = 1$

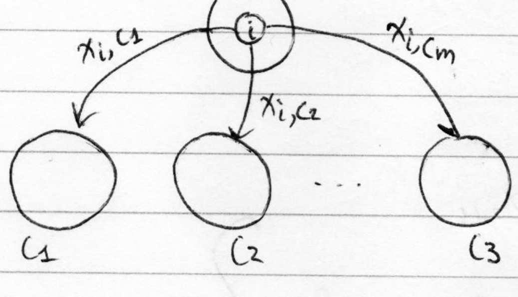
πιθανότητα απορρόφησης i κατάσταση, k κλάση

Έστω x_{ik}, $i \in T$

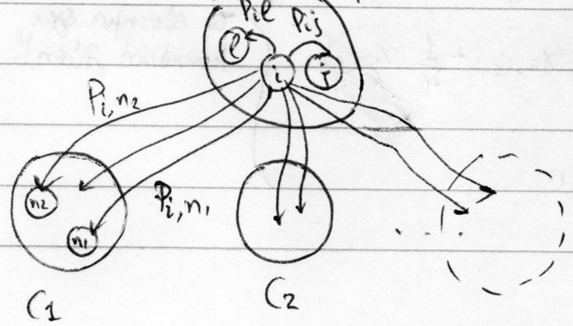
$k = 1, 2, \dots, m$

$x_{ik} = x_{i,C_k} = x_i(C_k) = \lim_{n\to\infty} P(X_n \in C_k \mid X_0 = i)$ πιθ. απορρόφησης στη $C_k \mid X_0 = i$

$\forall k \ \{x_{i,C_k}, i \in T\}$ ικανοποιούν γραμμικό σύστημα



$$\forall i \in T: \sum_{k=1}^{m} x_{i,C_k} = 1$$

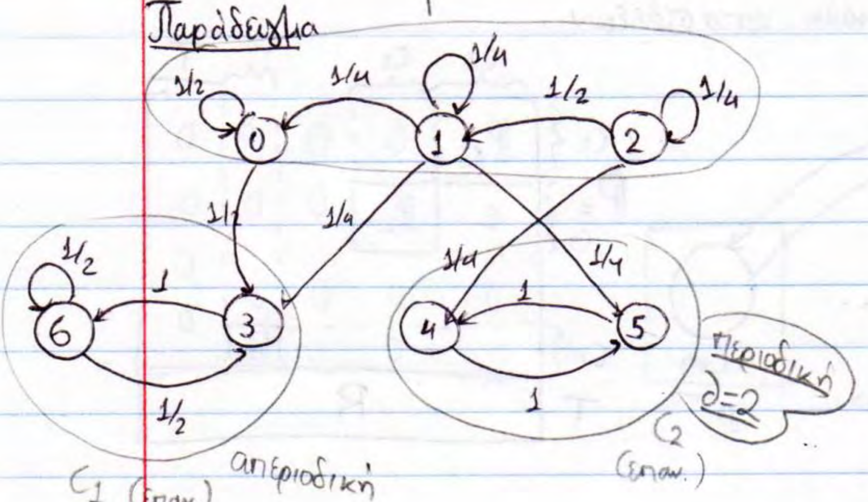


$$x_{i,C_k} = \sum_{j \in S} P_{ij} x_{j,C_k} =$$

$$= \sum_{j \in C_k} P_{ij} \underbrace{x_{j,C_k}}_{=1} + \cancel{\sum_{j \in C_l \neq C_k} P_{ij} x_{j,C_k}}^{\,0} + \sum_{j \in T} P_{ij} x_{j,C_k}$$

$$\boxed{x_{i,C_k} = \sum_{j\in C_k} P_{ij} + \sum_{j\in T} P_{ij}\, x_{j,C_k}} \quad i\in T$$

Παράδειγμα



$\lim_{n\to\infty} P_{05}^{(n)}$

$\lim_{n\to\infty} P_{36}^{(n)}$

$\lim_{n\to\infty} P_{66}^{(n)}$

$\lim_{n\to\infty} P_{25}^{(n)}$

Στάσιμες κατανομές στις C_1, C_2

$\pi_j = \sum_i \pi_j P_{ij}$

C_1 $\pi_6 = \pi_6 \cdot \frac{1}{2} + \pi_3 \cdot 1$

πως πας στην κατ. 6? Αν είσαι στην 6 με πιθ. $\frac{1}{2}$ ή αν είσαι στην 3 με πιθ. 1!

$\pi_3 + \pi_6 = 1$

$\pi_3, \pi_6 = \ldots$

C_2 αντίστοιχα. $\left.\begin{array}{l}\pi_4 = \pi_4 \cdot 0 + \pi_5 \cdot 1 \\ \pi_4 + \pi_5 = 1\end{array}\right\} \pi_4 = \pi_5 = \frac{1}{2}$

Πιθανότητες απορρόφησης

στην C_1 $\quad x_{0,C_1}, x_{1,C_1}, x_{2,C_1}$

- $x_{0,C_1} = \frac{1}{2} x_{0,C_1} + \frac{1}{2} \cdot \underset{x_{3,C_1}}{\underset{\shortparallel}{1}}$

- $x_{1,C_1} = \frac{1}{4} x_{1,C_1} + \frac{1}{4} x_{0,C_1} + \frac{1}{4} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{x_{3,C_1}}} + \frac{1}{4} \cdot \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\cancel{x_{5,C_1}}}}$

- $x_{2,C_1} = \frac{1}{4} x_{2,C_1} + \frac{1}{2} x_{1,C_1} + \frac{1}{4} \cdot \underset{x_{4,C_1}}{\underset{\shortparallel}{0}}$ (η 4 δεν είναι στην C_1!)

η κατάσταση 5 είναι στην κλάση C_2!

το σύστημα έχει μοναδική λύση!!

C_2

$x_{i,C_2} = 1 - x_{i,C_2} \quad \forall i \in T$

$\lim_{n\to\infty} P_{06}^{(n)} = x_{0,C_1} \cdot \pi_6$

$\lim_{n\to\infty} P_{15}^{(n)} = \cancel{x_{1,C_2} \cdot \pi_5}$ (το όριο δεν υπάρχει, αφού C_2 περιοδική με $d=2$

$\lim_{n\to\infty} P_{43}^{(n)} = 0$ ($3 \in C_1$ και $4 \in C_2$)

05/12/2014

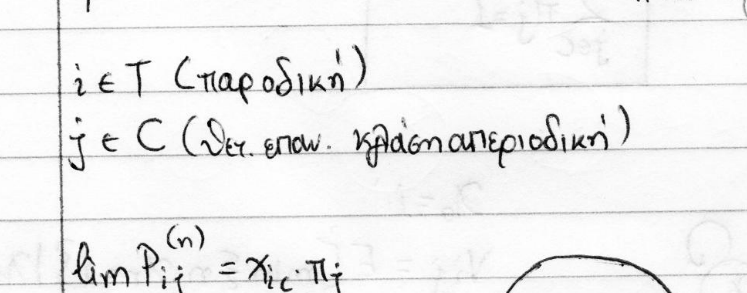
Μάθημα 12

Οριακές Πιθανότητες

Έστω C θετικά επαναληπτική κλάση, απεριοδική | στάσιμη κατανομή στο C, $\{\pi_i, i \in C\}$

$\forall\, i,j \in C \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall i$!!

μετά από πάρα πολλά βήματα, θα είναι τόσες πολλές και διαφορετικές οι μεταβάσεις που η κατάσταση στην οποία θα βρεθώ δεν εξαρτάται καθόλου από την αρχική μου κατάσταση i. Αυτό όμως δεν αναιρεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα.



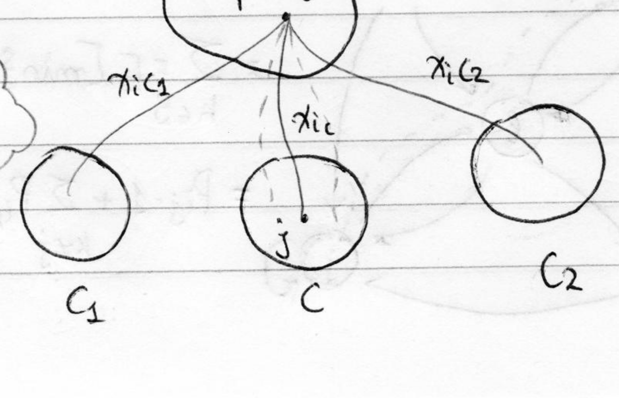
$i \in T$ (παροδική)

$j \in C$ (θετ. επαν. κλάση απεριοδική)

$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = x_{iC} \cdot \pi_j$

$x_{iC} = \lim_{n\to\infty} P[X_n \in C \mid X_0 = i]$

αν η κλάση είναι περιοδική τότε το όριο αυτό δεν υπάρχει :)



Αναμενόμενοι Χρόνοι Πρώτης Μετάβασης

T_{ij} = χρόνος πρώτης μετάβασης στη $j \mid X_0=i$ $= \min\{n : X_n=j \mid X_0=i\}$

$\forall\, i\neq j$ $T_{ij}\geq 1$

Αν $i=j$ $T_j=T_{jj}\geq 1$ (Αν δηλ. ξεκινάω από το j τότε σκέφτομαι τον χρόνο επανόδου στο j)

$E[T_{ij}]=V_{ij}$ = αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης
(exp. first passage times) ↑

$i=j$ $E[T_j]=V_j$
$\left[\pi_j=\frac{1}{V_j}\right]$

$x_{iC}=\lim_{n\to\infty} P[X_n\in C \mid X_0=i]$

$\lim P_{ij}^{(n)}=\frac{1}{V_j}$ i θ.ε. απεριοδική

π.χ. αν $V_j=5 \Rightarrow \pi_j=\frac{1}{5}=0,2$

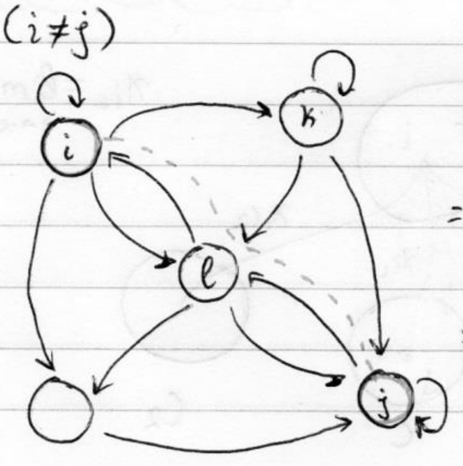
V_j ($\downarrow$ $i=j$) α) j θετ. επαναληπτική $\Rightarrow V_j=\frac{1}{\pi_j}$

β) j μηδ. επαναληπτική ή παροδική $\Rightarrow V_j=\infty$

π_j = στάσιμη πιθανότητα

$$\boxed{\pi_j=\sum_{i\in C}\pi_j P_{ij} \qquad \sum_{j\in C}\pi_j=1}$$

V_{ij} $(i\neq j)$



$X_0=i$

$V_{ij}=E[\underbrace{\min\{n: X_n=j\}}_{Y} \mid X_0=i]=$

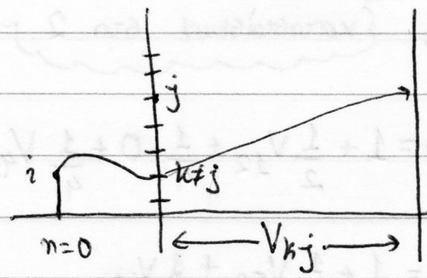
$=\sum_{k\in S} E[\min\{n: X_n=j\} \mid X_0=i, X_1=k]\cdot P_{ik}$

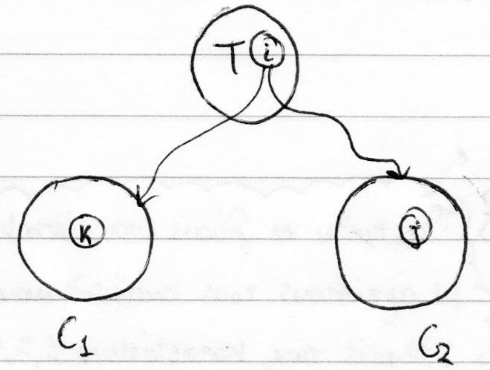
$=P_{ij}\cdot 1+\sum_{k\neq j} P_{ik}(1+V_{kj})=$

$$= \boxed{P_{ij}\,1 + \sum_{k\neq j} P_{ik}\cdot 1} + \sum_{k\neq j} P_{ik} V_{kj}$$

$$\boxed{V_{ij} = 1 + \sum_{k\neq j} P_{ik} V_{kj}\,,\ i\in S}$$

$$E[\min\{n : X_n = j \mid X_0 = i, X_1 = k\}] = \begin{cases} 1, & k=j \\ 1+V_{kj}, & k\neq j \end{cases}$$

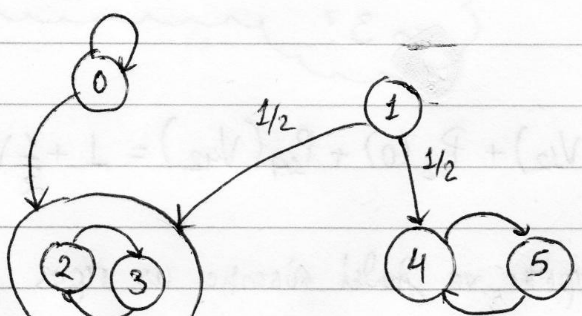




$$V_{ij} = 1 + \sum_{k\neq j} P_{ik} V_{kj}$$

$V_{ij} = \infty$, $i\in C_1$, $j\in C_2$

$V_{ij} = ?$ $i\in T$, $j\in C_2$



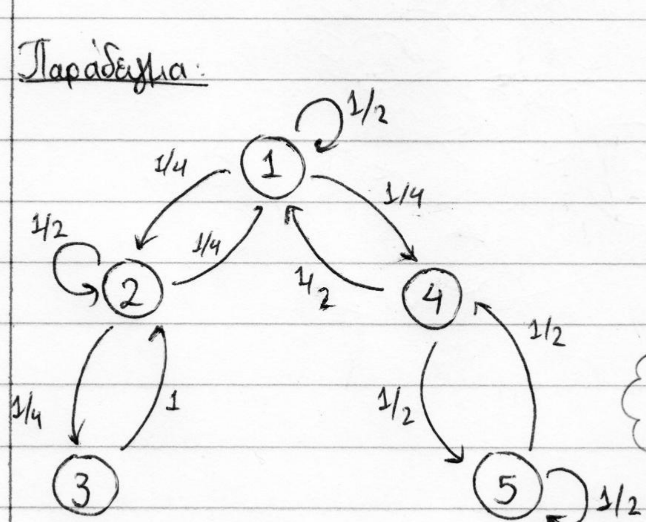
$V_{04} = \infty$

$V_{02} < \infty$

$V_{12} = \infty$

$V_{14} = \infty$

Παράδειγμα:



(αδιαχώριστη + πεπερασμένη)

↓

θετικά επαναληπτική απεριοδική αλυσίδα

$P_{11} > 0 \Rightarrow 1$: απεριοδική

η περιοδικότητα ή η απεριοδικότητα είναι ιδιότητα κλάσης. Αφού λοιπόν η 1 είναι απεριοδική, όλες οι άλλες καταστάσεις είναι απεριοδικές αφού ανήκουν στην ίδια κλάση. (αδιαχώριστη αλυσίδα)

$V_{12} = ?$

Για να βρώ το χρόνο από το $1 \to 2$ πρέπει να βρω τους χρόνους όλων των V_{i2} καταστάσεων στο 2

$$\left.\begin{aligned} V_{12} &= 1 + \frac{1}{2}V_{12} + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}V_{42} \\ V_{42} &= 1 + \frac{1}{2}V_{52} + \frac{1}{2}V_{12} \\ V_{52} &= 1 + \frac{1}{2}V_{52} + \frac{1}{2}V_{42} \end{aligned}\right\} 3\times 3$$

$V_{32} = 1 + 1\cdot 0$

$V_2 = \frac{1}{\pi_2}$ $\boxed{V_{53}}$ $\{V_{i3}, i \in S\}$

Θα πρέπει να λύσω ένα σύστημα με αγνώστους τους αναμενόμενους χρόνους των καταστάσεων 1,2,4,5 στο 3 !

$V_{12} = E[T_{12}] = 1 + P_{11}(V_{12}) + P_{12}(0) + P_{14}(V_{42}) = 1 + \frac{1}{2}V_{22} + \frac{1}{4}V_{42}$

Για να υπολογίσω το V_{ij} πρέπει να λυθεί σύστημα ως προς $\{V_{kj}, k \in S, k \neq j\}$

10/12/2014

Μάθημα 13

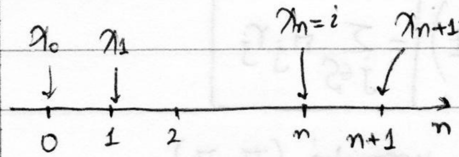
Μαρκοβιανές Αλυσίδες με Αμοιβές

$\{X_n, n=0,1,\dots\}$ ΜΑΔΧ | R_n = αμοιβή στην περίοδο n

$\mathbb{P} = (P_{ij})_{i,j \in S}$

Παράδειγμα

(αυτοκίνητο, μηχάνημα) X_n = κατάσταση λειτουργίας στην αρχή περιόδου n



$R_n(i,j)$

π.χ. $\boxed{R_n \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)}$

δηλ. μπορεί να ακολουθεί μία κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_{ij} και διασπορά σ^2

π.χ. $\boxed{\sigma^2 = 0 \Rightarrow R_n = R_n(i,j)}$

1) Το R_n τ.μ. με κατανομή που εξαρτάται από X_n, X_{n+1}

2) $R_n = r_{ij}$

3) $R_n = r_i$

εδώ εξαρτώμαι από όλο το παρελθόν, άρα η Μαρκοβιανή ιδιότητα χάνεται. Δεν θα μελετηθούν

Γενικό μοντέλο αμοιβής

R_n = τ.μ. με κατανομή που εξαρτάται από $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ ☺

Έστω ότι η ΜΑΔΧ $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ είναι θ.ε. με οριακή κατανομή π

δηλ. $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j \ \forall i$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{ij}^{(n)}}{n} = \pi_j \ \forall i$$

$$? \ \exists \ \lim_{n\to\infty} \frac{E(R_1+R_2+\ldots+R_n)}{n} = ?$$

$E[R_n \mid X_n = i] = ?$

(3) $E[R_n \mid X_n = i] = r_i$

(2) $E[R_n \mid X_n = i] = \sum_j E[R_n \mid X_n = i, X_{n+1} = j]\, P[X_{n+1} = j \mid X_n = i] =$

$= \sum_j r_{ij} P_{ij} \equiv r_i$

(1) $E[R_n \mid X_n = i] = \sum_j P_{ij}\, E[R_n \mid X_n = i, X_{n+1} = j] \overset{\text{αν}}{=} r_{ij}$

Γενικά ορίζουμε
$r_i = E[R_n | X_n = i], \ i \in S$

$$\bar{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{E\left(\sum_{t=0}^{n-1} R_t\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\sum R_t}{n}\right) = \boxed{\sum_{j\in S} \pi_j r_j}$$

π.χ.  οριακή κατανομή (π_0, π_1)

$$\bar{R}_n = \frac{E\left(\sum_{t=0}^{n-1} R_t\right)}{n} = \frac{E(R_0)+E(R_1)+E(R_2)+\dots+E(R_{n-1})}{n} = \frac{r_0 m_0(n) + r_1 m_1(n)}{n} =$$

$$= r_0 \underbrace{\frac{m_0(n)}{n}}_{\pi_0} + r_1 \underbrace{\frac{m_1(n)}{n}}_{\pi_1} \qquad E(R_t) = \begin{cases} r_0 & \text{αν } X_t = 0 \\ r_1 & \text{αν } X_t = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim \bar{R}_n = \pi_0 r_0 + \pi_1 r_1$$

$(X_0, X_1, \dots, X_n) = (00101000)$ $n = 0, \dots, 7$

Άσκηση: Δωμάτιο

Διακριτός χρόνος $n = 1, 2, 3, \dots$

X_n = αρ. ατόμων στο δωμάτιο στην αρχή της περιόδου

Αν αρχή δωμάτιο άδειο $\Rightarrow$ μπαίνουν
1 μ.π. p_1
2 p_2
3 p_3

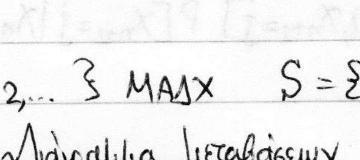
Αν δεν είναι άδειο φεύγει ένα άτομο. $\frac{1}{R_n}$

Έσοδο = 10 €/άτομο, περίοδο

Να βρεθεί αναμενόμενο μέσο έσοδο/περίοδο

$\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ ΜΑΔΧ $S = \{0, 1, 2, 3\}$

π, r Διάγραμμα μεταβάσεων



$$\Leftrightarrow P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{αδιαχώριστη} \\ |S| < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ Θ.Ε.

(το $\bar{R}$ λογικά συμβολίζει αυτό που ζητάμε, δηλ. το αναμενόμενο έσοδο ανά περίοδο.)

$$\vartheta.\varepsilon. \Rightarrow \boxed{\bar{R} = \pi_0 r_0 + \pi_1 r_1 + \pi_2 r_2 + \pi_3 r_3}$$

$(\pi_0, \ldots, \pi_3)$ = μοναδική στάσιμη κατανομή

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot \mathbb{P} \\ \sum \pi_j = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi_0 = \pi_1 \cdot 1 \\ \pi_1 = \pi_0 P_1 + \pi_2 \cdot 1 \\ \pi_2 = \pi_0 P_2 + \pi_3 \cdot 1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{array}$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \cdot 1 \\ \pi_0 P_1 + \pi_2 \cdot 1 \\ \pi_0 P_2 + \pi_3 \cdot 1 \\ \pi_0 \cdot P_3 \end{pmatrix}$$

(η τέταρτη γραμμ. εξίσωση δε χρειάζεται, αφού είναι γραμμ. εξαρτημένη με μία από τις τρεις ήδη υπάρχουσες)

$$\pi_0 = \frac{1}{2 + P_2 + 2P_3}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2 + P_2 + 2P_3}$$

$$\pi_2 = \frac{P_2 + P_3}{2 + P_2 + 2P_3}$$

$$\pi_3 = \frac{P_3}{2 + P_2 + 2P_3}$$

$r_0 = 0$ (όταν έχουμε 0 άτομα, το μέσο κέρδος 0)

$r_1 = 1 \cdot 10 = 10$ (όταν έχουμε 1 άτομο, 10€)

$r_2 = 2 \cdot 10 = 20$ (για 2 άτομα $2 \cdot 10 = 20$ €)

$r_3 = 3 \cdot 10 = 30$ (για 3, 30€)

$$R = \pi_0 r_0 + \pi_1 r_1 + \pi_2 r_2 + \pi_3 r_3$$

12/12/2014

Μάθημα 14

Τυχαίος Περίπατος

$Y_1, Y_2, \ldots$ ατμ ακέραιες

$P(Y = k) = a_k, \; k \in \mathbb{Z}$

$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \; n = 1, 2, \ldots$

$X_0 = 0$

(το X_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων του Y)

$X_0 = 0$

$X_1 = Y_1$

$X_2 = Y_1 + Y_2$

$\vdots$

$X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$

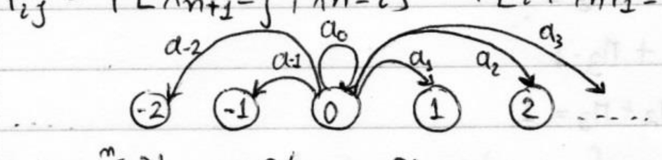
$\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$

Αν $X_n = i$, $X_{n+1} = i + Y_{n+1}$

η κατανομή αυτή δεν εξαρτάται από το παρελθόν! (οι μεταβλητές μας είναι ανεξάρτητες & ισόνομες!)

Έχουμε τη Μαρκοβιανή ιδιότητα!

$$P_{ij} = P[X_{n+1}=j \mid X_n=i] = P[i+Y_{n+1}=j] = P[Y_{n+1}=j-i] = a_{j-i}$$



$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad Y_1+\dots+Y_n$$

Όταν $E(|Y|)=\mu<\infty$ $\quad E(Y^2)<\infty$

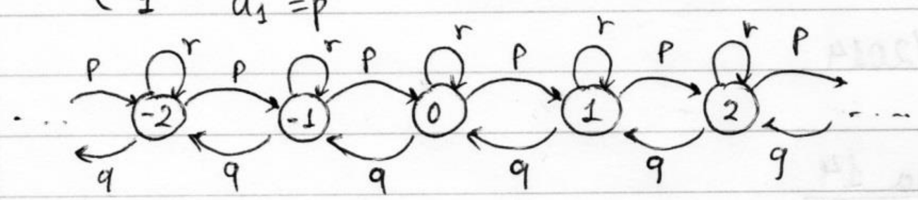
$V(Y)=\sigma^2$

ακολουθεί κανονική κατανομή

$$\frac{X_n}{n} \to \mu \text{ μ.π. } 1 \qquad \frac{Y_1+\dots+Y_n-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \to N(0,1)$$

Ειδική Περίπτωση: $\boxed{a_{-1}+a_0+a_1=1}$ <u>απλός τυχαίος περίπατος</u>

$$Y = \begin{cases} -1 & a_1 = q \\ 0 & a_0 = r \\ 1 & a_1 = p \end{cases}$$



Αν $p=0$, $q>0$, παροδική ($\to -\infty$)

Αν $p>0$, $q=0$, παροδική ($\to +\infty$)

όλες οι καταστάσεις είναι του ίδιου τύπου, θυμίζω :)

Έστω $p,q>0$ (η περίπτωση που μας ενδιαφέρει) $\Rightarrow$ <u>αδιαχώριστη αλυσίδα</u>

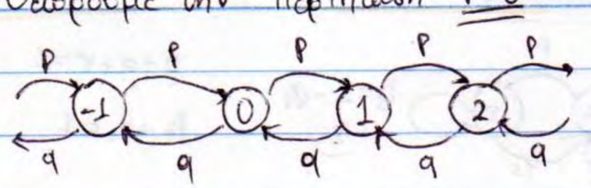
<u>Περιοδικότητα:</u>

Αν $r>0 \Rightarrow$ απεριοδική

Αν $r=0 \Rightarrow$ περιοδική με $d=2$

Επαναληπτική ή Παροδική? Η απάντηση <u>δεν</u> εξαρτάται από το r

Θεωρούμε την περίπτωση $\underline{r=0}$



$(p+q=1\ ;\ p,q>0)$

Θυμόμαστε: i επαναληπτική $\iff \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}=\infty$

Έστω $i=0$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(n)} = \begin{cases} \nearrow \infty \\ \searrow <\infty \end{cases}$

$P_{00}^{(n)}=?$

Παίρνουμε την κατάσταση 0. Αν αυτή είναι παροδική τότε όλες παροδικές, αν είναι μηδ. επαναληπτική, τότε όλες μηδ. επαναληπτικές (αδιαχώριστη αλυσίδα)

$$P_{00}^{(n)} = P[X_n=0 \mid X_0=0] = \begin{cases} 0 & n\neq 2k \\ \binom{2k}{k}p^k q^k & n=2k \end{cases}$$

$P_{00}^{(2k)} = P(k$ επιτυχίες σε $2k$ δοκιμές, με $p=P(\text{επιτ})) = \binom{2k}{k}p^k \cdot q^k,\ k\geq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k}{k}p^k q^k = \sum_k \frac{(2k)!}{k!\,k!}p^k q^k$$

Τύπος Sterling

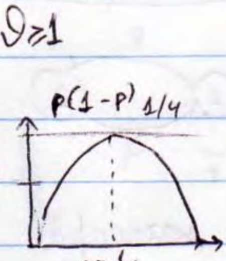
$$k! \approx k^{k+1/2}\cdot e^{-k}\sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi k}\, e^{-k}k^k$$

$$\left(\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{\sqrt{2\pi k}\,e^{-k}k^k}=1\right) \quad P_{00}^{(2k)} \approx \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}}$$

$$\sum_k \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}} = ? \qquad \sum \frac{\vartheta^k}{\sqrt{k}} \begin{cases} \nearrow <\infty & \vartheta<1 \\ \searrow =\infty & \vartheta\geq 1 \end{cases}$$

$\vartheta = 4pq = 4p(1-p) = 4p-4p^2 \leq 1\ \forall p$

$=1$ αν $p=\frac{1}{2}$



$$\boxed{0 \begin{cases} \nearrow \text{παροδική } p\neq q \\ \searrow \text{(μηδενικά) επαναληπτική } p=q \end{cases}}$$

$p(1-p)\leq \frac{1}{4}\ \forall p$

Θεώρημα σελ. 26

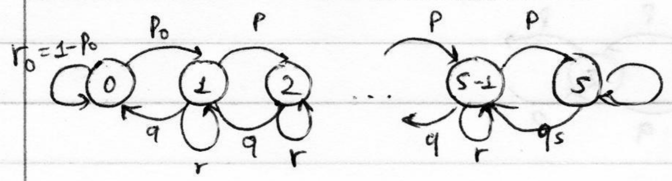
$p=q=1/2$

$$P_{00}^{(2k)} \simeq \frac{(4pq)^2}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \xrightarrow[k]{} 0$$

$\lim P_{00}^{(2k)} = 0 \Rightarrow \underline{Μ.Ε.}$

Είναι ΠΑΝΤΑ μηδενικά επαναληπτική

Πεπερασμένος Τυχαίος Περίπατος



$p+q+r=1$

$p_0+r_0=1$

0, S φράγματα (barriers)

Αν $p_0=0,\ r_0=1 \Rightarrow \{0\}$ απορ. κλάση

Αν $q_s=0,\ r_s=1 \Rightarrow \{S\}$ απορ. κλάση

Αν $r_0=0,\ p_0=1$

η κατάσταση 0

Αν $p_0=0 \Rightarrow 0$: απορροφητικό φράγμα

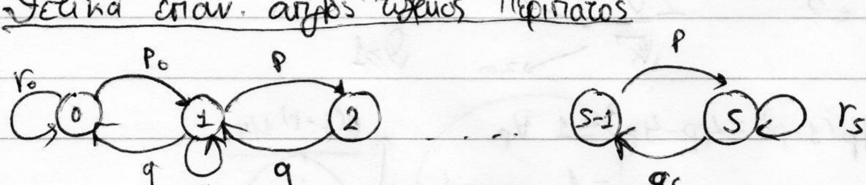
Αν $p_0=1 \Rightarrow 0$: ανακλαστικό φράγμα

Αν $0<p_0<1 \Rightarrow 0$: ελαστικό φράγμα

(αντίστοιχα και για την κατάσταση S)

	p_0	q_s	
πρόσημα	+	+	αδιαχ., Θ.Ε.
	+	0	$\{S\}$ απορ., $\{0,\dots,S-1\}=T$ (όλες εκτός από την S παροδικές)
	0	+	$\{0\}$ απορ, $\{1,\dots,S\}=T$ (όλες εκτός από την 0 παροδικές)
	0	0	$\{0\},\{S\}$ απορ., $\{1,\dots,S-1\}=T$

Θετικά επαν. απλός τυχαίος Περίπατος



Εξ. στάσιμης κατανομής

$0:\ \pi_0=\pi_1 q+\pi_0 r_0 \rightarrow \pi_0(1-r_0)=\pi_1 q \Rightarrow \pi_0 p_0=\pi_1\cdot q \Rightarrow \pi_1=\pi_0\cdot\dfrac{p_0}{q}$

$1:\ \pi_1=\pi_0 p_0+\pi_1 r+\pi_2\cdot q=\pi_1 q+\pi_1 r+\pi_2 q=\pi_1(1-p)+\pi_2 q \Rightarrow \pi_1 p=\pi_2 q$

$\pi_2=\pi_1\dfrac{p}{q}=\pi_0\dfrac{p_0 p}{q^2}$

$\pi_2 p = \pi_3 q, \ldots$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \pi_k = \pi_0 \dfrac{p_0 p^{k-1}}{q^k}, k=1,2,\ldots,s-1 \\ \pi_s = \pi_0 \dfrac{p_0 p^{s-1}}{q_s q^{s-1}} \end{array}}$$

$$\sum_{i=0}^{s} \pi_i = 1 \Rightarrow \pi_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{p_0 p^{k-1}}{q^k} + \frac{p_0 p^{s-1}}{q_s q^{s-1}} \right] = 1 \Rightarrow \pi_0 = \ldots$$

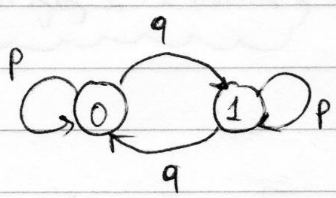
$\mathbb{P} = (P_{ij})$ διπλά στοχαστικός

$$\sum_{j \in S} P_{ij} = 1 \quad \forall i \in S$$

$$\sum_{i \in S} P_{ij} = 1 \quad \forall j \in S$$

π.χ. για $S = \{0, 1\}$ $\quad p+q=1$, $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$

$\pi_0, \pi_1 = ?$



$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = \pi_0 \cdot p + \pi_1 \cdot q \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0 q = \pi_1 q \Rightarrow \boxed{\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}}$$

Ασκήσεις

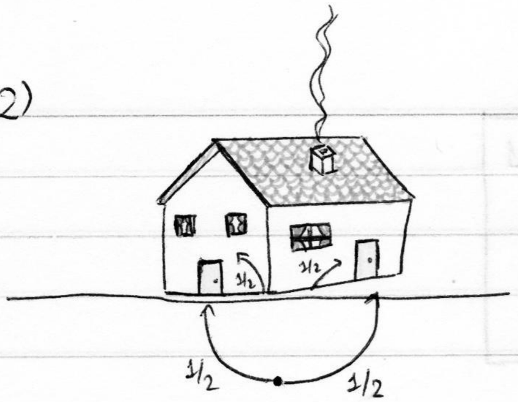
1) Αποδείξτε ότι για $S = \{0, 1, \ldots, k\}$, $\pi_j = \dfrac{1}{k+1} \quad \forall j \in S$

Εξισώσεις Ισορροπίας: $\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij}$

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

Για $\pi_i = \dfrac{1}{k+1} \quad \forall i$ $\qquad \dfrac{1}{k+1} = \sum_{i \in S} \dfrac{1}{k+1} P_{ij} = \dfrac{1}{k+1} \underbrace{\sum P_{ij}}_{=1}$

2)

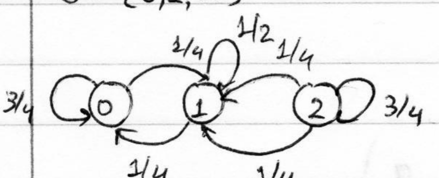


Έχει δύο ζευγ. παπούτσια. Παίρνει ένα ζευγάρι από την πόρτα που φεύγει (αν υπάρχει, διαφορετικά ξυπόλητος)
Στην επιστροφή, αφήνει τα παπούτσια του (αν φοράει) στην πόρτα που μπαίνει
?% ημερών ξυπόλητος

Έστω X_n = αρ. ζευγ. στη δεξιά πόρτα στην αρχή της μέρας n

$\{X_n, n=1,2,\dots\}$ Μαρκοβιανή? (Αν γνωρίζω $X_n=i$, $i\in\{0,1,2\}$ τότε το X_{n-1} εξαρτάται από το i και τη σημερινή μέρα (ανεξάρτητο από το παρελθόν))

$S=\{0,1,2\}$



καταστ. 0 : 0 παπούτσια
καταστ. 1 : 1 ζευγ. παπούτσια
καταστ. 2 : 2 ζευγ. παπούτσια

Αδιαχ. } ⇒ θ.ε.
Πεπερ.

$P_{00}>0 \Rightarrow 0$ απεριοδική

% ημερών όπου: { $\boxed{1/3}$ $X_n=0$ και βγαίνει δεξιά + $\boxed{1/2}$ = $\boxed{1/6}$; ή $X_n=2$ και βγαίνει αριστερά } + $\boxed{=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$

% ημ. όπου $X_n=0$, $\frac{1}{\nu_0}=\Pi_0$ $\boxed{1/3}$ + $\boxed{1/2}$ = $\boxed{1/6}$

% ημ. όπου $X_n=1$ = Π_1

<u>Στάσιμη Κατανομή</u>

λύνουμε το σύστημα! ∃ και 2ος τρόπος, αν παρατηρήσουμε ότι $\mathbb{P}$ διπλά στοχαστικός! Έτσι βρίσκουμε εύκολα τη στάσιμη κατανομή

<u>διπλά στοχαστικός</u> $\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

3) Ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου ζαριού

Έστω X_n = μέγιστη ένδειξη πρώτων n ρίψεων

$\{X_n, n=1,2,\dots\}$ Μαρκοβιανή?

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$T = \{1,2,3,4,5\}$

$C = \{6\}$

$P_{ij}^{(m)}$ $\forall\ i,j,m$

1) Αν $j<i \Rightarrow P_{ij}^{(m)} = 0$ όλες οι m ρίψεις να είναι $\leq i$

2) Αν $j=i \Rightarrow P_{ii}^{(m)}$

$P[X_m = i \mid X_0 = i] = \left(\frac{i}{6}\right)^m$

3) Αν $j>i$ $P_{ij}^{(m)} = ?$

$P_{ij}^{(m)} = P[\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = j]$

όπου $Y_1, Y_2, \dots$ αιτμ $P(Y=i) = \frac{1}{6}$ $i = 1,\dots,6$

$\left[\underline{\text{υποδ}}: P(\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \leq j) = P(Y_1 \leq j, \dots, Y_m \leq j) = \left(\frac{j}{6}\right)^m \right]$

13/12/2014

Μάθημα 15

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

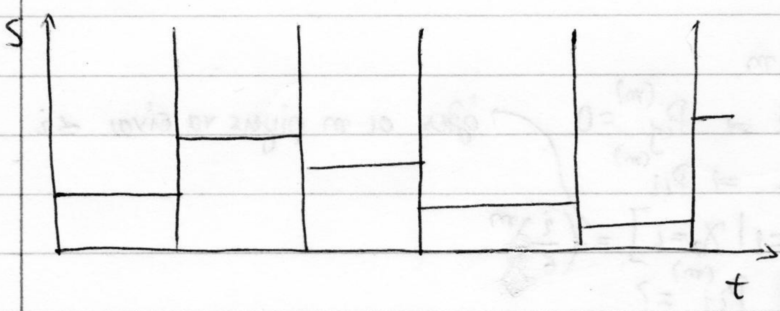
Χώρος καταστάσεων $S \subseteq \mathbb{N}_0$
$X(t)$ = κατάσταση τη στιγμή t
$\{X(t), t \geq 0\}$

Υποθέσεις

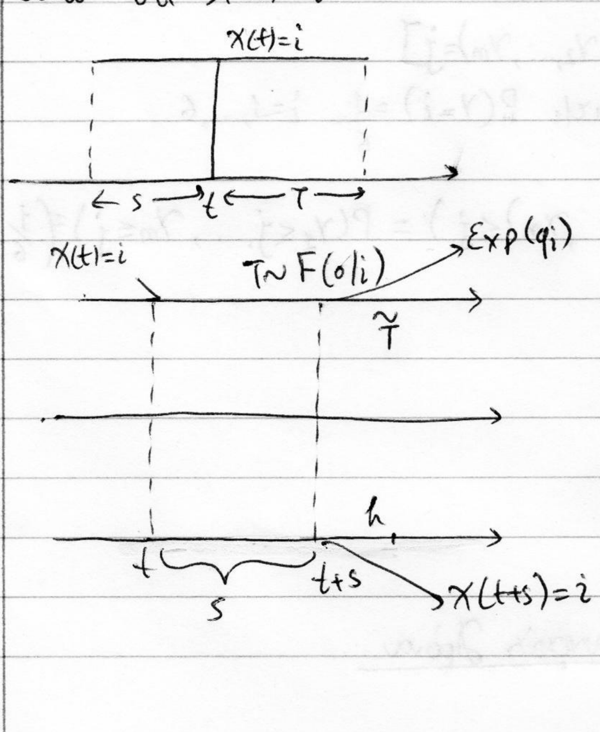
1) Μαρκοβιανή Ιδιότητα
Δοθέντος ότι $X(t)=i$ οι τ.μ. $X(t+s), X(t-h)$ ανεξάρτητες για κάθε $h,s>0$

2) Σε οποιοδήποτε διάστημα πεπερασμένου μήκους, γίνεται πεπερασμένος αριθμός μεταβάσεων με πιθανότητα 1

Υλοποίηση



Έστω ότι $X(t)=i$



$T > S$

έλλειψη μνήμης

$[T>h] = P[T>s+h \mid T>s] = P[\tilde{T}>h \mid X(t+s)=i]$

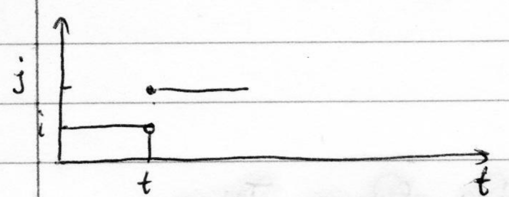
$T \neq U(0,10)$

Μαρκοβιανή Ιδιότητα $\Rightarrow$ T = χρόνος παραμονής στην κατάσταση $i \sim E...$

Έστω T_i ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση i.

Τότε $T_i \sim Exp(q_i)$

② Έστω $X(t)=i$ και τη χρονική στιγμή t γίνεται μετάβαση



$X(t^-)=i$

$X(t^+)=j$

$P[X(t^+)=j \mid X(t^-)=i] = P_{ij}$, $j \neq i$

$\Sigma P_{ij}=1$, $j \in S$, $j \neq i$

<u>1η Περιγραφή</u>

T_i = χρόνος παραμονής στην $i \in S \sim Exp(q_i)$

Όταν γίνει μετάβασης $P[X(t^+)=j \mid X(t^-)=i] = P_{ij}$

Δεδομένα: $\boxed{\begin{matrix} q_i, i \in S \\ P_{ij}, i,j \in S, i \neq j \end{matrix}}$

$E(T_i) = \frac{1}{q_i}$, $f_i(t) = q_i \cdot e^{-q_i t}$, $t>0$.

<u>Υπόθεση:</u> $q_i < \infty$ $\forall$ $i \in S$

<u>Παρένθεση (Εκθετική Κατανομή)</u>

① Έστω $T \sim Exp(\lambda)$, $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $P(T>t) = e^{-\lambda t}$

Έστω $T_1 \sim Exp(\lambda)$, $T_2 \sim Exp(\mu)$ ανεξάρτητες.

$T = \min(T_1, T_2) \Rightarrow T \sim Exp(\lambda+\mu)$

$P(T \le t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(\min(T_1, T_2) > t) = 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) =$

$= 1 - P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot e^{-\mu t} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} = P(T \le t)$

$\Rightarrow T \sim Exp(\lambda+\mu)$

2 $P(T = T_1) = P(T_1 < T_2) = \int_{u=0}^{+\infty} P[T_1 < T_2 | T_2 = u] \cdot \mu \cdot e^{-\mu u} \partial u =$

$= \int_0^{+\infty} P(T_1 < u) \cdot \mu \cdot e^{-\mu u} \partial u = \int_0^{+\infty} (1 - \lambda e^{-\lambda u}) \cdot \mu \cdot e^{-\mu u} \partial u = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

και αντίστοιχα $P(T = T_2) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

<u>2η Περιγραφή:</u>

<u>Παράδειγμα:</u> $S = \{0, 1, 2\}$

$\{X(t), t \ge 0\}$, $X(t) \in S$

<u>Το σύστημα εξελίσσεται ως εξής:</u>

Έστω $X(t) = 0$ (στιγμή εισόδου 0)

Alarm 1: Διάρκεια $T_{01} \sim Exp(q_{01})$
Alarm 2: Διάρκεια $T_{02} \sim Exp(q_{02})$ } ανεξάρτητα μεταξύ τους

Όταν χτυπήσει το πρώτο από τα δύο alarm, το σύστημα πάει στην αντίστοιχη κατάσταση

Αν π.χ. η νέα κατάσταση είναι $X(S) = 1$,

Alarm 1 διάρκεια $T_{10} \sim Exp(q_{10})$
Alarm 2 διάρκεια $T_{12} \sim Exp(q_{12})$ κ.ο.κ.

2η περιγραφή $\Leftrightarrow$ 1η περιγραφή όπου $q_i = \dots$
$P_{ij} = \dots$

2η περιγραφή

Αν $X(t) = i$

Ένα alarm για κάθε $j \neq i$, διάρκεια $T_{ij} \sim Exp(q_{ij})$

Μένω στην i μέχρι να χτυπήσει το πρώτο alarm, έστω ότι είναι το $j_0 \Rightarrow$ μετάβαση στην j_0

Δεδομένα $\{q_{ij}\}, i, j \in S, i \neq j$

Έστω $X(t) = i$, T_i = χρόνος παραμονής στην i.

$$T_i = \min_{j \neq i} (T_{ij}) \Rightarrow T_i \sim Exp(q_i) \text{ όπου } q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

σε στιγμή μετάβασης $P(i \to j) = P(T_i = T_{ij}) = \dfrac{q_{ij}}{q_i}$

Περ. 1

$T_i \sim Exp(q_i)$
$P(i \to j) = P_{ij} \ \forall i \neq j$

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

Περ. 2

$T_{ij} \sim Exp(q_{ij})$
$\forall i, j, i \neq j$

$q_{ij} = q_i \cdot P_{ij} \ \forall i \neq j$

17/12/2014

Μάθημα 16

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

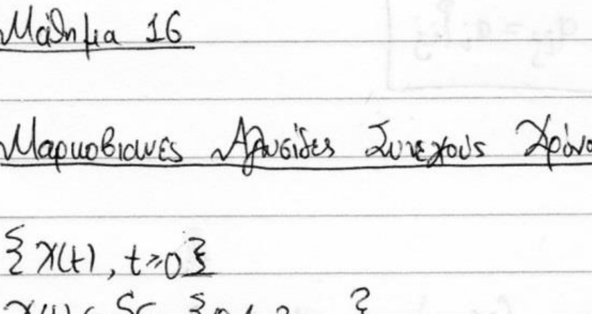
$\{X(t), t \geq 0\}$

$X(t) \in S \subseteq \{0,1,2,\dots\}$

Μαρκοβιανή Ιδιότητα

Δεδομ. $X(t)=i$, οι $X(t-s)$, $X(t-h)$ ανεξάρτητες $\forall\ s,h \geq 0$

Υλοποίηση



T_i = χρόνος παραμονής κατάσταση i

$T_i \sim Exp(q_i)$

Όταν για μετάβαση $i \to j$ με πιθ. P_{ij}

$\sum_{j \neq i} P_{ij} = 1$

Περιγραφή 1

$\boxed{\text{Δεδομένα } q_i, i \in S \quad P_{ij}, i,j \in S, i \neq j}$

Περιγραφή 2

Αν $X(t)=i$

alarms $T_{ij} \sim Exp(q_{ij})\ \forall j \neq i$

$P_{i \neq j} = \frac{q_{ij}}{\sum_{k \neq i} q_{ik}} = \frac{q_{ij}}{q_i}$

$Exp(\sum_{j \neq i} q_{ij}) =$ $T_i = \min_{j \neq i}(T_{ij})$, $i \to j$ αν $T_{ij} = \min_{k \neq i}(T_{ik})$

Δεδομένα $\boxed{q_{ij}, i,j \in S, i \neq j}$

Μετασχηματισμός

$$\boxed{q_i = \sum_{j \neq i} q_{ik} \qquad P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}}$$

$$\boxed{q_{ij} = q_i P_{ij}}$$

Πίνακας ρυθμών μετάβασης (γεννήτορας πίνακας)

Ο πίνακας αυτός δεν είναι απαραίτητα συμμετρικός!

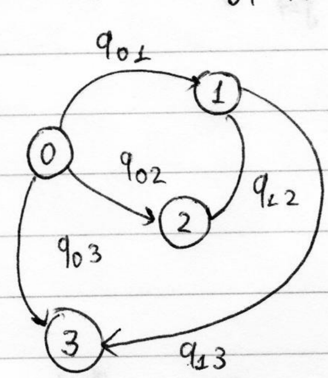
Q

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & \boxed{q_{01} \quad q_{02} \quad \dots} & \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \dots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & q_{23} & \dots \\ \dots & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \Sigma = q_0$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \text{αθροίσματα γραμμών} = 0 \\ \text{μη διαγώνια στοιχεία} \geq 0 \end{array}}\right\} \text{Στοχαστικός Πίνακας ρυθμών}$$

δηλ. τα διαγώνια στοιχεία είναι αρνητικά, ενώ τα υπόλοιπα όχι.

Από $Q \Leftrightarrow$ διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

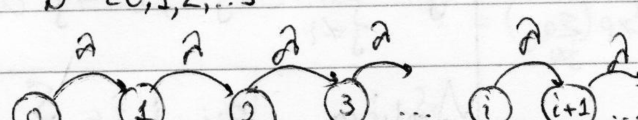


$q_{23} = 0$

Παραδείγματα:

1)
$$Q = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \emptyset \\ & -\lambda & \lambda & \\ \emptyset & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

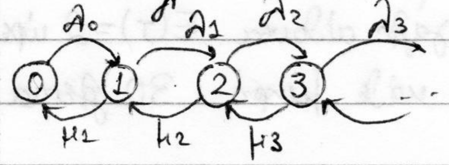
$S = \{0, 1, 2, \dots\}$



$q_i = \lambda \ \forall i \rightarrow T_i \sim Exp(\lambda)$ | Poisson process (λ)

$P_{i,i+1} = 1 \ \forall i$

$E(T_i) = \frac{1}{\lambda}$



<u>Διαδικασία γεννήσεων - θανάτων</u>

(birth and death process)

$q_{i,i+1} = \lambda_i$, $i = 0,1,2,\dots$ (ρυθμοί γεννήσεων)

$q_{i,i-1} = \mu_i$, $i = 1,2,\dots$ (ρυθμοί θανάτων)

<u>Ειδικές Περιπτώσεις</u>

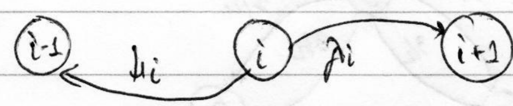
α) $\lambda_i = \lambda \ \forall i$, $\mu_i = \mu \ \forall i$ (απλή)

β) Διαδικασία γεννήσεων θανάτων, όπου <u>καθε άτομο</u> στον πληθυσμό

δημιουργεί νέο $\sim T \sim Exp(\lambda)$

αποχωρεί $\sim T \sim Exp(\mu)$

$X(t) = i$ (i άτομα)



$X(t) = i$

1

2

⋮

i

$q_i = i\lambda + i\mu$

$P_{i,i+1} = \frac{i\lambda}{i\lambda + i\mu}$

$q_{i,i+1} = q_i \cdot P_{i,i+1} = (i\lambda + i\mu)\frac{i\lambda}{i\lambda + i\mu} = i\lambda$

Παράδειγμα 2)

Βιβλιοθήκη $\begin{cases} \text{1 μεγάλη αίθουσα} \\ \text{2 μικρές αίθουσες} \end{cases}$

Χρόνος Παραμονής: εκθετικός $\begin{cases} \text{μεγάλη αίθουσα } E(T)=2 \text{ ώρες} \\ \text{σε κάθε μικρή 30 λεπτά} \end{cases}$

Μεταβάσεις:

Από μεγάλη σε κάθε μικρή με $\frac{1}{2}$

Από μικρή → στη μεγάλη με $\frac{3}{4}$

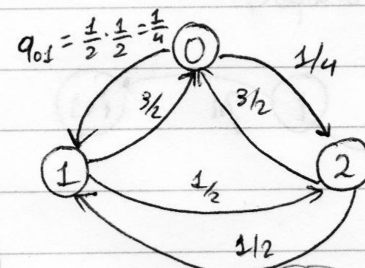
Από μικρή → στην άλλη μικρή με $\frac{1}{4}$

Να βρεθεί ο πίνακας Q και το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης.

Περιγραφή 1

$T_i \sim Exp(q_i) \Rightarrow E(T_i)=\frac{1}{q_i}$ | $X(t)$ = αίθουσα τη στιγμή t $\{\overset{\text{μεγάλη}}{0}, 1, 2\}$

$P(i \to j) = P_{ij}$



$E(T_0)=2 \Rightarrow \boxed{q_0 = \frac{1}{2}}$

$E(T_1)=E(T_2)=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{q_1=q_2=2}$

$P_{01}=P_{02}=\frac{1}{2}$ | $q_{ij}=q_iP_{ij}$

$P_{12}=P_{21}=\frac{1}{4}$

$P_{10}=P_{20}=\frac{3}{4}$

μείον το άθροισμα των υπολοίπων

$$Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

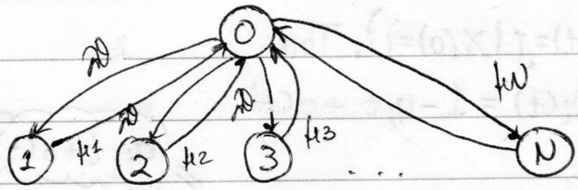
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ άρα $-\frac{1}{2}$;-) !

Παράδειγμα 3)

Ταξί κινείται στην πόλη.
Όταν είναι άδειο ο χρόνος μέχρι να το σταματήσει πελάτης ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ($\sim Exp(\lambda)$)
Ο πελάτης είναι τύπος i με πιθανότητα θ_i, $i=1,2,\dots,N$
(οι κατηγορίες των πελατών διακρίνονται με βάση το χρόνο που ο καθένας τους χρειάζεται να χρησιμοποιήσει το ταξί για να φτάσει στον προορισμό του)
Διάρκεια διαδρομής πελάτη τύπου-i $\sim Exp(\mu_i)$
$Q = ?$

$S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$

0 → άδειο
1 → πελάτης τύπου 1
...
N → πελάτης τύπου N



$q_{i0} = \mu_i \quad i = 1, 2, \dots, N$
$q_{0i} = ?$
$T_0 \sim Exp(\lambda) \Rightarrow q_0 = \lambda$

$P_{01} = \theta_1, \dots, P_{0N} = \theta_N$
$q_{01} = q_0 \cdot P_{01} = \lambda\theta_1, \; P_{02} = \lambda\theta_2 \dots$

$$Q = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & & \dots & N & \\ \end{array}$$

$$Q = \left(\begin{array}{ccccc} -\lambda & \lambda\theta_1 & \lambda\theta_2 & \dots & \lambda\theta_N \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \mu_N & 0 & \dots & 0 & -\mu_N \end{array}\right) \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{array}$$

19/12/2014

Μάθημα 17

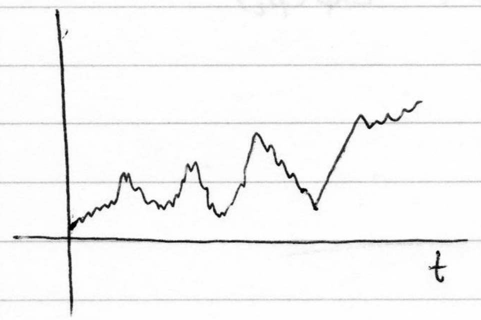
Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου

$$Q=\begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \\ q_{i0} & q_{i1} & -q_i & \cdots \end{pmatrix}$$

<u>Ορισμός:</u> Μία ΜΑΣΧ ονομάζεται <u>κανονική</u> αν $\sum_{j\in S} P(X(t)=j\mid X(0)=i)=1$ $\forall i\in S,\ \forall t<\infty$

$\Downarrow$

Με πιθ. 1 γίνεται πεπερασμένος αριθμός μεταβάσεων σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα



πιθανότητα μετάβασης

<u>Λήμμα 1</u>: Έστω $P_{ij}(t)=P(X(t)=j\mid X(0)=i)$. Τότε:

a) $\lim_{t\to 0}\frac{1-P_{ii}(t)}{t}=q_i \iff P_{ii}(t)=1-q_it+o(t)$

β) $\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}=q_{ij},\ i\neq j \iff P_{ij}(t)=q_{ij}t+\varepsilon_{ij}(t)$ τ.ω. $\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_{ij}(t)}{t}=0$ $\quad = q_{ij}t+o(t)$

Γενικά

$f(t)=o(g(t)),\ t\to a \iff \lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=0$

$\boxed{\varepsilon_{ij}(t)=o(t)}$

$\Downarrow$

συμβολισμός

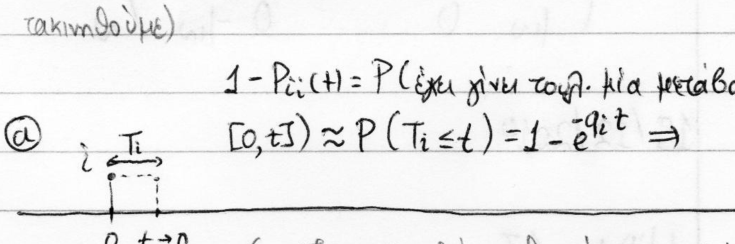
$\lim_{t\to 0}P_{ij}(t)=0$ $\quad i\neq j$ (η πιθ. μετά από ένα απειροστό του χρόνου από το i να πάμε στο j τείνει στο 0: το πιθανότερο είναι ότι δεν θα έχουμε προλάβει να μετακινηθούμε)

$\lim_{t\to 0}P_{ii}(t)=1$

$\downarrow$

η πιθ. μετά από ένα απειροστό του χρόνου από το i να μένουμε στο i τείνει στο 1

(a)



$1-P_{ii}(t)=P($έχει γίνει τουλ. μία μετάβαση στο $[0,t])\approx P(T_i\le t)=1-e^{-q_it}\Rightarrow$

(το T_i ακολουθεί εκθετική κατανομή!)

l'hospital

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1-P_{ii}(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-e^{-q_i t}}{t} = q_i$$

(β) 0 — t $\quad \frac{P_{ij}(t)}{t} \approx q_i P_{ij} = q_{ij}$

$$\sum_{j\neq i} P_{ij}(t) = 1 - P_{ii}(t) \qquad P_{ij}(t) \approx q_{ij}\, t$$

Συνάρτηση Πιθανότητας Μεταβάσεων

$$P_{ij}(t) = P(X(t)=j \mid X(0)=i) \qquad P'_{ii}(0^+) = -q_i$$

$\lim_{t\to 0} P_{ii}(t) = 1 = P_{ii}(0)$

$\lim_{t\to 0} P_{ij}(t) = 0 = P_{ij}(0) \quad i\neq j$

Λήμμα

$P_{ii}(t) = 1 - q_i t + o(t)$

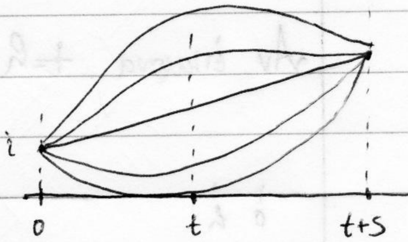
$(t\to 0)$

$P_{ij}(t) = q_{ij} t + o(t)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = P'_{ij}(0^+)$$

Λήμμα 2 (Chapman-Kolmogorov Equations)

$$P_{ij}(t+s) = P(X(t+s)=j \mid X(0)=i) =$$
$$= \sum_{k\in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$



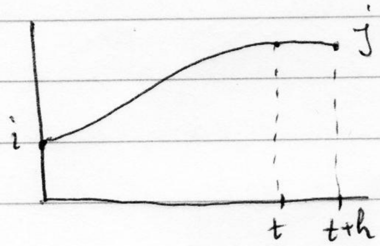
$$\Rightarrow \boxed{P_{ij}(t+s) = \sum_{k\in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s)} \quad \forall\, i,j\in S,\ \forall\, t,s \geq 0$$

Διακριτή περίπτωση

$$P_{ij}^{(n+k)} = \sum_{l} P_{il}^{(n)} P_{lj}^{(k)}$$

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n$$

Έστω $s = h \to 0$



$$P_{ij}(t+h) = \sum_k P_{ik}(t)\cdot P_{kj}(h) = P_{ij}(t)\cdot P_{jj}(h) + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)P_{ij}(h)$$

$$\Rightarrow P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = P_{ij}(t)\cdot\left(P_{jj}^{(h)}-1\right) + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)P_{kj}(h)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h} = P_{ij}(t)\lim_{h\to 0}\frac{P_{jj}^{(h)}-1}{h} + \sum_{i\neq j} P_{ik}(t)\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{h}$$

$$\Rightarrow \boxed{P'_{ij}(t) = -P_{ij}(t)\,q_j + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)\,q_{kj}} \quad \forall\, i,j\in S$$

$$P'_{ij}(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t)$$

$$\Updownarrow$$

προδρομικές

$$\boxed{\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\cdot Q}$$

όπου $\mathbb{P}(t) = (P_{ij}(t))_{i,j\in S}$

η διάσταση του πίνακα είναι ο χώρος καταστάσεων S, άρα ο πίνακας ενδέχεται να είναι και άπειρος.

Αρχικές Συνθήκες

$\mathbb{P}(0) = I$

$$\begin{pmatrix} P_{ii}(0)=1 \\ P_{ij}(0)=0 \quad \forall i\neq j \end{pmatrix}$$

Ch-Kolm $s=k$ $(t, t+h)$ $\uparrow$

Αν έπαιρνα $t=h$ (h,s)

$0 \quad h \quad h+t$

$$P'_{ij}(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{ik} P_{kj}(t)$$

$$\boxed{\mathbb{P}'(t) = Q\cdot \mathbb{P}(t)}$$

αναδρομικές

22/12/2014

Μάθημα 18

$P_{ij}(t) = P(X(t)=j \mid X(0)=i]$ συνάρτηση πιθ. μετάβασης

<u>Προδρομικές εξισώσεις</u>

$$\boxed{P'_{ij}(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t),\ i\in S}$$

Αρχικές συνθήκες $P_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & ,i\neq j \\ 1 & ,i=j \end{cases}$

$[0,t-h]\ [t-h,t] \qquad [0,h],[h,t]$

$$\boxed{P'_{ij}(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t),\ i\in S}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Διαδικασία Poisson (λ)

$$0 \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 2 \rightarrow \cdots$$

Το λ είναι ο μέσος αριθμός συμβάντων ανά μονάδα χρόνου!

$q_{i,i+1} = \lambda \qquad i=0,1,2,\ldots$
$q_{ik} = 0 \qquad i\neq k$
$q_i = -\sum_{j\neq i} q_{ij} = -\lambda$

(Poisson) $P'_{ij}(t) = -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{i+1,j}(t)$

$$\boxed{P_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & ,j\geq i \\ 0 & ,j<i \end{cases}}$$

Διαδικασία Poisson (λ).

$\{N(t), t\geq 0\}$, $N(t)$ = αριθμός συμβάντων στο διάστημα $[0,t]$

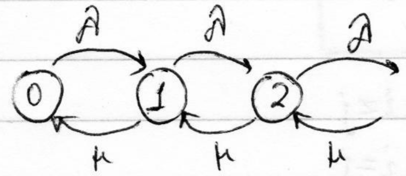
1) $\forall t$, $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

ατμ

2) Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών συμβάντων $\sim Exp(\lambda)$

3) $\forall\ t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ 

$N(t_4) - N(t_3)$ και $N(t_2) - N(t_1)$



$P_{ij}(t) = \dots$ (πολύπλοκο $^o\!\!\chi$:-O) ← ö

$P_{ij}(t) = P[X(t)=j \mid X(0)=i]$

Αν δίνεται (εκτός του Q) και η αρχική κατανομή,

$P_i(0) = P(X(0)=i),\ i \in S$

δηλ. $\underline{P}(0) = (P_0(0), P_1(0), \dots)$

Έστω $\underline{P}(t) = (P_0(t), P_1(t), \dots)$ όπου $P_j(t) = P(X(t)=j),\ j \in S$

κάνοντας δέσμευση ως προς $X(0)=i,\ i \in S$

$P_j(t) = \sum_{i \in S} P(X(0)=i) \cdot P(X(t)=j \mid X(0)=i) =$

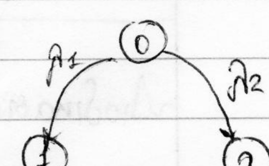
$= \sum_{i \in S} P_i(0) \cdot P_{ij}(t) \Rightarrow \underline{P}(t) = \underline{P}(0) \cdot \mathbb{P}(t)$

$\mathbb{P}'(t) = \dots$

$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$

$S_{ij} = \min\{t : X(t)=j \mid X(0)=i\}$ χρόνος πρώτης επίσκεψης στη $j / X(0)=i$

$F_{ij}(t) = P(S_{ij} \le t)$, $f_{ij} = F_{ij}(\infty) = P(S_{ij} < \infty)$ (≤ 1)



<u>Για $i=j$</u>

$S_{jj} = \min\{t : X(t)=j,\ \exists\ s<t : X(s) \ne j \mid X(0)=j\}$

χρόνος πρώτης επανόδου στη $j \mid X(0)=j$

$F_{jj}(t) = P(S_{ii} \le t)$, $f_{jj} = F_{jj}(\infty) = P(S_{jj} < \infty)$

Αν $\boxed{\begin{array}{l} f_{jj}=1 \Rightarrow j \text{ επαναληπτική} \\ f_{jj}<1 \Rightarrow j \text{ παροδική} \end{array}}$

Έστω $\sigma_j = E(S_{jj})$

Αν j παροδική $\Rightarrow \sigma_j = \infty$

Αν j επαναληπτική $\nearrow$ $\sigma_j < \infty$ Θετ. επαναληπτική

Αν j επαναληπτική $\searrow$ $\sigma_j = \infty$ μηδ. επαναληπτική

$T_0 \sim Exp(\lambda)$

$T_1 \sim Exp(\mu)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

<u>Θεώρημα</u>:

Αν j παροδική ή μηδ. επαναληπτική

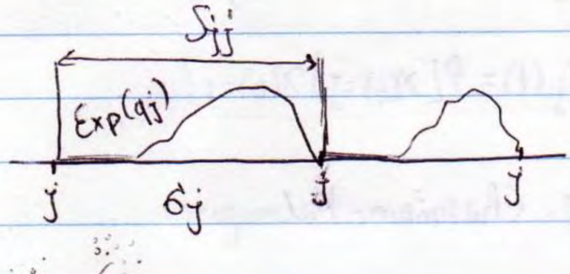
$$\lim_{t\to\infty} P_{jj}(t) = 0$$

Αν j Θετ. επαναληπτική

$$\lim_{t\to\infty} P_{jj}(t) = \frac{1/q_j}{\sigma_j} = \boxed{\frac{1}{q_j \sigma_j} = \lim_{t\to\infty} P_{jj}(t)}$$

[δεν διακριτή περίπτωση $\lim P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{V_j}$]

= % χρόνου στη j (εκτός από οριακή πιθανότητα)



07/01/2015 Καλή χρονιά ☺

<u>Μάθημα 19</u>

<u>Μαρκοβιανή αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου</u>

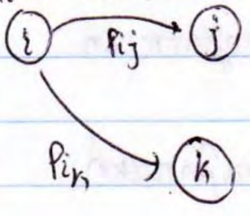
$\{X(t), t \geq 0\}$ $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$

1) Έστω T_j ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση j

$T_j \sim Exp(q_j)$

Όταν γίνει η μετάβαση, $i \to j$ με πιθ. P_{ij}
$i \neq j$

$T_i \sim Exp(q_i)$



Στο συνεχή χρόνο, αντίθετα με το διακριτό, όταν λέμε μετάβαση από μία κατάσταση σε άλλη ΔΕΝ συμπεριλαμβάνουμε την επιστροφή στην κατάσταση που βρισκόμασταν

2) Αν $X(t)=i$

$\forall j \neq i \quad T_{ij} \sim Exp(q_{ij})$

T_{ij} ανεξ. $\forall j \neq i$

$$\boxed{T_i = \min_{j \neq i} T_{ij}}$$

Αν $\min_{j \neq i} T_{ij} = T_{ik} \Rightarrow$ νέα κατάσταση $= k$

- $\boxed{q_{ij} = q_i P_{ij}}$
- $\boxed{q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}}$
- $\boxed{P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}}$

$P_{ij}(t) = P[X(t)=j \mid X(0)=i]$

Εξ. Chapman-Kolmogorov

$$\boxed{P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s) \quad \forall \ t,s \geq 0}$$

Προδρομικές Εξισώσεις: $P'_{ij}(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t), i \in S$

$\Updownarrow$

Αναδρομικές Εξισώσεις: $P'_{ij}(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t), i \in S$

Ισοδύναμα συστήματα εξισώσεων!

Οριακές συνθήκες: $P_{ij}(0) = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$

<u>Μεταβατική Κατανομή</u>

Αν $p_i(0) = P(X(0)=i),\ i \in S$

$\underline{p}(0) = (p_0(0), p_1(0), \ldots)$ αρχική κατανομή

$p_j(t) = P(X(t)=j)$

$p_j(t) = \sum_{i \in S} p_i(0) P_{ij}(t)$

$p_j'(t) = -q_j p_j(t) + \sum_{k \neq j} p_k(t) q_{kj} \quad \forall j \in S$

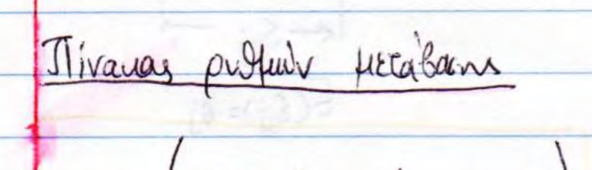
$p_j(0) =$ αρχική συνθήκη

<u>Πίνακας ρυθμών μετάβασης</u>

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$P'(t) = P(t) \cdot Q = Q \cdot P(t)$

<u>Ασυμπτωτική συμπεριφορά $(t \to \infty)$</u>



$\underbrace{\longleftarrow S_{ij} \longrightarrow \longleftarrow S_{jj}^{(1)} \longrightarrow \longleftarrow S_{jj}^{(2)} \longrightarrow \longleftarrow S_{jj}^{(3)} \longrightarrow}$

ανεξάρτητες & ισόνομες (Μαρκοβιανή ιδιότητα)

σημαίνει ότι έχουν την ίδια κατανομή, Γκούφυ

S_{jj} = χρόνος επανόδου στη j

S_{ij} = χρόνος πρώτης μετάβασης $i \to j$

$S_{jj}^{(1)}, S_{jj}^{(2)} \ldots$ α.ι.τ.μ

$F_{ij}(t) = P(S_{ij} \leq t)$

$F_{jj}(t) = P(S_{jj} \leq t)$

$f_{jj} = \lim_{t \to \infty} F_{jj}(t) = F_{jj}(\infty)$

$$f_{jj} = \lim_{t\to\infty} F_{jj}(t) = F_{jj}(\infty) \begin{cases} =1, \; j = \text{επαναληπτική} \begin{cases} \sigma<\infty \;\; \text{θετικά επαναληπτική} \\ \sigma=\infty \;\; \text{μηδενικά επαναληπτική} \end{cases} \\ <1, \; j = \text{παροδική} \end{cases}$$

$\sigma_j = E(S_{jj})$ ⊛ Περιοδικότητα ΔΕΝ υπάρχει στο συνεχή χρόνο

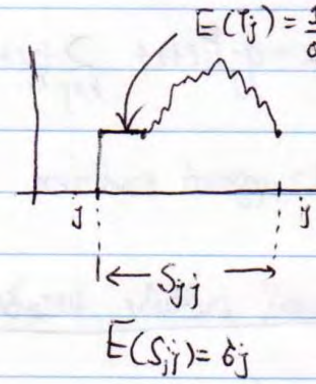
Θεώρημα:

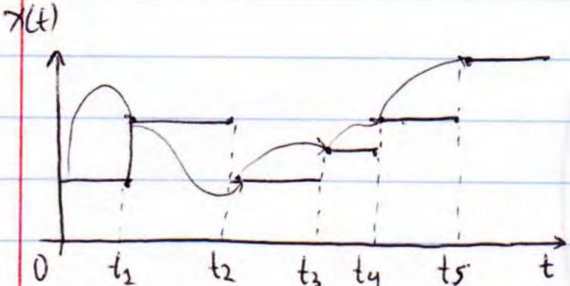
Αν j είναι παροδική ή μηδενικά επαναληπτική

$$\lim_{t\to\infty} P_{jj}(t) = 0$$

Αν j είναι θετικά επαναληπτική

$$\lim_{t\to\infty} P_{jj}(t) = \frac{1}{q\sigma} > 0 \quad \left(= \frac{1/q}{\sigma} \right)$$





$0 < t_1 < t_2 < t_3 \ldots$, διαδοχικές στιγμές μεταβάσεων

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Έστω } X_n = X(t_n^+) \quad \{X_n, n=1,2,\ldots\} \text{ ΜΑΔΧ} \\ P_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \dfrac{q_{ij}}{q_i} \end{array}}$$

Εμφυτευμένη διαδικασία διακριτού χρόνου

- Μια κατάσταση j είναι παροδική (επαναληπτική) στη $\{X(t), t\geq 0\}$ αν και μόνο αν είναι παροδική (επαναληπτική) στη $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$.

- Η j είναι <u>προσιτή</u> από την i ($i\to j$) αν $\exists\, t>0$: $P_{ij}(t)>0$.
Αν $i\to j \Rightarrow f_{ij}>0$, $f_{ij} = \lim_{t\to\infty} P(S_{ij}\leq t) = \lim_{t\to\infty} F_{ij}(t)$

i επικοινωνεί j, $i \longleftrightarrow j$: $i \to j$
$j \to i$

09/01/2015

Μάθημα 20

Αδιαχώριστες ΜΑΣΧ

• Αν παροδική ή μηδενικά επαναληπτική $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} P_j(t) = 0 \quad \forall j \in S$

• Αν θετικά επαναληπτική $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} P_j(t) = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = P_j = \frac{1}{q_j 6_j} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^T 1(X(t)=j)\,dt}{T}$

$P_j(t) = \sum_{i\in S} P_i(0) P_{ij}(t)$ (% χρόνου όπου $X(t)=j$, στο $[0,T]$)

Αναδρομικές εξισώσεις: $P_{ij}'(t) = -q_i P_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t)$ (*)

Προδρομικές εξισώσεις: $P_{ij}'(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} P_{ik}(t) q_{kj}$ (*)(*)

Αν $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = P_j \quad \forall j, i$

$\lim_{t\to\infty} P_{ij}'(t) = 0$

$$(*) \overset{\lim}{\Rightarrow} 0 = -q_i P_j + \sum_{k\neq i} q_{ik} P_j = P_j \underbrace{(-q_i + \sum_{k\neq i} q_{ik})}_{0}$$

που βγαίνει $0=0$, άρα μία ταυτότητα, οπότε η σχέση αυτή μου είναι άχρηστη (έχει τετριμμένη λύση)

$$(*)(*) \overset{\lim}{\Rightarrow} 0 = -q_j P_j + \sum_{k\neq j} P_k q_{kj} \quad \forall j \Leftrightarrow \boxed{P_j q_j = \sum_{k\neq j} P_k q_{kj},\ j\in S}$$

$$\boxed{\sum_{j\in S} P_j = 1}$$

εξισώσεις ισορροπίας

Εξίσωση κανονικοποίησης

μοναδική λύση (**)

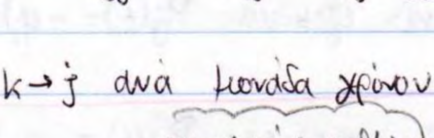
Θεώρημα: Αδιαχώριστη ΜΑΣΧ θετικά επαναληπτική εάν το σύστημα εξισώσεων (**) έχει μοναδική θετική λύση $\{P_j > 0, j \in S\}$

Η $\underline{P}$ είναι στάσιμη αν $\underline{P}(0) = \underline{P} \Rightarrow \underline{P}(t) = \underline{P} \ \forall t$

Εξισώσεις Ισορροπίας

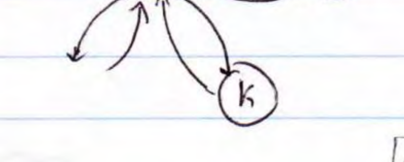
$$\boxed{\begin{aligned} & P_j q_j = \sum_{k \neq j} P_k q_{kj} \quad , j \in S \\ & \sum_{j \in S} P_j = 1 \end{aligned}}$$

$P_j = \dfrac{1}{q_j \sigma_j} \rightarrow P_j q_j = \dfrac{1}{\sigma_j}$



αυτή $E(S_{jj}) = \sigma_j$

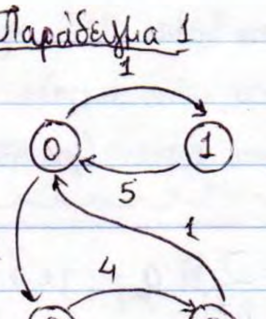
$P_k q_{kj}$ = ρυθμός μεταβάσεων $k \rightarrow j$ ανά μονάδα χρόνου.



$q_j = \sum_{l \neq j} q_{jl}$ ο συνολικός ρυθμός εξόδου (αθροίζω τους ρυθμούς εξόδου στις διάφορες καταστάσεις)

συνολικός ρυθμός εξόδου = συνολικός ρυθμός εισόδου

Παράδειγμα 1



αδιαχώριστη, πεπερασμένη $\Big\} \rightarrow$ Θ.Ε.

Οριακή Κατανομή $(P_0, P_1, P_2, P_3) = \underline{P}$

$0: P_0 (q_{01} + q_{02}) = P_1 q_{10} + P_2 q_{20} + P_3 q_{30} \Rightarrow P_0 \cdot 3 = P_1 \cdot 5 + P_2 \cdot 0 +$
$+ P_3 \cdot 1$
$1: P_1 \cdot 5 = P_0 \cdot 1$
$2: P_2 \cdot 4 = P_0 \cdot 2 + P_3 \cdot 2$
$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$

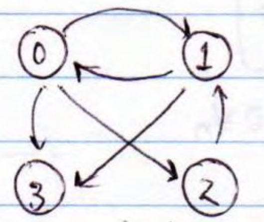
$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \dots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \dots \\ & & & \end{pmatrix}$$

Εξ. ισορροπίας (j) $\sum_{k\neq j} P_k\, q_{kj} - P_j\, q_j = 0 =$

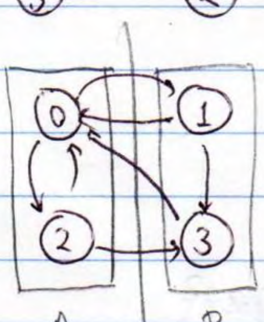
$$= P_0 q_{0j} + P_1 q_{1j} + \dots - q_j P_j + q_{j+1} P_{j+1} + \dots = 0 \Rightarrow \underline{P} \overset{j \text{ στήλη}}{\begin{bmatrix} \; \\ \; \end{bmatrix}} = 0 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \underline{P} \cdot Q = 0 \\ \sum_{j\in S} P_j = 1 \end{matrix}}$$

(Στο διακριτό χρόνο, $\underline{\Pi} = \underline{\Pi} \cdot \mathbb{P}$
$\sum_{j\in S} \pi_j = 1$)



Σχ.0

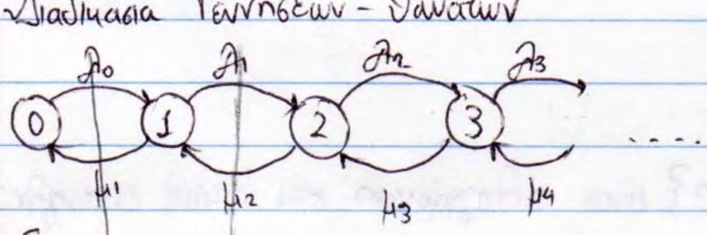


μέσος ρυθμός μετάβασης $A \to B$ =
μέσος ρυθμός μετάβασης $B \to A$

$\subset S$ $\quad P_0 q_{01} + P_2 q_{23} = P_1 q_{10} + P_3 q_{30}$

Παράδειγμα 2

Διαδικασία Γεννήσεων - Θανάτων



$S = \mathbb{N}_0$ αδιαχώριστη

0-1 $P_0\lambda_0 = P_1\mu_1$

1-2 $P_1\lambda_1 = P_2\mu_2$

$P_2\lambda_2 = P_3\mu_3$

$\vdots$

$P_n\lambda_n = P_{n+1}\mu_{n+1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$P_1 = P_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1}$

$P_2 = P_1 \frac{\lambda_1}{\mu_2} = P_0 \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}$

$P_3 = P_2 \frac{\lambda_2}{\mu_3} = P_0 \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}$

$\vdots$

$P_n = P_0 \underbrace{\boxed{\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}}}_{C_n}$

$P_n = P_0 C_n \quad , n=0,1,2,\ldots$

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n = 1$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty \Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum C_n} > 0$

$\Rightarrow \boxed{P_n = \frac{C_n}{\sum C_n} > 0 \ \forall n}$ $\rightarrow$ Θ.Ε.

(ii) $\sum C_n = \infty \Rightarrow P_n = 0 \ \forall n$

14/01/2015

Μάθημα 21

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ

Q = πίνακας ρυθμών μετάβασης $\Rightarrow \{q_{ij}, i \neq j\}$

Εμφυτευμένη ΜΑΔΧ $\{X_n, n=1,2\ldots\}$ όπου $X_n = X(t_n^+)$
και t_n = η χρονική στιγμή $n^{οστής}$ μετάβασης

$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}, i \neq j$

Έστω ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική.
Τότε $\begin{cases} \text{(1) και η εμφυτευμένη αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική} \\ \text{(2) και οι δύο έχουν μοναδικές στάσιμες κατανομές.} \end{cases}$

Έστω $\{P_j, j\in S\}$ η στάσιμη κατανομή της $\{X(t), t\geq 0\}$
Έστω $\{\pi_j, j\in S\}$ η στάσιμη κατανομή της εμφυτευμένης

$P_j = \lim_{t\to\infty}$ {ποσοστό χρόνου στην κατάσταση j στο $[0,t]$}

$\pi_j = \lim_{n\to\infty}$ {ποσοστό μεταβάσεων προς ή από την κατάσταση j στις n πρώτες μεταβάσεις}

Για τις εξισώσεις συνεχούς χρόνου $\boxed{P_j q_j = \sum_{i\neq j} P_i q_{ij}}$

Ισοδύναμα συστήματα εξισώσεων

$$\sum_{j\in S} P_j = 1$$

Εμφυτευμένη $\pi_j = \sum_{i\in S}\pi_i P_{ij} = \sum_{i\neq j}\pi_i P_{ij} = \sum_{i\neq j}\pi_i \frac{q_{ij}}{q_i} = \sum_{i\neq j}\frac{\pi_i}{q_i} q_{ij}$

$P_{ii}=0\ \forall i$

Δεν έχουμε στην εμφυτευμένη μεταβάσεις στον εαυτό μας

$\sum \pi_j = 1$ $\Rightarrow \boxed{\frac{\pi_j}{q_j} q_j = \sum_{i\neq j}\frac{\pi_i}{q_i} q_{ij}}$

Αν θέσω $x_j = \frac{\pi_j}{q_j}$

Γενικά $P_j = c x_j \quad c\in\mathbb{R}$

Επίσης $\sum P_j = 1 \Rightarrow c\sum \frac{\pi_j}{q_j} = 1$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sum_{j\in S}\pi_j/q_j} \Rightarrow \boxed{P_j = \frac{\pi_i/q_j}{\sum_{j\in S}\pi_i/q_j}}$$

Οι δύο στάσιμες κατανομές συνδέονται ως εξής:

$$P_j = \frac{\pi_j/q_j}{\sum_{j\in S}\pi_j/q_j}, \quad \pi_j = \frac{P_j q_j}{\sum_{j\in S}P_j q_j}$$

Παραδείγματα:

σχ

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

$q_0=\lambda$ | $q_{01}=\lambda$

$q_1=\mu$ | $q_{10}=\mu$

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

$$P_{01}=\frac{q_{01}}{q_0}=1 \qquad P_{10}=\frac{q_{10}}{q_1}=1$$

Εμφυτ.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "1"] & 1 \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

Εδώ έχουμε πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος!!!

$$\boxed{\pi_0=\pi_1=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P_0=\frac{\pi_0/q_0}{\frac{\pi_0}{q_0}+\frac{\pi_1}{q_1}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\lambda}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\lambda}+\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\mu}}=\boxed{\frac{\mu}{\lambda+\mu}=P_0}$$

$$\boxed{P_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}$$

Άσκηση 1

Πιάτσα ταξί

Υποθέτουμε ότι ο πελάτης αν δεν βρει ταξί φεύγει, άρα τα ταξί που έρχονται σίγουρα δεν βρίσκουν πελάτες να περιμένουν.

Πελάτες φτάνουν στην πιάτσα για ταξί, οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων πελατών $\sim Exp(\lambda)$

Υποθέτουμε ότι η πιάτσα έχει χωρητικότητα b (δηλ. μπορούν να περιμένουν μέχρι b ταξί στην πιάτσα)

Χρόνοι μεταξύ αφίξεων ταξί ~ Εκθετική κατανομή με παράμετρο θ.

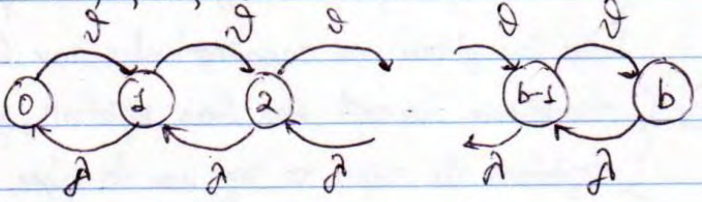
Ζητούνται:

1. Μοντέλο ΜΑΣΧ, διάγραμμα μεταβάσεων
2. Αδιαχωρίστη, θετικά επαναληπτική
3. Ποσοστό χρόνου χωρίς ταξί.

(1)

$\{X(t), t \geq 0\}$ $X(t)$ = αριθμός ταξί στην πιάτσα τη στιγμή t

$S = \{0, 1, \dots, b\}$



Άσκηση: Να βρούμε τον Q.

(2) Αδιαχώριστη, Πεπερασμένη $\Big\} \Rightarrow$ Θετικά επαναληπτική (άρα έχει και μοναδική στάσιμη κατανομή)

(3) Στάσιμη Κατανομή

$$P_0 \vartheta = P_1 \cdot \lambda \Rightarrow P_1 = P_0 \cdot \frac{\vartheta}{\lambda}$$

$$P_1 \vartheta = P_2 \lambda \Rightarrow P_2 = P_1 \frac{\vartheta}{\lambda}$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^n, \; n = 0, 1, \dots, b$$

$$\sum_{n=0}^{b} P_n = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{b} \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^n = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \frac{1 - \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^{b+1}}{1 - \frac{\vartheta}{\lambda}} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{P_n = \frac{\left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^n \left[1 - \frac{\vartheta}{\lambda}\right]}{1 - \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^{b+1}}, \; n = 0, 1, \dots b}$$

% χρόνου χωρίς ταξί

$$\boxed{P_0 = \frac{1 - \vartheta/\lambda}{1 - \left(\frac{\vartheta}{\lambda}\right)^{b+1}}}$$

Άσκηση 2

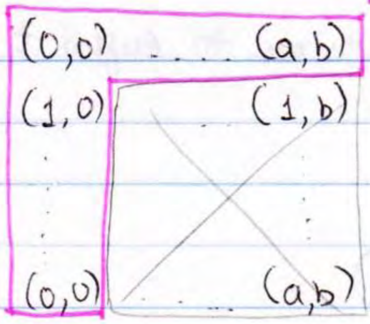
(Συνέχεια της 1)

Έστω ότι και οι πελάτες περιμένουν, ο χώρος αναμονής των πελατών είναι a ατόμων

Θα μπορούσαμε να θέσουμε $X(t) = (i, j)$

i = αριθμός πελατών που περιμένουν, $i \in \{0, \dots, a\}$

j = αριθμός ταξί, $j \in \{0, \dots, b\}$



← Αυτές οι καταστάσεις δεν θα παρατηρηθούν!

π.χ. δεν γίνεται να παρατηρήσουμε την (1,2), να περιμένουν δύο ταξί και ένας πελάτης, γιατί, ο ένας πελάτης θα πάρει το ταξί και θα φύγει, άρα θα μείνει ένα ταξί να περιμένει!

Εναλλακτική:

$X(t) \in \{-a, \dots, b\}$

$X(t) = -i < 0$, i πελάτες

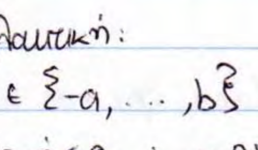
$X(t) = j > 0$, j ταξί

ή θα περιμένουν πελάτες ή θα περιμένουν ταξί!

16/01/2015

Μάθημα 22

Άσκηση 1



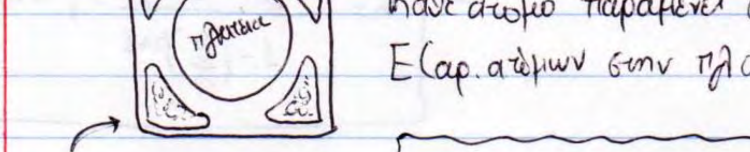
Κάθε άτομο παραμένει στο χώρο χρόνο $\sim Exp(\mu)$

E(αρ. ατόμων στην πλατεία σε στάσιμη κατανομή) = ?

πολίτες διαδικασία Poisson(λ)

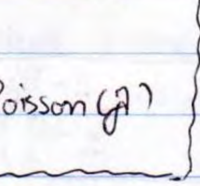
$\{X(t), t \geq 0\}$ όπου $X(t)$ = αρ. ατόμων στην πλατεία τη στιγμή t

$S = \{0, 1, 2, \dots\}$



(ο ελάχιστος χρόνος να φύγει κάποιος από αυτούς)

$X(t) = n$:



Γεγονότα: ① Έρχεται ένα νέο άτομο (με ρυθμό λ) $\rightarrow n+1$

② Φεύγει ένα άτομο $\rightarrow n-1$

ή ② φεύγει ο A_1 $(\mu) \to (n-1)$

φεύγει ο A_2 $(\mu) \to (n-1)$

⋮

φεύγει ο A_n $(\mu) \to (n-1)$

Με άλλα λόγια, ένα καινούριο άτομο έρχεται με ρυθμό λ.
Όμως από τα ήδη υπάρχοντα άτομα μπορεί να φύγει το οποιοδήποτε (ο A_1, ο A_2 ή ο A_3 κλπ) με ρυθμό μ το καθένα.
Άρα ο ελάχιστος χρόνος να φύγει κάποιος από τους $A_1, \dots, A_n$ είναι $n \cdot \mu$

Εξισώσεις Ισορροπίας

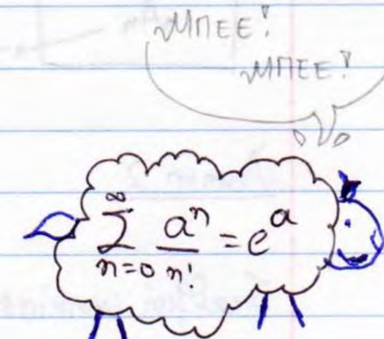
$$P_0 \lambda = P_1 \cdot \mu \Rightarrow p_1 = p_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_1 \lambda = P_2 \, 2\mu \Rightarrow P_2 = P_0 \cdot \frac{\lambda^2}{2\mu^2}$$

$$P_2 \lambda = P_3 \, 3\mu \Rightarrow P_3 = P_0 \cdot \frac{\lambda^3}{2 \cdot 3 \cdot \mu^3}$$

⋮

γενικά $P_n = P_0 \dfrac{\lambda^n}{n! \, \mu^n}$



Κανονικοποίηση

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_0 \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} = 1 \Rightarrow P_0 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}_{< \infty \, \forall \lambda, \mu} = 1$$

Προβατάκι by Τόμυ :)

$$\Rightarrow P_0 = e^{-(\lambda/\mu)} > 0 \Rightarrow \boxed{P_n = e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \dots \; (>0)} \Rightarrow \text{Θ.Ε.}$$

$\lim_{t \to \infty} E(X(t)) = ?$

$$P_n = ? = \lim_{t \to \infty} P(X(t) = n) = e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \Rightarrow X(t) \xrightarrow{\infty} \text{Poisson}(\lambda/\mu)$$

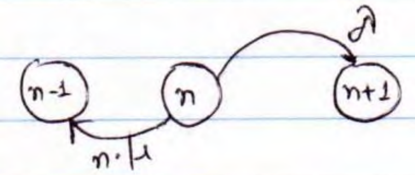
$\Rightarrow E(X(t)) \to \lambda/\mu$

Π.χ. $\lambda = 100/min = 6000/hr$

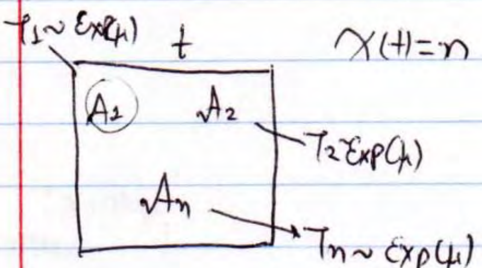
Κάθε άτομο μένει κατά μέσο όρο 2 ώρες, $E(\underbrace{\text{χρόνος παραμονής}}_{Exp(\mu)}) = 2hr = \frac{1}{\mu}$

$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$

$E(X(t)) \to \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6000}{1/2} = 12000$



Η εκθετική έχει την αμνήμονη ιδιότητα!



Άσκηση 2

Σταθμοί ενοικίασης A, B

2 αυτοκίνητα ενός τύπου

Πελάτες στην πόλη A (Poisson(λ_A))

Πελάτες στην πόλη B (Poisson(λ_B))

Χρόνος ενοικιάσεων $\sim Exp(\mu)$

Επιστροφή αυτοκινήτων $\to$ A με πιθ. P_A, $\to$ B με πιθ. P_B $\Big\}$ $P_A + P_B = 1$

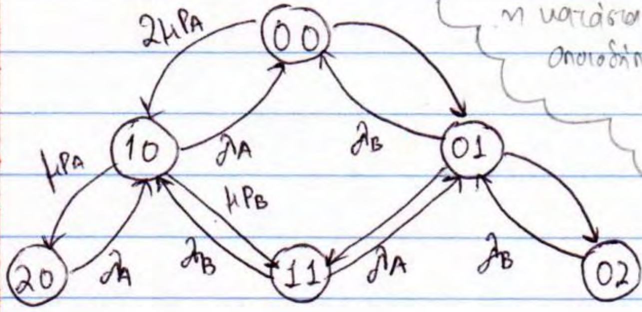
(α) ΜΑΣΧ, διάγραμμα ρυθμών

(β) Για $\lambda_A = \lambda_B = \lambda$, $P_A = P_B = \frac{1}{2}$ να βρεθεί η στάσιμη κατανομή και το % χρόνου που είναι ενοικιασμένα 0, 1, ή 2 αυτοκίνητα.

(α) $X(t) = (i,j)$ i = αριθ. αυτοκ. A, j = αριθ. αυτοκ. B $i + j \leq 2$

$2-i-j$ = αρ. ενοικιασμένων

έχω δύο αυτοκίνητα στο δρόμο: η κατάσταση θα αλλάζει όταν οποιοδήποτε από τα 2 θα επιστραφεί, γι'αυτό γίνεται με ρυθμό 2μ. (δες και την άσκ. 1, με την πλατεία :)



$(20) \to (10)$ $\quad q_{20,10} = \lambda_A$

$(10) \to (20)$ $\quad q_{10,20} = ;$

T_{10} = χρόνος παραμονής στην $(1,0)$

$T_{10} \sim Exp(q_{10})$

$q_{10} = ?$

$P_{10,20} = P(10 \to 20$ όταν γίνει μετάβαση$) = P($επιστροφή πριν την ενοικίαση$) \cdot P($επιστροφή στην A | επιστροφή πριν την ενοικίαση$)$

$= \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$

$= P_A$

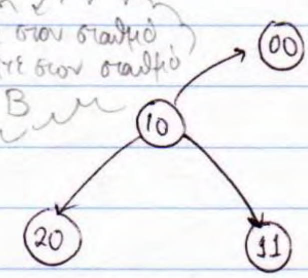
$$\boxed{q_{10,20} = (\lambda_A+\mu)\cdot\frac{\mu}{\lambda_A+\mu}\cdot P_A = \mu\cdot P_A}$$

Γεγονότα που αλλάζουν κατάσταση

① Ενοικίαση στην A $\sim Exp(\lambda)$

② Επιστροφή $\quad Exp(\mu)$

είτε στον σταθμό A, είτε στον σταθμό B



$$P_{10,20} = \frac{q_{10,20}}{q_{10}}$$