4 Διαχωριστικά αξιώματα

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε τα λεγόμενα διαχωριστικά αξιώματα, και εξετάζουμε τις βασικές ιδιότητές τους. Ένα από αυτά το έχουμε ήδη εισαγάγει, δηλαδή το αξίωμα Hausdorff (ορισμός 3.9). Τα αξιώματα αυτά αφορούν διάφορες συνθήκες διαχωρισμού κατάλληλων συνόλων , κυρίως με την χρήση ανοικτών συνόλων.

4.1 Χώροι Hausdorff (T_2), κανονικοί (T_3) και φυσιολογικοί (T_4)

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τ.χ. X λέγεται Hausdorff ή T_2, αν για κάθε ζεύγος x, y διαφορετικών σημείων του X, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V ώστε $x \in U$ και $y \in V$.

Ορισμός 4.1 . Έστω X τ.χ. Hausdorff.

(α) Ο χώρος X καλείται T_3 ή κανονικός (regular) , αν για κάθε $x \in \mathrm{X}$ και κάθε κλειστό $F \subseteq \mathrm{X}$ με $x \notin F$ υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V ώστε $x \in U$ και $F \subseteq V$.

(β) Ο χώρος X καλείται T_4 ή φυσιολογικός (normal), αν για κάθε ζεύγος κλειστών ξένων υποσυνόλων F_1 και F_2 του X, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V ώστε $F_1 \subseteq U$ και $F_2 \subseteq V$.

Παρατήρηση 4.2 Είναι σαφές ότι, $\mathrm{T}_4 \Rightarrow \mathrm{T}_3 \Rightarrow \mathrm{T}_2$. Λίγο αργότερα θα δώσουμε αντιπαραδείγματα με τα οποία αποδεικνύεται ότι οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύουν. Υπάρχουν δύο ασθενέστερα διαχωριστικά αξιώματα: T_0- για κάθε ζεύγος διαχωριστικών σημείων, τουλάχιστον, τουλάχιστον ένα έχει μια περιοχή που δεν περιέχει το άλλο, και T_1: για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων, το καθένα από τα σημεία έχει μια περιοχή που δεν περιέχει το άλλο. Ο χώρος του Sierpinski είναι T_0 αλλά όχι T_1. Ένα άπειρο σύνολο X με την συμπεπερασμένη τοπολογία είναι T_1 αλλά δεν είναι T_2 .(Πρβλ. παράδειγμα 1.2, (4),(5) και παρατήρηση 3.10.)

Στις ασκήσεις θα δούμε ότι η συνθήκη T_2 στον ορισμό των κανονικών και φυσιολογικών χώρων μπορεί να αντικατασταθεί από την συνθήκη T_1.

<u>Πρόταση</u> 4.3. Έστω X τ.χ., τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) X είναι Hausdorff.

(β) Έστω $x \in \mathrm{X}$. Για κάθε $y \neq x$, υπάρχει περιοχή U του x ώστε $y \notin \overline{U}$.

(γ) Για κάθε $x \in \mathrm{X}$, $\bigcap \left\{ \overline{U} : U \text{ είναι περιοχή του } x \right\} = \{x\}$.

(δ) Η διαγώνιος $\Delta = \left\{ (x,x) : x \in \mathrm{X} \right\}$ είναι κλειστή τον $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$.

<u>Απόδειξη</u>. (α) $\Rightarrow$(β). Έστω $y \neq x$, υπάρχουν U και V ξένες ανοικτές περιοχές των x και y αντίστοιχα. Άρα $x \in U \subseteq \mathrm{X} \setminus V$ και επειδή $\mathrm{X} \setminus V$ κλειστό , έχουμε $x \in \overline{U} \subseteq \mathrm{X} \setminus V$, από όπου έπεται $y \notin \in \overline{U}$.

(β) $\Rightarrow$(γ). Έστω $y \neq x$, τότε υπάρχει W περιοχή του x ώστε $y \notin \overline{W}$, άρα $y \notin \bigcap \left\{ \overline{U} : U \text{ είναι περιοχή του } x \right\}$. Κατά συνέπεια η τομή αυτή περιέχει μόνο το x.

(γ) $\Rightarrow$(δ). Παρατηρούμε ότι, για U και V υποσύνολα του X ισχύει ότι: $U \bigcap V = \varnothing \Leftrightarrow$. $(U \times V) \bigcap \Delta = \varnothing$

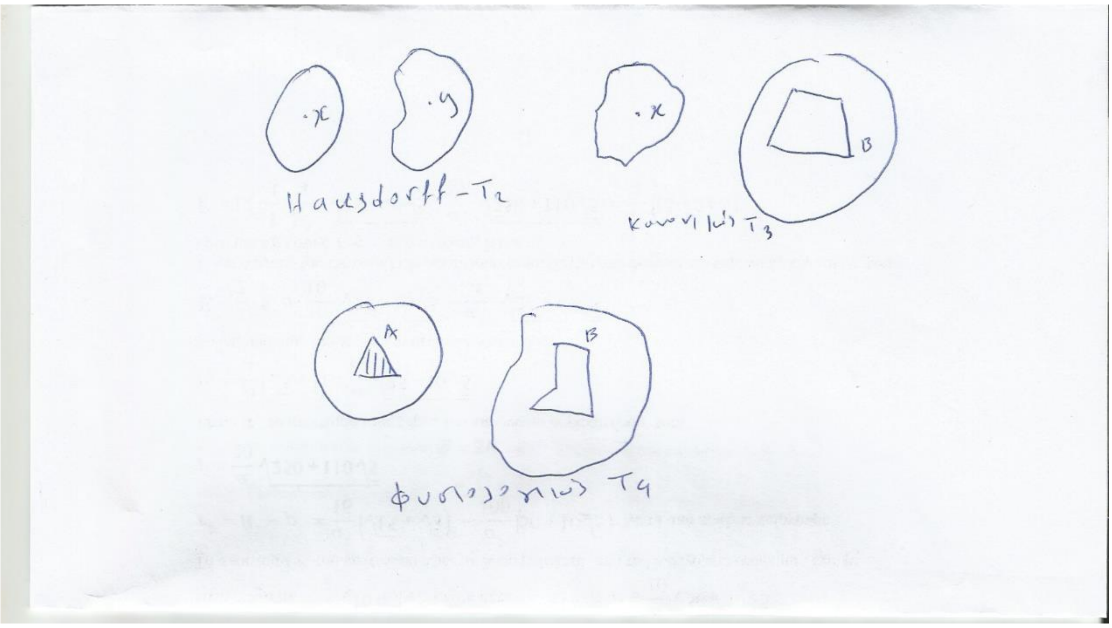
Πράγματι, $(U \times V) \bigcap \Delta \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathrm{X} : (x,x) \in U \times V \Leftrightarrow x \in U$ και $x \in V$ $\Leftrightarrow U \bigcap V \neq \varnothing$.

Αποδεικνύουμε τώρα την συνεπαγωγή (γ) $\Rightarrow$(δ). Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \setminus \Delta$ είναι ανοικτό στον $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. Έστω $(x,y) \notin \Delta$ τότε $x \neq y$ και από την υπόθεση $\{x\} = \bigcap \left\{ \overline{U} : U \text{ είναι περιοχή του } x \right\}$, άρα υπάρχει περιοχή U του x με $y \notin \overline{U}$. Επειδή $U \bigcap \left(\mathrm{X} \setminus \overline{U} \right) = \varnothing$ το σύνολο $U \bigcap \left(\mathrm{X} \setminus \overline{U} \right)$ είναι περιοχή του (x,y) η οποία περιέχεται στο $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \setminus \Delta$. Έτσι το σύνολο αυτό είναι ανοικτό στον $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ και άρα η διαγώνιος Δ είναι κλειστό στον $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$.

(δ) $\Rightarrow$(α). Έστω x και y διαφορετικά σημεία του X. Τότε το $(x,y) \notin \Delta \Leftrightarrow (x,y)$ ανήκει στο ανοικτό $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \setminus \Delta$. Έπεται ότι το σημείο (x,y) έχει μια ανοικτή βασική περιοχή $U \times V$ στον χώρο $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ η οποία δεν τέμνει την Δ. Δηλαδή $x \in U, y \in V$ και $U \bigcap V = \varnothing$.

<u>Παρατήρηση</u> 4.5 Έστω X χώρος Hausdorff τότε από τον ισχυρισμό (γ), της προηγούμενης πρότασης έπεται ότι τα μονοσύνολα και άρα τα πεπερασμένα υποσύνολα του X είναι κλειστά. Το ίδιο αποτέλεσμα έπεται και από το γεγονός (που ήδη έχουμε παρατηρήσει) ότι τα πεπερασμένα υποσύνολα κάθε χώρου είναι συμπαγή και επειδή ο χώρος είναι Hausdorff είναι, σύμφωνα με την πρόταση 3.12, αναγκαία κλειστά

Τα τρία αξιώματα διαχωρισμού απεικονίζονται στο σχήμα:



Οι κανονικοί και φυσιολογικοί χώροι χαρακτηρίζονται με τον ακόλουθο τρόπο.

<u>Πρόταση</u> 4.6 Έστω X χώρος Hausdorff.

(α) Ο X είναι κανονικός αν και μόνο αν για κάθε $x \in \mathrm{X}$ και για κάθε περιοχή U του x, υπάρχει περιοχή V του x ώστε $\overline{V} \subseteq U$ (αν και μόνο αν κάθε $x \in \mathrm{X}$ έχει μια βάση περιοχών από κλειστά σύνολα).

(β) Ο X είναι φυσιολογικός αν και μόνο αν για κάθε κλειστό $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ και για κάθε ανοικτό U με $\mathrm{A} \subseteq U$, υπάρχει ανοικτό V ώστε, $\mathrm{A} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

<u>Απόδειξη.</u> (α) Υποθέτουμε ότι ο X είναι κανονικός. Έστω $x \in \mathrm{X}$ και U ανοικτή περιοχή του x. Θέτουμε $\mathrm{B} = \mathrm{X} \setminus U$, τότε το B είναι κλειστό σύνολο. Από την υπόθεση, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα V και W με $x \in V$ και $\mathrm{B} \subseteq W$. Το σύνολο $\overline{V}$ είναι ξένο προς το B, αφού αν $y \in \mathrm{B}$, το σύνολο W είναι μια περιοχή του y ξένη προς το V. Επομένως, $\overline{V} \subseteq U$.

Αποδεικνύουμε το αντίστροφο. Έστω $x \in \mathrm{X}$ και B κλειστό σύνολο ώστε $x \notin \mathrm{B}$. Θέτομε $U = \mathrm{X} \setminus \mathrm{B}$. Από την υπόθεση, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x ώστε $\overline{V} \subseteq U$. Τα ανοικτά σύνολα V και $\mathrm{X} \setminus \overline{V}$ είναι ξένα και περιέχουν το σημείο x και το σύνολο B αντίστοιχα. Επομένως ο X είναι κανονικός.

Πρέπει τώρα να είναι σαφές ότι ο ισχυρισμός (α) ισοδυναμεί με το γεγονός ότι κάθε $x \in \mathrm{X}$ έχει μια βάση περιοχών B_x αποτελούμενη από κλειστά σύνολα.

(β) Αυτή η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη της προηγουμένης. Αρκεί να αντικαταστήσουμε το σημείο x με το σύνολο A

……………………………….

<u>Παρατήρηση</u> 4.7. Στον χώρο $R^2 = R \times R$, μπορούμε να ταυτίσουμε μια ευθεία παράλληλη με τον άξονα των x με την πραγματική ευθεία R. Αυτή η ιδέα επεκτείνεται και σε κάθε καρτεσιανό γινόμενο τοπολογικών χώρων. Έστω $\{x_i, i \in \mathrm{I}\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, $x^0 = \left(x_i^0\right)_{i \in \mathrm{I}}$, δεδομένο σημείο του $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ και a δεδομένη συντεταγμένη ($a \in \mathrm{I}$). Θέτουμε

$$S\left(x^0; a\right) = \mathrm{X}_a \times \prod_{i \neq a} \left\{x_i^0\right\} \subseteq \mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$$

Το σύνολο $S\left(x^0; a\right)$ ονομάζεται η «φέτα» (slice) η οποία διέρχεται από το x^0 και είναι παράλληλη με τον X_a.

Για παράδειγμα στον $R^3 = R \times R \times R$, με $x^0 = (a, \beta, \gamma)$, η «φέτα» $S\left(x^0; 2\right) = \{(a, y, \gamma) : y \in R\}$, είναι η ευθεία η παράλληλη με τον άξονα των y η οποία διέρχεται από το σημείο x^0

Αποδεικνύεται εύκολα το ακόλουθο αποτέλεσμα η απόδειξη του οποίου αφήνεται ως άσκηση.

Η απεικόνιση, $\varphi_a : \mathrm{X}_a \to \mathrm{X}$ η οποία ορίζεται ως εξής, $\varphi_a(y) = \begin{cases} x_i^0, i \neq a \\ y, i = a \end{cases}$, είναι ένας ομοιομορφισμός του χώρου X_a με τον υπόχωρο $S\left(x^0; a\right)$ του X. Δηλαδή κάθε παράγοντας X_a ενός καρτεσιανού γινομένου τοπολογικών χώρων $X = \prod_{i \in I} X_i$, «εμφυτεύεται» ομοιομορφικά στον χώρο X.

……………………………………………..

<u>Θεώρημα</u> 4.8 .(α) Ένας υπόχωρος ενός χώρου Hausdorff είναι Hausdorff. Ένα γινόμενο τοπολογικών χώρων είναι Hausdorff αν και μόνο αν κάθε παράγων του γινομένου είναι Hausdorff.

(β) Ένας υπόχωρος ενός κανονικού χώρου είναι κανονικός. Ένα γινόμενο τοπολογικών χώρων είναι κανονικός χώρος αν και μόνο αν κάθε παράγων του γινομένου είναι κανονικός χώρος.

<u>Απόδειξη</u> (α) Έστω X χώρος Hausdorff και Y υπόχωρος του X. Έστω δύο διαφορετικά σημεία x και y του Y. Αν U και V είναι ξένες περιοχές του x και y αντίστοιχα τότε $U \cap Y$ και $V \cap Y$ είναι ξένες περιοχές των x και y στον υπόχωρο Y του X.

Έστω τώρα $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια χώρων Hausdorff.

Θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία $x = (x_i)$ και $y = (y_i)$ του γινομένου $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Επειδή $x \neq y$, υπάρχει συντεταγμένη $a \in I$ έτσι ώστε $x_a \neq y_a$. Επιλέγουμε ξένα ανοικτά σύνολα U και V στον χώρο X_a ώστε $x_a \in U$ και $y_a \in V$. Τότε τα σύνολα $\pi_a^{-1}(U)$ και $\pi_a^{-1}(V)$ είναι ξένα ανοικτά (υποβασικά) υποσύνολα του X τα οποία περιέχουν τα σημεία x και y αντίστοιχα.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το γινόμενο $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ είναι χώρος Hausdorff. Επειδή κάθε παράγων X_ι του γινομένου είναι , σύμφωνα με την παρατήρηση 4.7 ομοιομορφικός με υπόχωρο του X έπεται, από το πρώτο μέρος της απόδειξής μας, ότι ο X_ι είναι χώρος Hausdorff.

(β) Έστω Y ένας υπόχωρος ενός κανονικού χώρου X. Επειδή ο X είναι Hausdorff (ως κανονικός) και ο Y είναι Hausdorff.

Έστω $x \in Y$ και B κλειστό στον Y ώστε $x \notin B$. Τότε $\overline{B} \cap Y = B$, όπου $\overline{B}$ είναι η κλειστότητα του B στον X (πρβλ. πρόταση 1.39 (γ)). Επομένως $x \notin \overline{B}$, έτσι από την κανονικότητα του X, μπορούμε να επιλέξουμε ξένα ανοικτά σύνολα στον X ώστε $x \in U$ και

$\overline{B} \subseteq V$. Τότε $U \bigcap Y$ και $V \bigcap Y$ είναι ξένα ανοικτά σύνολα στον Y που περιέχουν τα x και B αντίστοιχα.

Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια κανονικών χώρων. Θέτουμε $X = \prod_{i \in I} X_i$. Από τον ισχυρισμό (α) ο X είναι Hausdorff. Θα αποδείξουμε ότι ο X είναι κανονικός με την βοήθεια της πρότασης 4.6 (α). Έστω $x = (x_i)$ ένα σημείο του x και U μια περιοχή του x στον χώρο X. Επιλέγουμε ένα βασικό ανοικτό σύνολο $W = \prod_{i \in F} U_i \times \prod_{i \notin F} X_i$, ($F \subseteq I$, πεπερασμένο) του X ώστε $x \in W \subseteq U$.

Για κάθε $i \in F$, επιλέγουμε ανοικτή περιοχή V_i του x_i στον X_i , ώστε $\overline{V_i} \subseteq U_i$. Αν συμβαίνει ότι, $i \notin F$ θέτουμε $V_i = X_i$. Τότε το σύνολο $V = \prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \notin F} X_i$ είναι μια περιοχή του x στον χώρο X . Από την άσκηση 1 των παραγράφων 2.1 και 2.2, έχουμε ότι, $\overline{V} = \prod_{i \in F} \overline{V}_i \times \prod_{i \notin F} X_i$. Έπεται ότι, $\overline{V} \subseteq W \subseteq U$, και έτσι ο X είναι κανονικός.

Αν τώρα το γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ είναι κανονικός χώρος τότε, το γεγονός ότι αναγκαία κάθε παράγων X_i είναι κανονικός, έπεται όπως και (πριν στον ισχυρισμό (α)) για ένα γινόμενο χώρων Hausdorff.

<u>Παραδείγματα</u> 4.9 . 1) Κάθε κανονικός χώρος είναι Hausdorff, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Θεωρούμε το σύνολο R των πραγματικών αριθμών με εκείνη την τοπολογία τ η οποία έχει ως υποβάση τα ανοικτά διαστήματα και το σύνολο των ρητών αριθμών. Επειδή η τ είναι λεπτότερη της Ευκλείδειας τοπολογίας, ο χώρος (R, τ) είναι Hausdorff. Ο (R, τ) δεν είναι κανονικός χώρος. Πράγματι το σύνολο των αρρήτων $I = R \setminus Q$ είναι κλειστό , αλλά για το 1 και το I δεν υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V με $x \in U$ και $I \subseteq V$ (γιατί ;).

2) Κάθε φυσιολογικός χώρος είναι κανονικός, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι ο χώρος R_S (= η ευθεία Sorgenfrey, παράδειγμα 1.33 (2)) είναι φυσιολογικός επομένως τόσο ο R_S όσο και ο $R_S \times R_S$ είναι κανονικοί χώροι. Εντούτοις ο $R_S \times R_S$, δεν είναι φυσιολογικός.

Αυτό το παράδειγμα εξυπηρετεί δύο σκοπούς. Μας δείχνει ότι ένας κανονικός χώρος δηλαδή ο $R_S \times R_S$ δεν είναι φυσιολογικός και επίσης δείχνει ότι το γινόμενο δύο φυσιολογικών χώρων δεν είναι απαραίτητα φυσιολογικός.

Θα αποδείξουμε ότι ο R_S είναι φυσιολογικός. Για την μη φυσιολογικότητα του $R_S \times R_S$ παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία.

Έστω A, B ξένα κλειστά υποσύνολα του R_S. Για κάθε σημείο $a \in \mathrm{A}$ επιλέγουμε ένα βασικό ανοικτό $[a, x_a)$ του R_S το οποίο δεν τέμνει το B, ανάλογα για κάθε σημείο $b \in \mathrm{B}$ επιλέγουμε ένα βασικό ανοικτό $[b, x_b)$ το οποίο δεν τέμνει το A. Τα ανοικτά σύνολα

$$U = \bigcup_{a \in \mathrm{A}} [a, x_a) \text{ και } V = \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$$

είναι ξένα (γιατί;) και περιέχουν τα A και B αντίστοιχα. Έτσι ο R_S είναι φυσιολογικός.

3)Υπάρχουν παραδείγματα T_4 χώρων με υπόχωρο ο οποίος δεν είναι T_4. (Όπως θα διαπιστώσουμε στην τρίτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου ο $R_S \times R_S$ είναι ομοιομορφικός με υπόχωρο φυσιολογικού χώρου) . Βέβαια κάθε κλειστός υπόχωρος φυσιολογικού χώρου είναι φυσιολογικός. (Άσκηση)

……………………………………………….

Τα επόμενα τρία θεωρήματα μας δείχνουν ότι κάτω από κατάλληλες υποθέσεις η φυσιολογικότητα ενός χώρου διασφαλίζεται. . Συγχρόνως μας «προμηθεύουν» με σημαντικές για τις εφαρμογές κλάσεις φυσιολογικών χώρων.

<u>Θεώρημα</u> 4.10 . Κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος είναι φυσιολογικός.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω X ένας μετρικοποιήσιμος χώρος και d μια μετρική που επάγει την τοπολογία του X. Έστω A και B ξένα κλειστά υποσύνολα του X. Για κάθε $a \in \mathrm{A}$, επιλέγουμε $\varepsilon_a > 0$ έτσι ώστε η ανοικτή σφαίρα $B(a, \varepsilon_a)$ δεν τέμνει το B. Ανάλογα , για κάθε $b \in \mathrm{B}$, επιλέγουμε $\varepsilon_b > 0$ έτσι ώστε η σφαίρα $B(b, \varepsilon_b)$ δεν τέμνει το A. Θέτουμε,

$$U = \bigcup_{a \in \mathrm{A}} B\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right) \text{ και } V = \bigcup_{b \in \mathrm{B}} B\left(b, \frac{\varepsilon_b}{2}\right).$$

Τότε τα U και V είναι ανοικτά σύνολα που περιέχουν τα A και B αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι είναι ξένα.

Πράγματι, αν $z \in U \bigcap V$, τότε

$$z \in B\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right) \bigcap B\left(b, \frac{\varepsilon_b}{2}\right),$$

για κάποια σημεία $a \in \mathrm{A}$ και $b \in \mathrm{B}$. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $d(a,b) < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2}$. Αν $\varepsilon_a \le \varepsilon_b$ τότε $d(a,b) < \varepsilon_b$, άρα $a \in B(b, \varepsilon_b)$. Αν $\varepsilon_b \le \varepsilon_a$, τότε $d(a,b) < \varepsilon_a$, και τότε $b \in B(a, \varepsilon_a)$. Έτσι και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, συνεπώς $U \bigcap V = \varnothing$.

<u>Παρατήρηση </u>4.11 Μια άλλη απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος χρησιμοποιεί ένα γνωστό αποτέλεσμα για μετρικούς χώρους. Αν (X, d) είναι μετρικός χώρος και $\varnothing \ne \mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ τότε η απεικόνιση $\varphi : x \in \mathrm{X} \to \varphi(x) = d(x, \mathrm{A})$ (=$\inf\{d(x,y) : y \in \mathrm{A}\}$) είναι Lipschitz και άρα συνεχής.

Έστω λοιπόν A και B ξένα (μη κενά) κλειστά υποσύνολα του X. Θέτουμε

$$f(x) = \frac{d(x, \mathrm{A})}{d(x, \mathrm{A}) + d(x, \mathrm{B})}, x \in \mathrm{X}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση η οποία είναι συνεχής, αφού προκύπτει με τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον είναι απλό να ελέγξουμε ότι, $\mathrm{A} = f^{-1}(\{0\})$ και $\mathrm{B} = f^{-1}(\{1\})$. Παρατηρούμε τώρα ότι τα ανοικτά σύνολα $U = f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right)$ και $V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$ περιέχουν τα A και B αντίστοιχα και επιπλέον είναι μεταξύ τους ξένα.

Έτσι ο ορισμός ικανοποιείται και ο μετρικός χώρος X είναι φυσιολογικός. Οι λεπτομέρειες της παραπάνω απόδειξης αφήνονται ως άσκηση.

……………………………………………………..

<u>Θεώρημα</u> 4.12. Κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff είναι φυσιολογικός.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω A και B ξένα κλειστά υποσύνολα του X τότε τα A και B είναι συμπαγή.

Έτσι η απόδειξη ότι ο X είναι φυσιολογικός έπεται προφανώς από το ακόλουθο αποτέλεσμα (πρβλ. και την άσκηση 5 (α)του κεφαλαίου 3.): Αν A και B είναι ξένα και συμπαγή υποσύνολα ενός χώρου Hausdorff X τότε υπάρχουν U και V ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $\mathrm{A} \subseteq U$, $\mathrm{B} \subseteq V$ και $U \bigcap V = \varnothing$.

Πράγματι , για κάθε $a \in \mathrm{A}$ μπορούμε να επιλέξουμε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.11 , ξένα ανοικτά σύνολα U_a και V_a ώστε $a \in U_a$ και $\mathrm{B} \subseteq V_a$. Η οικογένεια $\{U_a : a \in \mathrm{A}\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς A, συνεπώς υπάρχουν $a_1, ..., a_n \in \mathrm{A}$ (όπου $n \in N$), ώστε $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{a_k}$. Εύκολα έπεται τότε ότι τα ανοικτά σύνολα

$$U = U_{a_1} \bigcup ... \bigcup U_{a_n} \text{ και } V = V_{a_1} \bigcap ... \bigcap V_{a_n}$$

είναι ξένα και περιέχουν τα A και B αντίστοιχα.

<u>Θεώρημα</u> 4.13 Κάθε κανονικός και 2^{ος} αριθμήσιμος χώρος είναι φυσιολογικός.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω X ένας κανονικός χώρος με μια αριθμήσιμη βάση B για την τοπολογία του. Έστω A και B κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Κάθε σημείο $x \in \mathrm{A}$ έχει μια περιοχή U_x ώστε $U_x \bigcap \mathrm{B} = \varnothing$. Από την πρόταση 4.6 (α) μπορούμε να επιλέξουμε μια περιοχή V_x του x ώστε $\overline{V_x} \subseteq U_x$. Επειδή η B είναι βάση για την τοπολογία του X, η V_x μπορεί να επιλεγεί ώστε να ανήκει στην B. Επιλέγοντας ένα τέτοιο βασικό ανοικτό σύνολο για κάθε $x \in \mathrm{A}$ έχουμε κατασκευάσει ένα αριθμήσιμο κάλυμμα του συνόλου A από ανοικτά σύνολα των οποίων οι κλειστότητες τέμνουν το B. Ας συμβολίσουμε αυτό το ανοικτό κάλυμμα με $\{U_n : n \in N\}$, ($\overline{U_n} \bigcap \mathrm{B} = \varnothing,\ n \geq 1$).

Ανάλογα , κατασκευάζουμε ένα ανοικτό κάλυμμα $\{V_n : n \in N\}$ του B, έτσι ώστε $\overline{V_n} \bigcap \mathrm{A} = \varnothing,\ n \geq 1$.

Τα σύνολα $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$ και $V=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$ είναι ανοικτά και περιέχουν τα A και B αντίστοιχα, όμως δεν είναι κατ' ανάγκη ξένα. Για να επιτύχουμε δύο ξένες ανοικτές περιοχές των A και B αντίστοιχα, εκλεπτύνουμε τα μέλη των ανωτέρω καλυμμάτων με τον ακόλουθο τρόπο.

Για κάθε $n\in N$, θέτουμε

$$U_n^{'}=U_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n}\overline{V}_k \text{ και } V_n^{'}=V_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n}\overline{U_k}.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε $U_n^{'}$ είναι ανοικτό ως διαφορά ενός ανοικτού συνόλου U_n και ενός κλειστού συνόλου $\bigcup_{k=1}^{n}\overline{V}_k$. Ανάλογα κάθε $V_n^{'}$ είναι ανοικτό σύνολο. Η οικογένεια $\{U_n^{'}:n\in N\}$ καλύπτει το A, επειδή κάθε $x\in\mathrm{A}$ ανήκει σε κάποιο U_n και βέβαια το x δεν ανήκει σε κανένα από τα $\overline{V}_k$, $k\in N$.

Ανάλογα, έχουμε ότι η οικογένεια $\{V_n^{'}:n\in N\}$ καλύπτει το B. Τελικά αποδεικνύουμε ότι τα ανοικτά σύνολα

$$U'=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n^{'} \text{ και } V'=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n^{'}$$

είναι ξένα. Πράγματι , αν $x\in U'\bigcap V'$, τότε $x\in U_n^{'}\bigcap V_m^{'}$ για κάποιους $m,n\in N$. Ας υποθέσουμε ότι $n\leq m$. Έπεται από τον ορισμό του συνόλου $U_n^{'}$ ότι $x\in U_n$, και επειδή $n\leq m$ έπεται από τον ορισμό του $V_m^{'}$ ότι $x\notin\overline{U_n^{'}}$. Μια ανάλογη αντίφαση προκύπτει αν υποθέσουμε ότι $m\leq n$.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

…………………………………………………..

Σημείωση 4.14. Στην πραγματικότητα ισχύει ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα: Κάθε κανονικός και 2[ος] αριθμήσιμος χώρος είναι μετρικοποιήσιμος (και άρα από το θεώρημα 4.10 φυσιολογικός). Το αποτέλεσμα αυτό θα αποδειχθεί στην επόμενη παράγραφο με την βοήθεια του θεμελιώδους Λήμματος του Urysohn και αυτού τούτου του θεωρήματος 4.13.

<u>Ορισμός</u> 4.15 . Ένας χώρος X λέγεται <u>χώρος Lindelof</u> αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.

Η έννοια του χώρου Lindelof δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα σε αυτές τις σημειώσεις και οι περισσότερες από τις ιδιότητές τους θα περιγραφούν στις ασκήσεις. Παρόλα αυτά παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(α) Κάθε συμπαγής χώρος είναι Lindelof (προφανές).

(β) Κάθε 2^{ος} αριθμήσιμος χώρος είναι Lindelof και

(γ) Κάθε κλειστός υπόχωρος χώρου Lindelof είναι χώρος Lindelof . (οι ιδιότητες (β) και (γ) αποδεικνύονται εύκολα.)

Επίσης σημειώνουμε ότι, ουσιαστικά με την ίδια απόδειξη με αυτήν του θεωρήματος 4.13

(ελέγξτε τις λεπτομέρειες), έχουμε το ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα

<u>Θεώρημα</u> 4.16. Κάθε κανονικός και Lindelof χώρος είναι φυσιολογικός.

<u>Παραδείγματα</u> 4.17. 1) Ο χώρος R_S είναι Lindelof, αλλά ο χώρος $R_S \times R_S$ δεν είναι

Καθώς ο χώρος R_S δεν είναι 2^{ος} αριθμήσιμος (πρβλ. παράδειγμα 1.33 (2)) το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι ένας χώρος Lindelof δεν είναι αναγκαία 2^{ος} αριθμήσιμος. Επί πλέον δείχνει ότι η ιδιότητα Lindelof δεν διατηρείται στο γινόμενο.

Έστω $\{V_i : i \in \mathrm{I}\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του R_S. Επειδή τα υποδιαστήματα της μορφής $[a,b), a,b \in R$ με $a<b$ είναι μια βάση για την τοπολογία τ_S του R_S, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε $V_i : i \in \mathrm{I}$ είναι ένα διάστημα της μορφής $[a_i, b_i), i \in \mathrm{I}$. Έστω $C = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} (a_i, b_i)$. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $R \setminus C$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $x \in R \setminus C$, αναγκαία τότε $x = a_{i(x)}$ για κάποιο $i(x) \in \mathrm{I}$. Επιλέγουμε ένα ρητό αριθμό q_x ο οποίος να ανήκει στο ανοικτό διάστημα $\left(a_{i(x)}, b_{i(x)}\right)$. Επειδή αυτό το διάστημα περιέχεται στο C, το ίδιο ισχύει και για το διάστημα (x, q_x). Έπεται τότε ότι η απεικόνιση $x \in R \setminus C \to q_x \in Q$,

είναι $1-1$ (Q = οι ρητοί), επομένως το $R\setminus C$ είναι αριθμήσιμο. (Πράγματι, αν $x, y \in R\setminus C$ ώστε $x < y$ τότε $q_x < q_y$, διαφορετικά το y θα ανήκει στο διάστημα (x, q_x),αντίφαση, εφόσον το y ανήκει στο $R\setminus C$ και το (x, q_x) περιέχεται στο C.)

Το σύνολο C είναι με την τοπολογία την επαγόμενη από την ευκλείδεια τοπολογία του R, 2[ος] αριθμήσιμος χώρος, επομένως θα υπάρχει μια αριθμήσιμη υποοικογένεια έστω $\left\{\left(a_{i_n}, b_{i_n}\right) : n \in N\right\}$ ώστε, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_{i_n}, b_{i_n}\right)$. Έπεται από τα παραπάνω ότι η οικογένεια

$$\left\{\left[a_{i(x)}, b_{i(x)}\right) : x \in R\setminus C\right\} \cup \left\{\left[a_{i_n}, b_{i_n}\right) : n \in N\right\}$$

είναι ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα του καλύμματος $\left\{V_i : i \in \mathrm{I}\right\}$. Έτσι ο χώρος R_S είναι Lindelof .

Αποδεικνύουμε τώρα ότι ο $R_S \times R_S$ δεν είναι Lindelof.

Μια βάση για την τοπολογία γινόμενο του χώρου $R_S \times R_S$, αποτελείται από τα ορθογώνια της μορφής $[a,b)\times[c,d)$ ($a,b,c,d \in R, a<b, c<d$). Παρατηρούμε ότι ο υπόχωρος

$$L = \left\{(x, -x) : x \in R\right\}$$

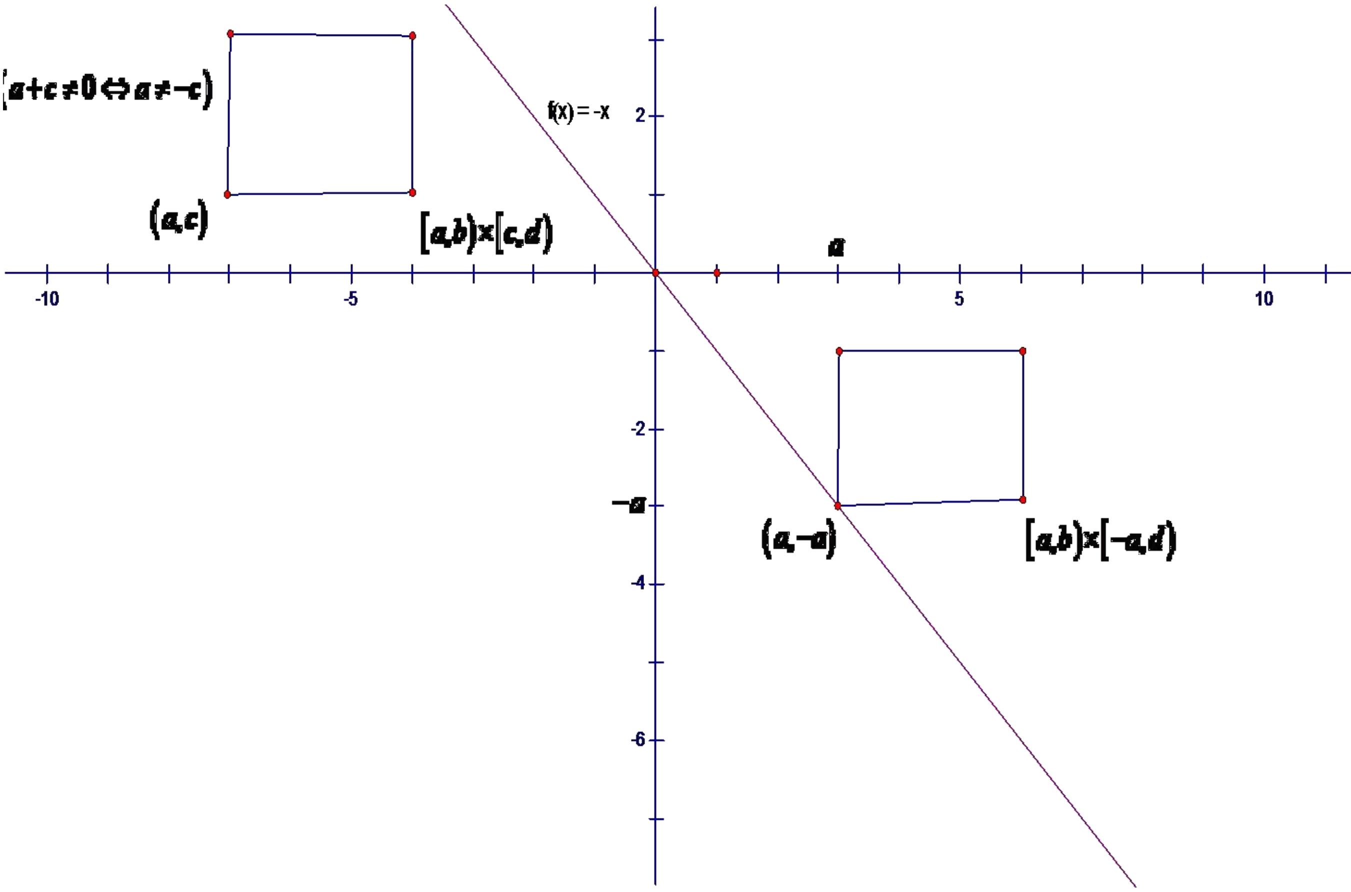
του $R_S \times R_S$ είναι κλειστό υποσύνολο αυτού του χώρου (γιατί;).

Καλύπτουμε τον $R_S \times R_S$ με το ανοικτό σύνολο $\left(R_S \times R_S\right)\setminus L$ και με όλα τα βασικά ανοικτά της μορφής

$$[a,b)\times[-a,d).$$

Το καθένα από τα ορθογώνια αυτής της μορφής τέμνει τον L σε ένα μόνο σημείο, το οποίο είναι το σημείο με συντεταγμένες a και $-a$. Επειδή ο L είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο, το κάλυμμα του χώρου $R_S \times R_S$ το οποίο ορίσαμε δεν έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα. Έτσι ο χώρος $R_S \times R_S$ δεν είναι Lindelof. (Δες και το σχήμα.)

Σημειώνουμε ότι ο χώρος $R_S \times R_S$ αναφέρεται συνήθως στην βιβλιογραφία ως το <u>επίπεδο Sorgenfrey</u>



2) Έστω Γ υπεραριθμήσιμο σύνολο. Ο κύβος $X=[0,1]^{\Gamma}$ είναι Lindelof, ως συμπαγής, αλλά σύμφωνα με το θεώρημα 2.17 (πρβλ. και την παρατήρηση 2.20 (4)) δεν είναι 1^{ος} αριθμήσιμος, επομένως ούτε και 2^{ος} αριθμήσιμος.