1 Τοπολογικοί χώροι

1.1 Στοιχειώδεις έννοιες της τοπολογίας

Στην παράγραφο αυτή εισάγουμε τις βασικές έννοιες της τοπολογίας, δηλαδή αυτές του ανοικτού και κλειστού συνόλου, της κλειστότητας και του εσωτερικού συνόλου, την έννοια της περιοχής (γειτονιάς) ενός σημείου και συζητούμε τις μεταξύ τους σχέσεις.

Ορισμός 1.1 . Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο. Μία τοπολογία τ στο X είναι ένα υποσύνολο $\tau \subseteq P(X)$ ώστε:

(ι) $\emptyset, X \in \tau$.

(ιι) Η ένωση των μελών κάθε οικογένειας του τ ανήκει στο τ .

(Αν $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$, όπου I τυχόν σύνολο δεικτών, τότε $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.)

(ιιι) Η τομή των μελών κάθε πεπερασμένης οικογένειας του τ ανήκει στο τ .

(Αν $n \in N$ και $U_1, ..., U_n \in \tau$ τότε $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tau$.)

Το ζεύγος (X , τ) ονομάζεται τοπολογικός χώρος και τα μέλη της τ ονομάζονται ανοικτά υποσύνολα του X .

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης γράφουμε συνήθως ο τοπολογικός χώρος X και χρησιμοποιούμε την σύντμηση τ.χ. (= τοπολογικός χώρος).

Παραδείγματα 1.2. 1) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο $V \subseteq X$ με $V \neq \emptyset$ λέγεται ανοικτό αν για κάθε $x \in V \ \exists \ \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq V$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν θέσουμε $\tau_d = \{V \subseteq X : \emptyset \neq V \text{ και } V \text{ ανοικτό } \} \cup \{\emptyset\}$ είναι μια τοπολογία στο X .

Ορολογία. Ένας τοπολογικός χώρος (X , τ) ονομάζεται μετρικοποιήσιμος, αν υπάρχει μετρική d στο X ώστε $\tau = \tau_d$

2) Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο. Θέτουμε $\mathcal{T} = P(X)$

Προφανώς η $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X, η οποία ονομάζεται η <u>διακριτή</u> τοπολογία στο X.

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ όπου d η <u>διακριτή μετρική</u> στο X. (Απόδειξη. Αν $x \in X$ τότε $B(x,\varepsilon) = \{x\}$ όπου $0 < \varepsilon < 1$.).

3) Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο. Θέτουμε $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Προφανώς η $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X, η οποία ονομάζεται η <u>τετριμμένη</u> τοπολογία στο X.

Παρατηρούμε ότι:

α) Αν $|X| = 1$, τότε (X , $\mathcal{T}$) μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Πράγματι, επειδή $|X| = 1$ έπεται ότι $P(X) = \{\emptyset, X\} = \mathcal{T}$. Συνεπώς από το παράδειγμα (2) έχουμε το συμπέρασμα.

<u>β) Αν $|X| \geq 2$, τότε ο (X , $\mathcal{T}$) δεν είναι μετρικοποιήσιμος . Πράγματι έστω d μια</u> μετρική στο X ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Αν $a,b \in X$ με $a \neq b$ και $\varepsilon = d(a,b) > 0$ τότε οι ανοικτές σφαίρες $B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $B\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ είναι ξένες και βέβαια $\neq \emptyset$. Επίσης $B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq X \neq B\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Έπεται ότι $B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right), B\left(b, \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathcal{T}$ και συνεπώς $|\mathcal{T}| \geq 3$, άτοπο.

4) Έστω $X = \{a,b\}$ με $a \neq b$ και $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ αποδεικνύεται όπως πριν ότι ο (X , $\mathcal{T}$) <u>δεν</u> είναι μετρικοποιήσιμος . Ο (X , $\mathcal{T}$), ονομάζεται ο χώρος του Sierpinski.

5) Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο. Θέτουμε $\mathcal{T} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η $\mathcal{T}$ είναι μια τοπολογία στο X.

Σημειώνουμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται συμπεπερασμένο αν $X \setminus A$ πεπερασμένο. Επομένως τα μέλη της τ είναι τα συμπεπερασμένα υποσύνολα του X και το $\varnothing$. Η τοπολογία τ λέγεται η συμπεπερασμένη τοπολογία .

Ορισμός 1.3. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο $A \subseteq X$ λέγεται κλειστό αν το $X \setminus A$ είναι ανοικτό.

Πρόταση 1.4 Έστω X τοπολογικός χώρος και F η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του X . Τότε

(α) $\varnothing, X \in \tau$

(β) Η τομή κάθε οικογένειας μελών της F είναι κλειστό σύνολο

(γ) Η ένωση κάθε πεπερασμένης οικογένειας μελών της F είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη (α) προφανές .

(β) Αν $A_i, i \in I$ κλειστά τότε το $X \setminus A_i = A_i^c, i \in I$ ανοικτά $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i^c$ ανοικτό , αλλά (από τους κανόνες De Morgan) $\bigcup_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c$ ανοικτό $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ κλειστό σύνολο.

(γ) Η απόδειξη είναι παρόμοια με το (β) . Αν $A_1, \ldots, A_n$ κλειστά σύνολα τότε $A_1^c, \ldots, A_n^c$ ανοικτά σύνολα $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c$ ανοικτό σύνολο $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ κλειστό.

Ορισμός 1.5 Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Η κλειστότητα (ή κλειστή θήκη) του A είναι το σύνολο

$$\overline{A} = \bigcap \{ B : B \text{ κλειστό και } A \subseteq B \}$$

Το $\overline{A}$ συμβολίζεται και με $cl_X A$ ή clA

Παρατηρούμε ότι το $\overline{A}$ ως τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό και μάλιστα είναι το ελάχιστο(ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) κλειστό σύνολο που περιέχει το A

Πρόταση 1.6 Έστω X τοπολογικός χώρος.

Η πράξη της κλειστότητας $P(X) \ni A \to \overline{A} \in P(X)$, ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

(α) $\overline{\varnothing} = \varnothing$

(β) $A \subseteq \overline{A}$

(γ) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(δ) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ε) A κλειστό $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

<u>Απόδειξη</u> Οι (α) και (β) είναι προφανείς

(γ) Το $\overline{A}$ είναι κλειστό άρα $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$.

(δ) Παρατηρούμε ότι αν $C \subseteq D$ τότε $\overline{C} \subseteq \overline{D}$ ($C \subseteq D \Rightarrow C \subseteq D \subseteq \overline{D} \Rightarrow \overline{C} \subseteq \overline{D}$). (1)

Με την βοήθεια αυτής της παρατήρησης έχουμε $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ και $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

Επίσης $A \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$, $B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ και βέβαια το $\overline{A} \cup \overline{B}$ κλειστό συνεπώς $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ (2) .

Από τις (1) και (2) έχουμε το συμπέρασμα

(ε) Αν A κλειστό τότε από τον ορισμό έπεται αμέσως ότι $\overline{A} = A$. Αν $\overline{A} = A$ τότε A κλειστό αφού $\overline{A}$ κλειστό σύνολο.

<u>Παραδείγματα</u> 1.7. 1)Έστω X σύνολο εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία $\tau = P(X)$. Τότε κάθε υποσύνολο $A \subseteq X$ είναι κλειστό.

2) Έστω(X , τ) μετρικός χώρος. Αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τότε ως γνωστόν η ανοικτή σφαίρα $B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό σύνολο και η κλειστή σφαίρα $B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}$ είναι κλειστό σύνολο.

3) Έστω $X = R$ με τη συνήθη μετρική. Τότε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b], a < b \in R$ είναι κλειστό σύνολο. Επίσης κάθε διάστημα της μορφής $(-\infty, a]$ ή $[b, +\infty)$ είναι κλειστό σύνολο. Το διάστημα $[0,1)$ δεν είναι ανοικτό ούτε και κλειστό σύνολο (γιατί;).

4) Κάθε ευθεία στο ευκλείδειο επίπεδο $X = R^2$ είναι κλειστό σύνολο (γιατί;)

5) Έστω $X = Q$ με την συνήθη μετρική. Τότε το σύνολο $V = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] \cap Q = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) \cap Q$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του Q, ώστε $\varnothing \neq V \neq Q$.

<u>Παρατηρήσεις</u> 1.8.

1) Για κάθε τοπολογικό χώρο X και $A, B \subseteq X$ ισχύει (όπως είδαμε πριν) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Δεν ισχύει γενικά για τις τομές η αντίστοιχη σχέση.
Πράγματι , έστω $X = R$ με τη συνήθη μετρική, $A = Q$(= το σύνολο των ρητών) και $B = R \setminus Q$ (= το σύνολο των αρρήτων) Τότε $A \cap B = \varnothing$ άρα $\overline{A \cap B} = \varnothing$. Από την άλλη όμως έχουμε $\overline{A} = R$ και $\overline{B} = R$, άρα $\overline{A} \cap \overline{B} = R$. Συνεπώς $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$.
Σημειώνουμε ότι, γενικά ισχύει $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (γιατί;)

2) Αν (X, d) μετρικός χώρος , $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τότε (προφανώς) $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq B(x,\varepsilon)$ (η σφαίρα $B(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο. Δεν ισχύει όμως γενικά ισότητα. Πράγματι έστω d η διακριτή μετρική στον X. Αν $x \in X$ τότε $B(x,1) = X$ ενώ $\overline{B(x,1)} = B(x,1) = \{x\}$. Σημειώνουμε ότι η ισότητα $B(x,\varepsilon) = \overline{B(x,\varepsilon)}$, ισχύει στους ευκλείδειους χώρους και γενικότερα σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα .
(Αν $(X, \|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα τότε ο X μετρικοποιείται με την μετρική $d(x,y) = \|x - y\|, x, y \in X$.)
Η επόμενη πρόταση περιγράφει με ένα ισοδύναμο τρόπο την κλειστότητα ενός συνόλου.

<u>Πρόταση</u> 1.9 Έστω (X , τ) τ.χ. και $A \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(α) $x \in \overline{A}$

(β) Για κάθε ανοικτό $U \subseteq x$ με $x \in U$ ισχύει $U \cap A \neq \varnothing$.

Δηλαδή $\overline{A} = \{x \in X : U \cap A \neq \varnothing$ για κάθε $U \in \tau$ με $x \in U\}$.

<u>Απόδειξη</u> (α) $\Rightarrow$(β) . Έστω $x \in \overline{A}$. Ας υποθέσουμε , για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει $U \in \tau$ με $x \in U$ ώστε $U \cap A = \varnothing$. Τότε , $A \subseteq X \setminus U$ και βέβαια $X \setminus U$ κλειστό. Από τον ορισμό της κλειστότητας έχουμε ότι $\overline{A} \subseteq X \setminus U$, επομένως, αφού $x \in \overline{A}$, θα έχουμε ότι $x \in X \setminus U$ το οποίο αντιφάσκει στο γεγονός ότι $x \in U$.

(β) $\Rightarrow$(α) Ας υποθέσουμε, πάλι προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το $x \in X$ ικανοποιεί την συνθήκη στον ισχυρισμό (β) και ότι $x \notin \overline{A}$. Τότε το $x \in X \setminus \overline{A}$ το οποίο είναι ανοικτό σύνολο και άρα από την πρότασή μας θα πρέπει $\left(X \setminus \overline{A}\right) \cap A \neq \varnothing$. Αυτό όμως αντιφάσκει με το ότι $A \subseteq \overline{A}$.

<u>Ορισμός</u> 1.10. Έστω (X , τ) τ.χ., $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x θα καλείται σημείο <u>συσσώρευσης</u> (σ.σ.) του A, αν ισχύει $U \cap \left(A \setminus \{x\}\right) \neq \varnothing$, για κάθε ανοικτό $U \subseteq X$ με $x \in U$.

Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης ενός συνόλου $A \subseteq X$ ονομάζεται το <u>παράγωγο</u> σύνολο του A και συμβολίζεται με A'. Παρατηρούμε ότι, $A' \subseteq \overline{A}$.

Ένα σημείο $x \in A$, θα ονομάζεται <u>μεμονωμένο</u> (ή απομονωμένο) σημείο του A αν υπάρχει $U \in \tau : U \cap A = \{x\}$.

<u>Πρόταση</u> 1.11 Έστω (X , τ) τ.χ και $A \subseteq X$, τότε $\overline{A} = A \cup A'$.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $x \in \overline{A}$. Αν $x \in A$ τότε $x \in A \cup A'$. Αν $x \notin A$ τότε για κάθε $U \in \tau$ με $x \in U$, ισχύει $U \cap \left(A \setminus \{x\}\right) = U \cap A \neq \varnothing$ συνεπώς $x \in A' \subseteq A \cup A'$.

Αντίστροφα , έστω $x \in A \cup A'$. Αν $x \in A$ τότε $x \in \overline{A}$, αφού $A \subseteq \overline{A}$. Αν $x \in A'$ τότε από τον ορισμό του σ.σ. και την πρόταση 1.9 έχουμε $x \in \overline{A}$.

<u>Πόρισμα</u> 1.12 . Έστω (X , τ) τ.χ και $A \subseteq X$. Τότε , το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A' \subseteq A$. Ιδιαίτερα έπεται ότι αν το A δεν έχει σ.σ. ($A' = \varnothing$) τότε είναι κλειστό.

Απόδειξη ($\Rightarrow$) Αν το A είναι κλειστό τότε από την πρόταση 1.6 έχουμε ότι $A = \overline{A}$. Κατά συνέπεια από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $A' \subseteq A \cup A' = \overline{A} = A$.

($\Leftarrow$) Αν $A' \subseteq A$ τότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $A = A \cup A' = \overline{A}$. Επομένως από την πρόταση 1.6 το A είναι κλειστό .

Ο δεύτερος ισχυρισμός μας τώρα είναι προφανής

<u>Παρατηρήσεις και παραδείγματα</u> 1.13 Έστω (X , τ) τ.χ και $A \subseteq X$

(α) Έστω $x \in A$. Τότε το x είναι σ.σ. του A αν και μόνο αν δεν είναι μεμονωμένο σημείο του A (γιατί;).

(β) Έστω $A = \{1\} \cup [2,3] \subseteq R$ (όπου το R θεωρείται με την συνήθη τοπολογία). Τότε το 1 είναι μεμονωμένο του A και συνεπώς δεν είναι σ.σ. του A. Επίσης παρατηρούμε ότι κάθε σημείο του $B = [0,1] \subseteq R$ είναι σ.σ. του $[0,1]$ αλλά και του $(0,1)$. Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι ένα σ.σ. ενδέχεται να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο.

(γ) Έστω $A \subseteq R$ (ή $A \subseteq R^n$ με την ευκλείδεια μετρική) ανοικτό τότε $A \subseteq A' = \overline{A}$ (γιατί;). Ακόμη παρατηρούμε ότι ένα άπειρο υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου ενδέχεται να μην έχει σ.σ. για παράδειγμα οι ακέραιοι αριθμοί $Z \subseteq R$ δεν έχουν σ.σ.

Ακολουθεί η έννοια του ΄΄εσωτερικού ΄΄ ενός συνόλου σε ένα τοπολογικό χώρο, η οποία είναι η δυική έννοια της κλειστότητας.

<u>Ορισμός</u> 1.14. Έστω (X , τ) τ.χ και $A \subseteq X$. Ορίζουμε ως <u>εσωτερικό</u> του A το σύνολο:

$$A^0 = \bigcup \{ B : B \subseteq A \text{ και } B \text{ ανοικτό σύνολο} \}$$

Το εσωτερικό ενός συνόλου συμβολίζεται και με $\operatorname{int}(A)$ ή $\operatorname{int}_X(A)$ ή και $\operatorname{int}_\tau A$.

Είναι σαφές , από τον ορισμό, ότι το εσωτερικό ενός συνόλου είναι ανοικτό σύνολο, ως ένωση ανοικτών συνόλων Ακόμη από τον ορισμό προκύπτει ότι το εσωτερικό είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A. Τα σημεία του A^0 ονομάζονται <u>εσωτερικά</u> σημεία του A.

<u>Παραδείγματα</u> 1.15. 1) Έστω $X = R$ με τη συνήθη τοπολογία . Το εσωτερικό του $A = [0,1)$ είναι το ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

2) Έστω $X = R^2$ το ευκλείδειο επίπεδο (δηλ. ο R^2 με την ευκλείδεια μετρική). Τότε το εσωτερικό του κλειστού δίσκου $B(x,\varepsilon)$ είναι ο ανοικτός δίσκος $B(x,\varepsilon)$.

3) Ένα άπειρο σύνολο σε ένα τοπολογικό χώρο μπορεί να έχει κενό εσωτερικό. Πράγματι, έστω $X = R$, με την συνήθη τοπολογία , τότε $Q^o = \varnothing$, όπου Q το σύνολο των ρητών. Ανάλογα τα σύνολα Q^n και Z^n έχουν κενό εσωτερικό στον ευκλείδειο χώρο R^n. (Δώστε τις λεπτομέρειες.)

Ο δυϊσμός μεταξύ κλειστότητας και εσωτερικού περιγράφεται στην ακόλουθη.

<u>Πρόταση</u> 1.16. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$ τότε ισχύουν :

(α) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^0$ και (β) $X \setminus A^0 = \overline{X \setminus A}$.

Απόδειξη (α) Έστω $x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$ με $x \in U : U \cap A = \varnothing$ (πρόταση 1.9) $\Leftrightarrow$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$ με $x \in U : U \subseteq A^c = X \setminus A \Leftrightarrow x \in (X \setminus A)^0$

Έτσι αποδείχτηκε η ισότητα (α).

(β) Εφαρμόζουμε την ισότητα (α) στο $X \setminus A$ και παίρνουμε αμέσως την ισότητα (β)

<u>Πρόταση</u> 1. 17. Έστω X τοπολογικός χώρος η πράξη του εσωτερικού ,

$$P(X) \ni A \to A^0 \in P(X)$$

Ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $A^0 \subseteq A$,

(β) $A^{00} = A^0$ (όπου $A^{00} \underset{o\rho}{=} \left(A^0\right)^0$),

(γ) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$,

(δ) Το A είναι ανοικτό $\Leftrightarrow A = A^0$.

<u>Απόδειξη</u> Οι (α) και (β) είναι προφανείς συνέπειες του ορισμού 1.14

(γ) Παρατηρούμε ότι αν $C \subseteq D \subseteq X$ τότε $C^0 \subseteq D^0$. Έπεται από την παρατήρηση αυτή ότι:

$A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B \Rightarrow (A \cap B)^0 \subseteq A^0$ και $(A \cap B)^0 \subseteq B^0$, συνεπώς $(A \cap B)^0 \subseteq A^0 \cap B^0$ (1)

Επίσης έχουμε $A^0 \subseteq A$ και $B^0 \subseteq B \Rightarrow A^0 \cap B^0 \subseteq A \cap B$. Το $A^0 \cap B^0$ είναι ανοικτό (ως τομή δύο ανοικτών) επομένως $A^0 \cap B^0 \subseteq (A \cap B)^0$ (2) . Από τις (1) και (2) έπεται η ισότητα (γ) .

(δ) Αν το A είναι ανοικτό σύνολο τότε (προφανώς) $A = A^0$

Αν $A = A^0$ τότε A ανοικτό αφού το A^0 είναι ανοικτό σύνολο.

<u>Παρατήρηση</u> 1.18. Η ισότητα $(A \bigcup B)^0 = A^0 \bigcup B^0$ δεν ισχύει γενικά για την ένωση. Πράγματι έστω $X = R$(με την συνήθη τοπολογία) και $A = Q$(= οι ρητοί), $B = R \setminus Q$ (= οι άρρητοι). Τότε $A \cup B = R$, άρα $(A \cup B)^0 = R^0 = R$, όμως $Q^0 = \varnothing$ και $(R \setminus Q)^0 = \varnothing$. Δηλαδή $(A \cup B)^0 \neq A^0 \cup B^0$.

Γενικά ισχύει ότι $A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$ (γιατί;)

<u>Ορισμός</u> 1.19. Έστω X τ.χ. και $A \subseteq X$. Το <u>σύνορο</u> $Bd(A)$ (ή $Bd_X(A)$ ή ∂A ή $\partial_X A$) ορίζεται από την ισότητα

$$Bd(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

Επειδή όπως αποδείξαμε ισχύει $\overline{(X \setminus A)} = X \setminus A^0 = (A^0)^C$, έπεται ότι $Bd(A) = \overline{A} \setminus A^0$

Τα σημεία του $Bd(A)$ ονομάζονται <u>συνοριακά</u> σημεία του A.

Παρατηρούμε ότι το $x \in X$ είναι συνοριακό σημείο του $A \Leftrightarrow U \cap A \neq \varnothing$ και $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ για κάθε ανοικτό σύνολο με $x \in U$. Έπεται ιδιαίτερα ότι το A και το συμπλήρωμά του $A^C = X \setminus A$ έχουν το <u>ίδιο</u> σύνορο.

<u>Πρόταση</u> 1.20. Έστω X τ.χ. και $A \subseteq X$.Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

(α) $\overline{A} = A \cup Bd(A) = A^0 \cup Bd(A)$ με $A^0 \cap Bd(A) = \varnothing$.

(β) $X = A^0 \cup (X \setminus A)^0 \cup Bd(A)$ με τα σύνολα $A^0, Bd(A)$ και $(X \setminus A)^0$, ανά δύο ξένα.

<u>Απόδειξη</u> (α) Παρατηρούμε ότι $A^0 \cup Bd(A) = A^0 \cup (\overline{A} \setminus A^0) = \overline{A}$ και βέβαια $A^0 \cap Bd(A) = A^0 \cap (\overline{A} \setminus A^0) = \varnothing$. Από την ισότητα που μόλις αποδείξαμε και το ότι $A^0 \subseteq A \subseteq \overline{A}$ έπεται αμέσως ότι $\overline{A} = A \cup Bd(A)$.

(β) Είναι προφανές ότι τα A^0 και $(X \setminus A)^0$ είναι ξένα σύνολα, από τον ισχυρισμό (α) τα A^0 και $Bd(A)$ είναι επίσης ξένα. Επειδή τα σύνολα A και $X \setminus A$ έχουν το ίδιο σύνορο έπεται ότι τα $(X \setminus A)^0$ και $Bd(A)$ είναι ξένα. Έτσι τα σύνολα $A^0, Bd(A)$ και $(X \setminus A)^0$ είναι ξένα ανά δύο.

Ακολούθως χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα και την ισότητα $(X \setminus A)^0 = X \setminus \overline{A}$ έχουμε: $A^0 \cup Bd(A) \cup (X \setminus A)^0 = \overline{A} \cup (X \setminus \overline{A}) = X$.

<u>Παρατηρήσεις και παραδείγματα</u> 1.21. Στα παραδείγματα που ακολουθούν αναφερόμαστε στον ευκλείδειο χώρο, δηλαδή στον R^n με την ευκλείδεια μετρική.

($d(x,y) = \|x-y\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, όπου $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n) \in R^n$)

1)Το σύνορο του διαστήματος $I = [0,1] \subseteq R$ είναι το σύνολο $Bd(I) = \overline{I} \setminus I^0 = [0,1] \setminus (0,1) = \{0,1\}$.

2)Το σύνορο του άνω ημιεπιπέδου $A = \{(x,y) \in R^2 : y > 0\}$ είναι η ευθεία των πραγματικών αριθμών $\{(x,0) : x \in R\}$.

3)Αν $B(x,\varepsilon)$ είναι ένας ανοικτός δίσκος στο R^2, τότε το σύνορό του είναι ο κύκλος $S(x,\varepsilon) = \{y \in R^2 : \|x-y\|_2 = \varepsilon\}$ (Γεωμετρικά προφανές.)

4)Το προηγούμενο παράδειγμα γενικεύεται σε κάθε Ευκλείδειο χώρο. Αν $B(x,\varepsilon)$ είναι μία ανοικτή σφαίρα στον R^n τότε το σύνορό της είναι το σύνολο $S(x,\varepsilon)=\{y\in R^n : \|x-y\|_2=\varepsilon\}$. (αποδεικνύουμε πρώτα ότι η κλειστότητα της ανοικτής σφαίρας $B(x,\varepsilon)$ισούται με την αντίστοιχη κλειστή σφαίρα $B(x,\varepsilon)$, οπότε το αποτέλεσμα έπεται από τον ορισμό του συνόρου. Η απόδειξη αυτή αφήνεται ως άσκηση).

5) Η έννοια του συνόρου γίνεται καλύτερα κατανοητή (και ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα) στην περίπτωση των ανοικτών υποσυνόλων ευκλείδειων χώρων. Έστω $A\subseteq R^n$ ανοικτό . Ένα σημείο $x\in R^n$ είναι συνοριακό σημείο του A, αν και μόνο αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του A και $x\notin A$ (γιατί;). Αυτό εκφράζει την διαισθητική ιδέα ότι ένα συνοριακό σημείο ενός συνόλου είναι ένα σημείο στην ΄΄άκρη΄΄ του συνόλου .

<u>Ορισμός</u> 1.22. Έστω X τ.χ. και $x\in X$.

(α) μία <u>περιοχή</u> ή <u>γειτονιά</u> του x είναι ένα σύνολο $U\subseteq X$ ώστε $x\in U^0$. Το σύνολο όλων των περιοχών του x συμβολίζεται με N_x και ονομάζεται το <u>σύστημα των περιοχών</u> ή <u>σύστημα γειτονιών του</u> x.

(β) Μία <u>βάση περιοχών</u> B_x του x είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X ώστε:

(α) $B_x\subseteq N_x$ και

(β) Για κάθε $U\in N_x$ υπάρχει $V\in B_x$ ώστε $V\subseteq U$.

Είναι σαφές ότι το σύστημα N_x είναι βάση περιοχών του x. Γενικά υπάρχουν πολλές διαφορετικές βάσεις περιοχών στο ίδιο σημείο $x\in X$. Αν η B_x έχει καθοριστεί τότε τα μέλη της ονομάζονται <u>βασικές περιοχές</u> ή <u>βασικές γειτονιές</u> του x.

<u>Παραδείγματα</u> 1.23 . 1) Έστω (X , τ) τ.χ. και $x\in X$. Θέτουμε

$$B_x=\{U\subseteq X : x\in U\in\tau\}.$$

Είναι τότε προφανές ότι η B_x είναι μια βάση περιοχών στο x.

2) Έστω ότι στο σύνολο X θεωρούμε τη διακριτή τοπολογία ($\mathcal{T} = P(X)$). Τότε η $B_x = \{\{x\}\}$ είναι μια βάση περιοχών στο x και η $N_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ είναι το σύστημα περιοχών του x

3) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $x \in X$. Θέτουμε:

$$B_x^1 = \{B(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \text{ και } B_x^2 = \left\{B\left(x,\frac{1}{n}\right) : \geq 1\right\}$$

Είναι τότε φανερό ότι κάθε μία από τις οικογένειες B_x^1 και B_x^2 είναι βάση περιοχών του x.. Μάλιστα η B_x^2 είναι αριθμήσιμη.

4) Έστω $X = R^2$ το ευκλείδειο επίπεδο. Αν $p = (a,b) \in R^2$ ορίζουμε $B_p^1 = \{B(p,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ και $B_p^2 = \{U_n : n \geq 1\}$ όπου U_n το ανοικτό ορθογώνιο

$$U_n = \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \times \left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right).$$

Είναι σαφές ότι και οι δύο αυτές οικογένειες είναι βάσεις περιοχών στο $p = (a,b)$ με την δεύτερη αριθμήσιμη και ακόμη ότι $B_p^1 \cap B_p^2 = \varnothing$.

Σημειώνουμε ακόμη ότι μία τρίτη βάση περιοχών στο $p = (a,b)$. Είναι η οικογένεια όλων των τριγώνων του επιπέδου που στο εσωτερικό τους περιέχουν το σημείο $p = (a,b)$ (γιατί;).

<u>Ορισμός</u> 1.24 . Έστω $S \neq \varnothing$ σύνολο

(α) Μία μη κενή οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του S λέγεται ότι είναι ένα <u>φίλτρο</u> στο S αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

(F_1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(F_2) $F_1, F_2 \in F \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in F$

(F_3) Αν $F \subseteq G \subseteq S$ και $F \in \mathcal{F} \Rightarrow G \in \mathcal{F}$

(β) Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του S λέγεται ότι είναι μια <u>βάση φίλτρου</u> αν ισχύουν :

(B_1) $\emptyset \notin \mathcal{B}$

(B_2) Αν $A, B \in \mathcal{B}$ τότε υπάρχει $C \in \mathcal{B}$ ώστε $C \subseteq A \cap B$.

Παρατηρήσεις 1.25

1) Αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση φίλτρου στο S τότε η οικογένεια $F(\mathcal{B})$ όλων των υπερσυνόλων των μελών της $\mathcal{B}$ είναι ένα φίλτρο (που ονομάζεται το φίλτρο που παράγεται από την $\mathcal{B}$). Προφανώς κάθε φίλτρο είναι βάση φίλτρου.

2) Αν $\emptyset \neq C \subseteq S$, τότε το σύνολο $\mathcal{F}(C) = \{A \subseteq S : C \subseteq A\}$ είναι ένα φίλτρο στο S, το οποίο ονομάζεται το κύριο φίλτρο το παραγόμενο από το C. Ένα φίλτρο F λέγεται ελεύθερο (free) αν $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$. Το φίλτρο του Frechet πάνω σε ένα άπειρο σύνολο S είναι η οικογένεια όλων των συμπεπερασμένων υποσυνόλων του S (πρβλ. παραδ. 1.2 (5)). Παρατηρούμε ότι το φίλτρο του Frechet είναι ελεύθερο (και συνεπώς όχι κύριο) και περιέχεται σε κάθε ελεύθερο φίλτρο επί του S. (γιατί;).

3) Έστω (X , τ) τ.χ. και $x \in X$. Είναι τότε απλό να ελέγξουμε ότι το σύστημα των περιοχών N_x του x είναι ένα φίλτρο και ότι κάθε βάση περιοχών B_x του x είναι μια βάση φίλτρου (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

Ορισμός 1.26 .Έστω X σύνολο και τ_1, τ_2 τοπολογίες επί του X. Αν ισχύει ότι $\tau_1 \subseteq \tau_2$, τότε θα λέμε ότι η τοπολογία τ_2 είναι λεπτότερη (η μεγαλύτερη) της τ_1 και ότι η τ_1 είναι τραχύτερη (ή μικρότερη) της τ_2.

Πρόταση 1.27 .(Κριτήριο του Hausdorff). Έστω X σύνολο και τ_1, τ_2 τοπολογίες επί του X. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(α) Η τ_2 είναι λεπτότερη της τ_1(δηλαδή $\tau_1 \subseteq \tau_2$).

(β) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε περιοχή U του x στην τοπολογία τ_1 υπάρχει V περιοχή του x στην τ_2 ώστε $x \in V \subseteq U$.

<u>Απόδειξη</u> (α) $\Rightarrow$(β) Έστω U περιοχή του x στην τοπολογία τ_1 τότε υπάρχει $V \in \tau_1$ τέτοια ώστε $x \in V \subseteq U$ (π.χ. $V = \operatorname{int}_{\tau_1} U$). Επομένως $V \in \tau_2$ και τότε το V είναι (ανοικτή) περιοχή του x στην τοπολογία τ_2.

(β) $\Rightarrow$(α) Έστω $U \in \tau_1$, θα αποδείξουμε ότι $U \in \tau_2$. Έστω $x \in U$, από την υπόθεσή μας υπάρχει περιοχή V του x στην τ_2 ώστε $x \in V \subseteq U$. Έπεται ότι $x \in \operatorname{int}_{\tau_2} V \subseteq V \subseteq U$. Αυτό σημαίνει ότι το U μπορεί να εκφρασθεί ως ένωση τ_2 - ανοικτών συνόλων και συνεπώς είναι μέλος της τ_2.

<u>Παρατήρηση</u> 1.28 . Στην περίπτωση που έχουμε δύο μετρικές d_1, d_2 στο σύνολο X και τις αντίστοιχες μετρικές τοπολογίες τ_{d_1} και τ_{d_2} το κριτήριο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής $\tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2} \Leftrightarrow$ για κάθε $x \in X$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B^2(x,\delta) \subseteq B^1(x,\varepsilon)$, όπου $B^1(x,\varepsilon)$ είναι η ανοικτή σφαίρα ως προς d_1 και $B^2(x,\delta)$ η ανοικτή σφαίρα ως προς d_2.

Ασκήσεις

1)Έστω $X \neq \emptyset$ και τ =η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X

Αποδείξτε ότι

(α) Αν d τυχούσα μετρική στο X τότε $\tau \subseteq \tau_d$.

(β) Αν X πεπερασμένο τότε $\tau = P(X)$= η διακριτή τοπολογία

(γ) Αν X άπειρο τότε ο (X , τ) δεν είναι μετρικοποιήσιμος .

2) Αποδείξτε ότι το καθένα από τα ακόλουθα υποσύνολα του $P(N)$ είναι μια τοπολογία στο N.

(α) τ αποτελείται από το $\varnothing$ το N και κάθε αρχικό διάστημα $I_n = \{1,2,...,n\}, n \geq 1$ (initial segment topology).

(β) τ αποτελείται από το $\varnothing$ το N και κάθε τελικό διάστημα $T_n = \{n, n+1,...,\}, n \geq 1$ (final segment topology)

3) Βρείτε όλες τις πιθανές τοπολογίες πάνω σε ένα σύνολο X με $|X| = 2$ ή $|X| = 3$.

[Υπόδειξη : Υπάρχουν 4 τοπολογίες στο X αν $|X| = 2$ και 29 τοπολογίες αν $|X| = 3$.]

4) Έστω X άπειρο σύνολο και τ μια τοπολογία στο X ώστε το μόνο άπειρο ανοικτό υποσύνολο του X είναι ο ίδιος ο X. Είναι τότε η τ η τετριμμένη τοπολογία στο X ;

5) Έστω X άπειρο σύνολο και τ τοπολογία στο X ώστε κάθε άπειρο υποσύνολο του X είναι μέλος της τ. Αποδείξτε ότι τ είναι η διακριτή τοπολογία στο X.

6) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$.

Αποδείξτε ότι (α) $\overline{B(x,\varepsilon)} = B(x,\varepsilon)$

(β) $\operatorname{int}\left(B(x,\varepsilon)\right) = B(x,\varepsilon)$ και (γ) $Bd\left(B(x,\varepsilon)\right) = Bd\left(B(x,\varepsilon)\right) = S(x,\varepsilon)$. (Όπου $B(x,\varepsilon)$, $B(x,\varepsilon)$ είναι η ανοικτή και κλειστή σφαίρα κέντρου x ακτίνας $\varepsilon > 0$ και $S(x,\varepsilon) = \{y \in X : \|x - y\| = \varepsilon\}$.)

7) Βρείτε τα $\operatorname{int}(A), \overline{A}$ και $Bd(A)$ για τα ακόλουθα υποσύνολα του Ευκλείδειου επιπέδου:

(α) $\{(x,y) \in R^2 : 0 < y < x+1, x > -1\}$

(β) $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$

(γ) $\{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$, όπου $(x_n) \subseteq R^2, x \in R^2, x_n \to x$.

(δ) $\{(x,y) \in R^2, \text{ είτε ο } x, \text{ είτε ο } y \text{ είναι άρρητος}\}$.

8) Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου A αν:

(α) $A=\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1} : n\in N\right\}\subseteq R$.

(β) $A=\left\{\left(\cos\dfrac{2\pi}{n},\sin\dfrac{2\pi}{n}\right) : n\in N\right\}\subseteq R^2$.

(γ) $A=\left\{(x,y)\in R^2 : \left(x^2+y^2\right)\left(y^2-x^2+1\right)\leq 0\right\}\subseteq R^2$.

Όπου το R και R^2 θεωρούνται με την συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία.

9) Έστω S άπειρο σύνολο. Αποδείξτε ότι:

(α) Το φίλτρο του Frechet F (= των συμπεπερασμένων υποσυνόλων του S) είναι πράγματι φίλτρο και μάλιστα ελεύθερο.

(β) Κάθε ελεύθερο φίλτρο στο S περιέχει το φίλτρο του Frechet.

10) Έστω X και Y σύνολα $f:X\to Y$ συνάρτηση και B βάση φίλτρου στο X τότε η οικογένεια $f(B)$ είναι μια βάση φίλτρου στο Y. (Έπεται ιδιαίτερα ότι αν F φίλτρο στο X τότε $f(F)$ είναι βάση φίλτρου στο Y όπου $f(F)=\{f(E) : E\in F\}$.)

11) Αν $A\subseteq N$, λέμε ότι το A έχει <u>πυκνότητα</u> αν το όριο, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|A\cap\{1,2,...,n\}|}{n}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, (Όπου με $|X|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου X .) αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του N με πυκνότητα ίση με 1 είναι ένα (ελεύθερο) φίλτρο στο N .

12) Έστω $S\neq\varnothing$ σύνολο και U ένα φίλτρο στο S. Το U λέγεται ότι είναι ένα <u>υπερφίλτρο</u> στο S, αν δεν υπάρχει φίλτρο στο S που να περιέχει γνήσια το U (δηλαδή F φίλτρο και $U\subseteq F\Rightarrow U=F$). Αποδείξτε ότι

(α) Αν $x\in S$ τότε το κύριο φίλτρο $F(\{x\})=\{A\subseteq S : x\in A\}$ είναι ένα υπερφίλτρο.

(β) Αν S πεπερασμένο τότε κάθε υπερφίλτρο στο S είναι της μορφής $F(\{x\})$, για κάποιο $x\in S$.

(γ) Κάθε φίλτρο F στο S περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο.

[Υπόδειξη Έστω F_0 η κλάση όλων των φίλτρων του S που περιέχει το F . Τότε F_0 είναι μερικά διατεταγμένο με την σχέση $F_1 \le F_2 \Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2$. Εφαρμόστε το Λήμμα του Zorn στο $(F_0, \le)$.]

(δ) Έστω F ένα φίλτρο στο S . Τότε το F είναι ένα υπερφίλτρο $\Leftrightarrow$ για κάθε $A \subseteq S$ είτε $A \in F$ ή $S \setminus A \in F$.

(ε) Αν F είναι ένα ελεύθερο φίλτρο στο (άπειρο) σύνολο S και F_1 είναι φίλτρο ώστε $F \subseteq F_1$ τότε και το F_1 είναι ελεύθερο. Έπεται ιδιαίτερα (χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό (γ)) ότι ελεύθερα υπερφίλτρα υπάρχουν στο S .

13 Χρησιμοποιώντας επαγωγή αποδείξτε ότι, αν το πεπερασμένο σύνολο X έχει n στοιχεία, τότε υπάρχουν τουλάχιστον $(n-1)!$ διαφορετικές τοπολογίες επί του X .

[Υπόδειξη: Έστω $X = \{x_1, ..., x_n\}$ και $Y = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$. Αν τ είναι μια τοπολογία στο X , θεωρούμε τυχόν $i \le n$ και ορίζουμε μια τοπολογία τ_i στο Y ως ακολούθως: Για κάθε $U \in \tau$ με $x_i \in U$, θέτουμε $U_i = (U \setminus \{x_i\}) \cup \{x_{n+1}\}$. Η τ_i αποτελείται από όλα τα U_i μαζί με τα σύνολα $Y \setminus \{x_i\}$ και Y .]