Στοχαστικές Ανελίξεις

7 Ιουνίου 2016

Περίληψη

Σημειώσεις από το μεταπτυχιακό μάθημα Στοχαστικές Ανελίξεις, Ε.Κ.Π.Α., Τμήμα Μαθηματικών, Εαρινό Εξάμηνο 2016.
Διδάσκων: Δημήτρης Χελιώτης

Μάθημα 1 (Δεσμευμένη Μέση Τιμή)

Ορισμός 1. Έστω X, Y διακριτές τ.μ. με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}(X = x, Y = y)$. Ορίζουμε

$$f_{X \,|\, Y}(x \,|\, y) = \mathbf{P}(X = x \,|\, Y = y) = \frac{\mathbf{P}(X = x, Y = y)}{\mathbf{P}(Y = y)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Η $f_{X \,|\, Y}(x \,|\, y)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας ως προς x (με παράμετρο y).
Αν οι X και Y είναι συνεχείς με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{X,Y}(x, y)$, ορίζεται αντίστοιχα η

$$f_{X \,|\, Y}(x \,|\, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

και είναι συνάρτηση πυκνότητας ως προς x (με παράμετρο y).

Ορισμός 2 (Δεσμευμένη μέση τιμή)**.** Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ και $Y : \Omega \to E$ διακριτές τ.μ. με $\mathbf{E}|X| < \infty$. Για κάθε $y \in Y$ με $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$, ορίζουμε

$$\mathbf{E}(X \,|\, Y = y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \, f_{X \,|\, Y}(x \,|\, y) = g(y) \tag{1}$$

και $\mathbf{E}(X \,|\, Y) = g(Y)$ και λέμε ότι η τ.μ. $g(Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι η **δεσμευμένη μέση τιμή της** X **δεδομένης της** Y και εξαρτάται από το $X(\omega)$.
Αντίστοιχα ορίζεται η δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς Y για την περίπτωση που οι X και Y είναι συνεχείς:

$$\mathbf{E}(X \,|\, Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_{X \,|\, Y}(x \,|\, y) \, dx$$

Παρατήρηση 1. Η σειρά που εμφανίζεται στην ισότητα (1) συγκλίνει απολύτως καθώς

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} \left|x \cdot f_{X \mid Y}(x \mid y)\right| = \frac{1}{f_Y(y)} \cdot \sum_{x\in\mathbb{R}} \left|x \cdot f_{X,Y}(x,y)\right| = \frac{1}{f_Y(y)} \cdot \mathbf{E}|X| < \infty.$$

Η τ.μ. $g(Y)$ ορίζεται με πιθανότητα 1 γιατί

$$\mathbf{P}(g(Y) \text{ δεν ορίζεται}) = \mathbf{P}(Y \in \underbrace{\{a \in E : f_Y(a) = 0\}}_{A}) = \sum_{a\in A} f_Y(a) = 0.$$

Παράδειγμα 1. Ρίχνουμε ένα ζάρι και έπειτα ένα (τίμιο) νόμισμα, τόσες φορές όσες υποδεικνύει η ένδειξη του ζαριού. Έστω οι τ.μ Y και X που αντιπροσωπεύουν την ένδειξη του ζαριού και το πλήθος των κεφαλών που φέρνουν οι ρίψεις του νομίσματος, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η τ.μ. $X \mid Y = y$ ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους Y και $1/2$ $\big($συνοπτικά $X \mid Y = y \sim \mathsf{Bin}(y, \frac{1}{2})\big)$, δηλαδή

$$f_{X \mid Y}(x \mid y) = \binom{y}{x} \cdot \frac{1}{2^y} \ , \qquad x = 0, 1, \ldots, y$$

και άρα

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = \frac{y}{2} \qquad \text{δηλαδή} \qquad \mathbf{E}(X \mid Y) = \frac{Y}{2}$$

Θεώρημα 1. *Έστω τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ και $Y : \Omega \to \mathcal{S}$. Η $g(Y) = \mathbf{E}(X \mid Y)$ είναι η μοναδική συνάρτηση της Y για την οποία ισχύει*

$$\mathbf{E}\big(Xh(Y)\big) = \mathbf{E}\big(g(Y)h(Y)\big), \quad \text{για κάθε } h : \mathcal{S} \to [0,1] \tag{2}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{E}\big(Xh(Y)\big) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \mid Y)h(Y)\big), \quad \text{για κάθε } h : \mathcal{S} \to [0,1] \tag{3}$$

Το θεώρημα εύκολα επεκτείνεται και για h φραγμένη (δηλαδή να υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $h : \mathcal{S} \to [-M, M]$).

Απόδειξη. Για την περίπτωση που οι X και Y είναι διακριτές (για συνεχείς η απόδειξη είναι αντίστοιχη αλλά με ολοκληρώματα αντί για σειρές) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(g(Y)h(Y)) &= \sum_{y\in\mathcal{S}} \Big(h(y) \cdot \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot f_{X \mid Y}(x \mid y)\Big) f_Y(y) = \\
&= \sum_{y\in\mathcal{S}} h(y) \cdot \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot f_{X,Y}(x,y) = \\
&= \sum_{\substack{y\in\mathcal{S}\\ x\in\mathbb{R}}} x \cdot h(y) \cdot f_{X,Y}(x,y) = \mathbf{E}(Xh(Y))
\end{aligned}$$

Έστω ότι για κάποια $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, διαφορετική από την g, ικανοποιείται η

$$\mathbf{E}(Xh(Y)) = \mathbf{E}(\phi(Y)h(Y)) \qquad (*)$$

Για $y_0 \in \mathcal{S}$ θεωρούμε την τ.μ. $h_{Y_0}(y) = 1_{Y=y_0}$. Τότε η $(*)$ γίνεται

$$\sum_{\substack{y\in\mathcal{S}\\x\in\mathbb{R}}} x \cdot h_{Y_0}(y) \cdot f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot h_{Y_0}(y) \cdot f_{X,Y}(x,y_0)$$

και ισοδύναμα

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot f_{X,Y}(x,y_0) = \phi(y_0) \cdot f_Y(y_0) \iff \phi(y_0) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot f_{X \,\middle|\, Y}(x \,|\, y_0) = g(y_0)$$

Το y_0 ήταν τυχόν άρα $\phi = g$, άτοπο. Συνεπώς η g είναι η μοναδική συνάρτηση του Y που ικανοποιεί την εξίσωση 2. $\square$

Θεώρημα 2. *Έστω οι τ.μ. $X, X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$, $Y : \Omega \to \mathcal{S}$, και $Z : \Omega \to \mathcal{S}'$ και έστω ότι $\mathbf{E}|X_1| + \mathbf{E}|X_1| + \mathbf{E}|X| < \infty$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\mathbf{E}(c_1X_1 + c_2X_2 \,|\, Y) = c_1\mathbf{E}(X_1 \,|\, Y) + c_2\mathbf{E}(X_2 \,|\, Y)$
2. $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \,|\, Y)\big) = \mathbf{E}X$
3. *Αν X, Y ανεξάρτητες τότε $\mathbf{E}(X \,|\, Y) = c$, όπου $c = \mathbf{E}X$*
4. *Αν $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ φραγμένη, τότε $\mathbf{E}(Xf(Y) \,|\, Y) = f(Y)\mathbf{E}(X \,|\, Y)$*
5. $|\mathbf{E}(X \,|\, Y)| \le \mathbf{E}(|X| \,|\, Y)$
6. $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \,|\, Y, Z) \,|\, Y\big) = \mathbf{E}(X \,|\, Y)$
7. *Αν $X_1 \le X_2$ τότε $\mathbf{E}(X_1 \,|\, Y) \le \mathbf{E}(X_2 \,|\, Y)$*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μία μία τις ιδιότητες:

1. Έστω $g_1(Y) = \mathbf{E}(X_1 \,|\, Y)$ και $g_2(Y) = \mathbf{E}(X_2 \,|\, Y)$. Η $c_1g_1(Y) + c_2g_2(Y)$ είναι συνάρτηση του Y και για $h : \mathcal{S} \to [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big((c_1g_1(Y) + c_2g_2(Y))h(Y)\big) &= c_1\mathbf{E}\big(g_1(Y)h(Y)\big) + c_2\mathbf{E}\big(g_2(Y)h(Y)\big) = \\ &= c_1\mathbf{E}\big(X_1(Y)h(Y)\big) + c_2\mathbf{E}\big(X_2(Y)h(Y)\big) = \\ &= \mathbf{E}\big((c_1X_1 + c_2X_2)h(Y)\big)\end{aligned}$$

2. Προκύπτει εύκολα από την $(*)$ θέτοντας $h = 1$.
3. Για οποιαδήποτε $h : \mathcal{S} \to [0,1]$ έχουμε

$$\mathbf{E}\big(Xh(Y)\big) = \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}(h(Y)) = c \cdot \mathbf{E}(h(Y)) = \mathbf{E}(c \cdot h(Y))$$

4. Για $h : \mathcal{S} \to [0,1]$ έχουμε

$$\mathbf{E}\big(f(Y) \cdot \mathbf{E}(X \,\big|\, Y) \cdot h(Y)\big) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \,\big|\, Y) \cdot f(Y) \cdot h(Y)\big) \stackrel{(3)}{=} \mathbf{E}\big(X \cdot f(Y) \cdot h(Y)\big)$$

5. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(X \,\big|\, Y)| &= |\mathbf{E}(X^+ - X^- \,\big|\, Y)| = |\mathbf{E}(X^+ \,\big|\, Y) - \mathbf{E}(X^- \,\big|\, Y)| \leq \\ &\leq \mathbf{E}(X^+ \,\big|\, Y) + \mathbf{E}(X^- \,\big|\, Y) = \mathbf{E}(|X| \,\big|\, Y) \end{aligned}$$

6. Έστω $h : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε, από Θεώρημα 1 έχουμε (θεωρώντας κατά τετριμμένο τρόπο ότι $h(Y) = h(Y,Z)$)

$$\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \,\big|\, Y,Z)\, h(Y)\big) = \mathbf{E}\big(X\, h(Y)\big) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \,\big|\, Y)\, h(Y)\big)$$

επομένως $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \,\big|\, Y,Z) \,\big|\, Y\big) = g(Y) = \mathbf{E}(X \,\big|\, Y)$ (λόγω της μοναδικότητας που εξασφαλίζει το Θεώρημα 1).

7. Προκύπτει εύκολα από τη μονοτονία για σειρές (αντίστοιχα ολοκληρώματα) για τη διακριτή (αντίστοιχα συνεχή) περίπτωση.

$\square$

Η $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \,\big|\, Y)\big) = \mathbf{E}X$ όταν η Y είναι διακριτή γίνεται

$$\mathbf{E}X = E(g(Y)) = \sum_{y \in \mathbb{R}} g(Y) \cdot f_Y(y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \mathbf{E}(X \,\big|\, Y = y) \cdot \mathbf{P}(Y = y)$$

Παράδειγμα 2. Έστω $(X_k)_{k \geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $\mathbf{E}(e^{aX_i}) < \infty$ και $a \in \mathbb{R}$. Έστω επίσης N τ.μ. ανεξάρτητη από τις $(X_k)_{k \geq 1}$ και με τιμές στο $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Θέτουμε $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$ και θεωρούμε την τ.μ. $S_N(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$.

Υπολογίζουμε πρώτα

$$g(n) = \mathbf{E}(e^{aS_N} \,\big|\, N = n) = \mathbf{E}(e^{aS_n} \,\big|\, N = n) \stackrel{(3)}{=} \mathbf{E}(e^{aS_n}) = \mathbf{E}(e^{a(X_1 + \ldots + X_n)}) = \big(\mathbf{E}(e^{aX_1})\big)^n$$

και επειδή

$$\mathbf{E}(e^{aS_N}) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(e^{aS_n} \,\big|\, N)\big)$$

παίρνουμε ότι

$$\mathbf{E}(e^{aS_N}) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(e^{aX_1})^N\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^N \cdot \mathbf{P}(N = n),$$

όπου $\lambda = \mathbf{E}(e^{aX_1})$.

Μάθημα 2 (Martingales)

Ξεκινάμε με μια εφαρμογή της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Άσκηση 1. Σε ένα πάρτυ με n άτομα, κάθε άτομο αφήνει το καπέλο του στην είσοδο. Μετά τη λήξη του πάρτυ τα καπέλα μοιράζονται σε γύρους ως εξής:

- Στον πρώτο γύρο τα n καπέλα μοιράζονται τυχαία στα άτομα. Δηλαδή το κάθε άτομο παίρνει ένα από τα n καπέλα με πιθανότητα $\frac{1}{n}$. Όποιος πάρει το καπέλο του φεύγει. Τα καπέλα που δεν έτυχαν στον ιδιοκτήτη τους (μαζί με τον ιδιοκτήτη τους) συμμετέχουν στον επόμενο γύρο.

- Σε κάθε επόμενο γύρο τα εναπομείναντα καπέλα μοιράζονται τυχαία στους εναπομείναντες ιδιοκτήτες. Η διαδικασία είναι όμοια με αυτή του πρώτου γύρου (ίσως με διαφορετικό πλήθος καπέλων και ιδιοκτητών).

- Η διαδικασία των γύρων επαναλαμβάνεται μέχρι να φύγει κάθε άτομο με το καπέλο του.

Ορίζουμε ως R_n το πλήθος γύρων που γίνονται μέχρις ότου όλοι έχουν πάρει το καπέλο τους. Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{E}R_n = n$. Δηλαδή το αναμενόμενο πλήθος γύρων ώστε το κάθε άτομο να πάρει το καπέλο του είναι n.

Υπενθύμιση: Έστω M_n το πλήθος των ατόμων που παίρνουν το καπέλο τους στον πρώτο γύρο και για κάθε $i \in \{1, \dots n\}$, $X_i = 1_{\{\text{ο } i \text{ βρήκε το καπέλο του}\}}$.
Είναι σαφές ότι $M_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}M_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i = n \cdot \mathbf{E}X_1 = n\big(0 \cdot \mathbf{P}(X_1 = 0) + 1 \cdot \mathbf{P}(X_1 = 1)\big) = n \cdot \mathbf{P}(X_1 = 1) = n\frac{1}{n} = 1$$

Υπολογίζουμε το $\mathbf{E}R_n$ με επαγωγή στο n. Έχουμε $\mathbf{E}R_1 = 1$ και έστω ότι ισχύει $\mathbf{E}R_k = k,\ \forall k < n$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}R_n = \mathbf{E}(R_n \,|\, M_n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}(R_n \,|\, M_n = k) \cdot \mathbf{P}(M_n = k) = \\
&= \mathbf{E}(R_n \,|\, M_n = 0) \cdot \mathbf{P}(M_n = 0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(R_n \,|\, M_n = k) \cdot \mathbf{P}(M_n = k) = \\
&= (1 + \mathbf{E}R_n) \cdot \mathbf{P}(M_n = 0) + \sum_{k=1}^{n} (1 + \mathbf{E}R_{n-k}) \cdot \mathbf{P}(M_n = k)
\end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\begin{aligned}\big(1-\mathbf{P}(M_n=0)\big)\cdot\mathbf{E}R_n &= \mathbf{P}(M_n=0)+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(M_n=k)+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}R_{n-k}\cdot\mathbf{P}(M_n=k)=\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}(n-k)\cdot\mathbf{P}(M_n=k)=\\ &= 1+n\cdot\big(1-\mathbf{P}(M_n=0)\big)-\mathbf{E}M_n=n\cdot\big(1-\mathbf{P}(M_n=0)\big)\end{aligned}$$

και προκύπτει $\mathbf{E}R_n=n$, αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

Ορισμός 3 (Martingales)**.** Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ και $(Y_n)_{n\geq 0}$ ακολουθίες τ.μ. σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας Ω και έστω $Y_n:\Omega\to\mathbb{R}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Η ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 0}$ λέγεται **martingale ως προς την ακολουθία** $(X_n)_{n\geq 0}$ αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$

(i) $\mathbf{E}|Y_n|<\infty$

(ii) $\mathbf{E}(Y_{n+1}\,|\,X_0,X_1,\ldots,X_n)=Y_n$

Μια συνέπεια του (ii) είναι ότι $\mathbf{E}Y_n=\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(Y_{n+1}\,|\,X_0,X_1,\ldots,X_n)\big)=\mathbf{E}Y_{n+1}$, δηλαδή η μέση τιμή των όρων της $(Y_n)_{n\geq 0}$ είναι σταθερή.

Παράδειγμα 3. Έστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ανεξάρτητες τ.μ. που καθεμιά ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $\{-1,1\}$. Θέτουμε $S_0=0$, $S_n=X_1+\ldots X_n$ για κάθε $n\geq 1$. Η τ.μ. $(S_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(X_k)_{k\geq 1}$.

Απόδειξη. Η ιδιότητα (i) των martingales ισχύει προφανώς αφού για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $|S_n|\leq n$ και συνεπώς $\mathbf{E}|S_n|<\infty$.
Για $n=0$ έχουμε $\mathbf{E}(S_1\,|\,\emptyset)=\mathbf{E}(S_1)=0=S_0$.
Για $n\geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n) &= \mathbf{E}(S_n+X_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n)=\\ &= \mathbf{E}(S_n\,|\,X_1,\ldots,X_n)+\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n)=\\ &= S_n+\mathbf{E}X_{n+1}=S_n,\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα δικαιολογείται από τα 3 και 4 του Θεωρήματος 2. □

Παράδειγμα 4. Έστω $p\in(\frac{1}{2},1]$ και έστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $\mathbf{P}(X_k=1=p)$ και $\mathbf{P}(X_k=-1=1-p=q)$, για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$. Θέτουμε $S_0=0$ και $M_0=1$, $S_n=X_1+\ldots X_n$ και $M_n=\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ για κάθε $n\geq 1$. Η τ.μ. $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(X_k)_{k\geq 1}$.

Απόδειξη. Πριν την απόδειξη, κάνουμε μια παρατήρηση:
Παρατήρηση: $\mathbf{E}S_n=n\cdot\mathbf{E}X_1=n(p-q)$. Αυτό φυσιολογικά οδηγεί στο να εξετάσουμε την ακολουθία τ.μ. $L_n=S_n-n(p-q)$. Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι η $(L_n)_{n\geq 0}$

είναι martingale ως προς την $(X_k)_{k\geq 1}$, αλλά στον ορισμό της εμπλέκεται ο παράγοντας του χρόνου n, κάτι που δε συμβαίνει με τη $(M_n)_{n\geq 0}$.

Η ιδιότητα (i) των martingales ισχύει αφού για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $0\leq M_n\leq \left(\frac{q}{p}\right)^{-n}$ και συνεπώς $\mathbf{E}|M_n|<\infty$.
Για $n=0$ έχουμε $\mathbf{E}(M_1\,|\,\emptyset)=\mathbf{E}M_1=p(\frac{q}{p})^1+q(\frac{q}{p})^{-1}=p+q=1=M_0$
Για $n\geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n) &= \mathbf{E}\Big(\Big(\frac{q}{p}\Big)^{S_n}\Big(\frac{q}{p}\Big)^{X_{n+1}}\,\Big|\,X_1,\ldots,X_n\Big)= \\
&\overset{(4)}{=} M_n\cdot\mathbf{E}\Big(\Big(\frac{q}{p}\Big)^{X_{n+1}}\,\Big|\,X_1,\ldots,X_n\Big)= && [M_n \text{ συνάρτηση των } X_1,\ldots,X_n] \\
&\overset{(3)}{=} M_n\cdot\mathbf{E}\Big(\Big(\frac{q}{p}\Big)^{X_{n+1}}\Big)= && [\text{Ανεξαρτησία από τα } X_1,\ldots,X_n] \\
&= M_n\Big(\Big(\frac{q}{p}\Big)^{1}\mathbf{P}(X_{n+1}=1)+\Big(\frac{q}{p}\Big)^{-1}\mathbf{P}(X_{n+1}=-1)\Big)= \\
&= M_n(q+p)=M_n
\end{aligned}$$

και συνεπώς η $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(X_k)_{k\geq 1}$. □

Παράδειγμα 5 (Martingale του Doob). Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τ.μ. και $X:\Omega\to\mathbb{R}$ τ.μ. με $\mathbf{E}|X|<\infty$. Θέτουμε $Y_0=\mathbf{E}X$ και $Y_n=\mathbf{E}(X\,|\,X_1,\ldots,X_n)$ για κάθε $n\geq 1$. Η $(Y_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(X_n)_{n\geq 1}$.

Απόδειξη. Η ιδιότητα (i) των martingales ισχύει αφού $\mathbf{E}|Y_n|=\mathbf{E}|\mathbf{E}(X\,|\,X_1,\ldots,X_n)|\overset{(4,5)}{\leq}\mathbf{E}|X|<\infty$.
Για $n=0$ έχουμε $\mathbf{E}(Y_1\,|\,\emptyset)=\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X\,|\,X_1)\,|\,\emptyset)\big)\overset{(6)}{=}\mathbf{E}X=Y_0$.
Για $n\geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_{n+1}\,|\,X_1,\ldots,X_n) &= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X\,|\,X_1,\ldots,X_{n+1})\,|\,X_1,\ldots,X_n)\big)= \\
&\overset{(6)}{=} \mathbf{E}(X\,|\,X_1,\ldots,X_n)=Y_n
\end{aligned}$$

και συνεπώς η $(Y_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(X_n)_{n\geq 1}$. □

Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση και απόδειξη της ανισότητας Azuma-Hoeffding, αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα που θα χρειαστούμε για την απόδειξη της ανισότητας:

Λήμμα 1. Έστω σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ και $D:\Omega\to\mathbb{R}$ τ.μ. με $|D|\leq 1$ και $\mathbf{E}(D\,|\,\mathcal{F})=0$. Τότε $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{aD}\,|\,\mathcal{F})\leq \mathrm{e}^{a^2/2}$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$ είναι κυρτή $\big($συνεπώς $f(\lambda x+(1-\lambda)y))\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in[0,1]\big)$. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της f παίρνουμε:

$$\mathrm{e}^{aD}\leq\frac{1-D}{2}\mathrm{e}^{-a}+\frac{1+D}{2}\mathrm{e}^{a}$$

και παίρνοντας μέσες τιμές με δέσμευση $\mathcal{F}$ στην παραπάνω ανισότητα:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{aD} \,\big|\, \mathcal{F}) \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{a} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

και έπεται το ζητούμενο αφού

$$e^{a^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{2^k \cdot k!} \quad \text{και} \quad (2k!) > 2^k \cdot k!$$

$\square$

Πρόταση 1 (Ανισότητα Azuma-Hoeffding). *Έστω $(Y_n)_{n\geq 0}$ martingale ως προς την σ-άλγεβρα $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(K_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε $\mathbf{P}(|Y_n - Y_{n-1}| \leq K_n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε,*

$$\mathbf{P}(|Y_n - Y_0| \leq x) \leq 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^{n} K_i^2}}$$

Απόδειξη. Έστω $\theta \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta(Y_n - Y_0)}) &= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta(Y_n - Y_0)} \,\big|\, \mathcal{F}_{n-1})\big) = \\ &= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta(Y_n - Y_{n-1}) + \theta(Y_{n-1} - Y_0)} \,\big|\, \mathcal{F}_{n-1})\big) = \\ &= \mathbf{E}\Big(\mathrm{e}^{\theta(Y_{n-1} - Y_0)} \cdot \mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{\theta(Y_{n-1} - Y_0)} \,\big|\, \mathcal{F}_{n-1}\big)\Big)\end{aligned}$$

και ορίζουμε την τ.μ. $A = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{K_n}$. Έπεται εύκολα από υπόθεση ότι $\mathbf{E}(A \,\big|\, \mathcal{F}_{n-1}) = 0$. Συνεπώς έχουμε:

$$\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{\theta(Y_n - Y_{n-1})} \,\big|\, \mathcal{F}_{n-1}\big) = \mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{\theta K_n A} \,\big|\, \mathcal{F}_{n-1}\big) \leq \mathrm{e}^{\frac{\theta^2 K_n^2}{2}}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το Λήμμα 1. Με βάση την παραπάνω ανισότητα, υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{\theta(Y_n - Y_0)}\big) \leq \mathrm{e}^{\frac{\theta^2 K_n^2}{2}} \cdot \mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{\theta(Y_{n-1} - Y_0)}\big) \leq \cdots \leq \mathrm{e}^{\frac{\theta^2 (K_1 + \ldots + K_n)^2}{2}}$$

και τώρα είμαστε σε θέση να βρούμε άνω φράγμα για την πιθανότητα

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_n - Y_0 \geq x) &= \mathbf{P}\big(\theta(Y_n - Y_{n-1}) \leq \theta x\big) = \mathbf{P}\big(\mathrm{e}^{\theta(Y_n - Y_{n-1})} \leq \mathrm{e}^{\theta x}\big) \leq \\ &\overset{Markov}{\leq} \frac{1}{\mathrm{e}^{\theta x}}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\theta(Y_n - Y_0)}) \leq \mathrm{e}^{-\theta x + \frac{1}{2}\theta^2(K_1^2 + \ldots K_n^2)}\end{aligned}$$

Ξεκινήσαμε με τυχόν θ, οπότε η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Για να πάρουμε το καλύτερο άνω φράγμα ελαχιστοποιούμε ως προς θ τη συνάρτηση $g(\theta) = -\theta x + \frac{1}{2}\theta^2(K_1^2 + \dots K_n^2)$, που εμφανίζεται στον εκθέτη. Το ελάχιστο λαμβάνεται για $\theta_0 = \frac{x}{K_1^2+\dots K_n^2}$ και είναι ίσο με $g(\theta_0) = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} K_i^2}$.

Με παρόμοιο υπολογισμό δείχνουμε ότι

$$\mathbf{P}(Y_n - Y_0 \leq -x) \leq \mathrm{e}^{-\theta x + \frac{1}{2}\theta^2(K_1^2+\dots K_n^2)}$$

και από τις δύο τελευταίες ανισότητες που αποδείξαμε, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Μάθημα 3 (Εφαρμογές ανισότητας Azuma-Hoeffding)

Παράδειγμα 6. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ και $\mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - p$ για κάποιο $p \in (0,1)$. Έστω $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ και $Y_n = S_n - np$, για κάθε $n \geq 1$ και $Y_0 = 0$. Η $(Y_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(X_n)_{n\geq 1}$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\mathbf{E}|Y_n| = \mathbf{E}|S_n - np| = 0 < \infty$. Για $n = 1$ έχουμε $\mathbf{E}(Y_1 \,|\, \emptyset) = \mathbf{E}Y_1 = \mathbf{E}S_1 - p = 0 = Y_1$. Για $n \geq 1$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_{n+1} \,|\, X_1, \ldots, X_n) &= \mathbf{E}(S_n + X_{n+1} - (n+1)p \,|\, X_1, \ldots, X_n) = \\
&= S_n - np + \mathbf{E}(X_{n+1} - p \,|\, X_1, \ldots, X_n) = \\
&= Y_n + \mathbf{E}(X_{n+1} - p) = Y_n
\end{aligned}$$

Έχουμε $|Y_{n+1} - Y_n| = |X_{n+1} - p| \in \{p, 1-p\}$ για κάθε $n \geq 0$ και θεωρώντας $\mu = \max\{p, 1-p\}$ παίρνουμε $|Y_{n+1} - Y_n| \leq \mu$ για κάθε $n \geq 0$. Τότε η ανισότητα (Azuma-Hoeffding) της Πρότασης 1 δίνει ότι

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(|Y_n - Y_0| \leq x) \leq 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n\mu}} \qquad \forall x > 0 \quad \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\quad & \mathbf{P}(|S_n - np| \leq x) \leq 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2n\mu}} \qquad \forall x > 0 \quad \Longrightarrow \\
\overset{x = y\sqrt{n}}{\Longrightarrow}\quad & \mathbf{P}(|S_n - np| \leq y\sqrt{n}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\mu}} \quad \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\quad & \mathbf{P}\Bigg(\underbrace{\frac{|S_n - np|}{\sqrt{n}}}_{Z} \leq y\Bigg) \leq \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\mu}} \quad \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\quad & \mathbf{P}(|Z| \geq y) \leq \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\mu}}
\end{aligned}$$

που είναι καλό φράγμα γιατί $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \sim \mathsf{N}(0,1)$. □

Έστω Γ_n το σύνολο όλων των γραφημάτων στο $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Έστω επίσης $f : \Gamma_n \to \mathbb{R}$ (π.χ. $f_1(A) = \sharp$ ακμών του A, $f_2(A) =$ χρωματικός αριθμός του A). Έστω $n \in \mathbb{N}$ και G τ.μ. με τιμές στο Γ_n.

Το martingale έκθεσης ακμών. Έστω $m = \binom{n}{2}$. Αριθμούμε τις ακμές ως $e_1, e_2 \ldots, e_m$. Θέτουμε $Y_i = 1_{e_i \in G}$ για κάθε $i \in [m]$ και $X_i = \mathbf{E}(f(G) \,|\, Y_1, \ldots, Y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ και παρατηρούμε ότι $X_0 = \mathbf{E}\big(f(G)\big)$ και $X_m = f(G)$.
Η $(X_i)_{i=0,\ldots,m}$ είναι martingale (ειδική περίπτωση του martingale του Doob) ως προς την $(Y_i)_{i\in[m]}$.
Μοντέλο Erdös-Renyi: Έστω $p \in (0,1)$. Κρατάμε κάθε ακμή του πλήρους γραφήματος K_n με πιθανότητα p. Προκύπτει έτσι ένα τυχαίο γράφημα G. Γράφουμε $G \sim \mathsf{G}(n,p)$.
Εξετάζουμε το martingale έκθεσης ακμών όταν $G \sim \mathsf{G}(3, \frac{1}{2})$ και $f(H) = \mathcal{X}(H) =$ ο χρωματικός αριθμός του H. Έστω για κάθε $H \in \Gamma_n$ ότι

$$X_i(H) = \mathbf{E}\big(\mathcal{X}(H) \,\big|\, Y_1, \ldots, Y_i\big)$$

για παράδειγμα, για $n = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ και άρα $|\Gamma_n| = 2^3 = 8$ και

$$\begin{aligned} X_3(H) &= \mathcal{X}(H) \\ X_2(H) &= \mathbf{E}(\mathcal{X}(G) \,|\, e_1, e_2) \\ X_2(H) &= \mathbf{E}(\mathcal{X}(G) \,|\, e_1) \\ X_0(H) &= \mathbf{E}(\mathcal{X}(G)) \end{aligned}$$

Το martingale έκθεσης κορυφών. Θεωρούμε ως $\mathcal{F}_i$ την ''πληροφορία'' που δηλώνει από ποιες κορυφές $1, 2, \ldots, i$ συνδέονται μεταξύ τους και τότε η ακολουθία τ.μ.

$$X_i = \mathbf{E}\big(f(G) \,\big|\, \mathcal{F}_i\big) \quad , \qquad i = 0, \ldots, n$$

είναι martingale.

Θεώρημα 3. *Έστω $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in (0,1)$, $G \sim \mathsf{G}(n,p)$ και $c = \mathbf{E}(\mathcal{X}(G))$. Τότε*

$$\mathbf{P}(|\mathcal{X}(G) - c| > \lambda\sqrt{n-1}) < 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το martingale έκθεσης κορυφών $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ισχύουν

$$\mathbf{E}\big(\mathcal{X}(G) \,\big|\, \emptyset\big) = \mathbf{E}\big(\mathcal{X}(G)\big) = c \qquad \text{και} \qquad \mathbf{E}\big(\mathcal{X}(G) \,\big|\, \mathcal{F}_n\big) = \mathcal{X}(G)$$

Ισχυρισμός. *Ισχύει ότι $X_i - 1 \leq X_{i+1} \leq X_i + 1$.*

Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό. Ορίζουμε

$$\mathcal{X}^{(i)}(G) = \begin{array}{l} \text{χρωματικός αριθμός του G αν αφαιρέσουμε} \\ \qquad \text{την κορυφή } i \text{ με όλες τις συνδέσεις της} \end{array}$$

Τότε $\mathcal{X}^{(i)}(G) \leq \mathcal{X}(G) \leq \mathcal{X}^{(i)}(G) + 1$ και

$$\begin{aligned} & c_i = \mathbf{E}\big(\mathcal{X}^{(i)}(G) \,\big|\, \mathcal{F}_i\big) \leq \mathbf{E}\big(\mathcal{X}(G) \,\big|\, \mathcal{F}_i\big) \leq 1 + \mathbf{E}\big(\mathcal{X}^{(i)}(G) \,\big|\, \mathcal{F}_i\big) \implies \\ \overset{1}{\implies} \; & \mathbf{E}\big(\mathcal{X}^{(i)}(G) \,\big|\, \mathcal{F}_{i-1}\big) \leq \mathbf{E}\big(\mathcal{X}(G) \,\big|\, \mathcal{F}_{i-1}\big) \leq 1 + \mathbf{E}\big(\mathcal{X}^{(i)}(G) \,\big|\, \mathcal{F}_{i-1}\big) \end{aligned}$$

δηλαδή εχουμε ότι

$$\begin{aligned} c_i &\leq X_i \leq 1 + c_i \\ c_i &\leq X_{i-1} \leq 1 + c_i \\ X_{i-1} & -1 \leq X_i \leq 1 + X_{i-1} \end{aligned}$$

[1] λόγω του ορισμού της $\mathcal{X}^{(i)}$, αφού αφαιρούμε την i κορυφή μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\mathcal{F}_i$ με $\mathcal{F}_{i-1}$.

Άρα έχουμε $|X_{i+1} - X_i| \leq 1 = K_i$ για $i = 1, 2 \ldots, -1$ και συνεπώς η ανισότητα (Azuma-Hoeffding) της Πρότασης 1 δίνει

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(|X_n - Y_1| \leq x) \leq 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^{n-1} K_i^2}} = \quad 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{n-1}} \\ \stackrel{x=\lambda\sqrt{n-1}}{\Longrightarrow} \quad & \mathbf{P}(|\mathcal{X}(G) - c| \geq \lambda\sqrt{n-1}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2}} \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Μάθημα 4 (Θεώρημα σύγκλισης των martingales)

Ορισμός 4 (Submartingales και supermartingales)**.** Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ και $(Y_n)_{n\geq 0}$ ακολουθίες τ.μ. σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας Ω και με $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{E}|Y_n| < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Η ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 0}$ λέγεται **submartingale ως προς την ακολουθία** $(X_n)_{n\geq 0}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathbf{E}(Y_{n+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_n) \geq Y_n$.
Η ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 0}$ λέγεται **supermartingale ως προς την ακολουθία** $(X_n)_{n\geq 0}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathbf{E}(Y_{n+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_n) \leq Y_n$.

Ανισότητα Jensen: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, X μια τ.μ. με τιμές στο I και $\mathbf{E}|X| < \infty$ και $\phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Τότε

$$\phi\big(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}\big) \leq \mathbf{E}(\phi(X) \mid \mathcal{F})$$

Πρόταση 2. *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Αν $(X_n)_{n\geq 0}$ martingale ως προς $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, $\phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση με $X_n \in I$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $\mathbf{E}|\phi(X_n)| < \infty$, τότε η $\big(\phi(X_n)\big)_{n\geq 0}$ είναι submartingale ως προς $(X_n)_{n\geq 0}$.*

Απόδειξη. $\mathbf{E}(\phi(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \overset{Jensen}{\geq} \phi\big(\mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\big) = \phi(X_n)$. □

Πρόταση 3. *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Αν $(X_n)_{n\geq 0}$ submartingale ως προς $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, $\phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή και αύξουσα συνάρτηση με $X_n \in I$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $\mathbf{E}|\phi(X_n)| < \infty$, τότε η $\big(\phi(X_n)\big)_{n\geq 0}$ είναι submartingale ως προς $(X_n)_{n\geq 0}$.*

Απόδειξη. $\mathbf{E}(\phi(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \overset{Jen.}{\geq} \phi\big(\underbrace{\mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}_{\geq X_n}\big) \overset{\phi\nearrow}{\geq} \phi(X_n)$. □

Upcrossings. Έστω $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και $[a,b] \subset \mathbb{R}$ με $a < b$. Ορίζουμε

$$\begin{gathered}
T_1 = \min\{n \geq 0 : Y_n \leq a\} \\
T_2 = \min\{n \geq T_1 : Y_n \geq b\} \\
\vdots \\
T_{2k-1} = \min\{n \geq T_{2k-2} : Y_n \leq a\} \\
T_{2k} = \min\{n \geq T_{2k-1} : Y_n \geq b\}
\end{gathered}$$

Upcrossing του $[a,b]$ για την Y, λέμε τον περιορισμό της σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[T_{2k-1}, T_{2k}]$ για κάποιο $k \geq 1$. Ορίζουμε

$$U_n(a,b\,; Y) = \sharp \text{ upcrossings του } [a,b] \text{ για την } Y \text{ στο } [0,n]$$

και
$$U(a,b\,;Y) = \lim_{n\to\infty} U_n(a,b\,;Y)$$

Λήμμα 2. *Έστω $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αν $U(a,b\,;Y) < \infty$ για κάθε $a,b \in \mathbb{Q}$ με $a < b$, τότε το $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ δεν υπάρχει. Τότε υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ τέτοια ώστε
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} Y_n = m \quad \text{και} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} Y_n = M$$
και $m \neq M$. Τότε, επειδή $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (πυκνότητα ρητών στους πραγματικούς), υπάρχουν $a,b \in \mathbb{Q}$ με $m < a < b < M$. Αυτό σημαίνει ότι $U(a,b\,;Y) = \infty$, άτοπο. Συνεπώς $m = M$ και άρα το $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. □

Θεώρημα 4 (Upcrossing ανισότητα)**.** *Έστω $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ submartingale. Τότε για κάθε $a < b$ ισχύει*
$$\mathbf{E}U_n(a,b\,;Y) \leq \frac{\mathbf{E}\big((Y_n-a)^+\big) - \mathbf{E}\big((Y_0-a)^+\big)}{b-a}$$

Απόδειξη. Επειδή η $\phi(x) = (x-a)^+$ είναι αύξουσα και κυρτή συνάρτηση, η $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ με $Z_n = (Y_n - a)^+$, $n \in \mathbb{N}$, είναι submartingale. Επίσης, είναι προφανές ότι $U_n(a,b\,;Y) = U_n(0,b-a\,;Z)$.
Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε
$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \in (T_{2k-1}, T_{2k}] \text{ για κάποιο } k \geq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
και τότε ισχύει $(b-a)\,U_n(0,b-a\,;Z) \leq \sum_{i=1}^n (Z_i - Z_{i-1})I_i$, γιατί
$$|\{i \in \mathbb{N} : I_i = 1\}| \geq U_n(0,b-a\,;Z) \qquad \text{και} \qquad \sum_{i=T_{2k-1}}^{T_{2k}} (Z_i - Z_{i-1}) = Z_{T_{2k}} - Z_{T_{2k-1}} \geq b-a$$
Η I_i είναι γνωστή δεδομένης της $\mathcal{F}_{i-1}$ γιατί
$$\{I_i = 1\} = \bigcup_{k=1}^{i} \{i \in (T_{2k-1} - T_{2k}]\} = \bigcup_{k=1}^{i} \Big(\{T_{2k-1} \leq i-1\} \setminus \{T_{2k} \leq i-1\}\Big) \in \mathcal{F}_{i-1}$$
και από την ανισότητα $(b-a)\,U_n(0,b-a\,;Z) \leq \sum_{i=1}^n (Z_i - Z_{i-1})I_i$, παίρνοντας μέση τιμή και στα δυο μέλη, έχουμε
$$(b-a)\,\mathbf{E}\big(U_n(0,b-a\,;Z)\big) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\big((Z_i - Z_{i-1})I_i\big)$$

Για τους όρους του αθροίσματος του δεξιού μέλους έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big((Z_i - Z_{i-1})I_i\big) &= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}\big((Z_i - Z_{i-1})I_i \,\big|\, \mathcal{F}_{i-1}\big)\big) = \\
&= \mathbf{E}\big(I_i\, \mathbf{E}\big((Z_i - Z_{i-1}) \,\big|\, \mathcal{F}_{i-1}\big)\big) = \\
&= \mathbf{E}\big(I_i\, \big(\underbrace{\mathbf{E}(Z_i \,|\, \mathcal{F}_{i-1}) - Z_{i-1}}_{\geq 0}\big)\big) \leq \\
&\leq \mathbf{E}\big(\,\mathbf{E}(Z_i \,\big|\, \mathcal{F}_{i-1}) - Z_{i-1}\big) = \mathbf{E}Z_i - \mathbf{E}Z_{i-1}
\end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$(b-a)\,\mathbf{E}U_n(0, b-a\,; Z) \leq \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{E}Z_i - \mathbf{E}Z_{i-1}) = \mathbf{E}Z_n - \mathbf{E}Z_0 = \mathbf{E}(Y_n - a)^+ - \mathbf{E}(Y_0 - a)^+$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5 (Σύγκλισης των martingales)**.** *Έστω $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ submartingale με $\sup\limits_{n\geq 0} \mathbf{E}Y_n^+ < \infty$. Τότε το $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n := Y$ υπάρχει με πιθανότητα 1 και $\mathbf{E}|Y| < \infty$.*

Απόδειξη. Έστω $M = \sup_{n\geq 0} \mathbf{E}(Y_n^+) \in \mathbb{R}$. Για $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, από την (upcrossing) ανισότητα του Θεωρήματος 4 και από το ότι $(Y_n - a)^+ \leq Y_n^+ + |a|$, προκύπτει ότι

$$\mathbf{E}U_n(a, b\,; Y) \leq \frac{\mathbf{E}\big((Y_n - a)^+\big)}{b - a} \leq \frac{M + |a|}{b - a}$$

και από Λήμμα Fatou και το ότι η ποσότητα $U_n(a, b\,; Y)$ αυξάνει όσο μεγαλώνει το n (απλά όρια αντί για $\underline{\lim}$) έχουμε ότι

$$\mathbf{E}\big(\lim_{n\to\infty} U_n(a, b\,; Y)\big) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}U_n(a, b\,; Y) \leq \frac{M + |a|}{b - a} < \infty$$

και συνεπώς $\mathbf{P}\big(U(a, b\,; Y) < \infty\big) = 1$. Θεωρώντας ως $A_{a,b}$ το ενδεχόμενο $U(a, b\,; Y) < \infty$, έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} A_{a,b}\Big) = 1$$

αφού το A είναι αριθμήσιμη τομή συνόλων πιθανότητας 1. Επίσης

$$U(a, b\,; Y) < \infty\,, \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathbb{Q} \text{ με } a < b$$

και άρα το $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει για κάθε $\omega \in A$ και άρα με πιθανότητα 1.
Έστω $Y = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Τότε

$$\mathbf{E}Y^+ = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} Y_n^+) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}Y_n^+ \leq M < \infty$$

και

$$\mathbf{E}Y_n^- = \mathbf{E}Y_n^+ - \underbrace{\mathbf{E}Y_n}_{\geq \mathbf{E}Y_0} \leq M - \mathbf{E}Y_0$$

συνεπώς

$$\mathbf{E}Y^- \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}Y_n^- \leq M - \mathbf{E}Y_0 < \infty$$

και το ζητούμενο προκύπτει αφού $\mathbf{E}|Y| = \mathbf{E}Y^+ + \mathbf{E}Y^- < \infty$. $\square$

Πόρισμα 1. *Έστω $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ μη αρνητικό supermartingale. Τότε το $\lim_{n\to\infty} Y_n := Y$ υπάρχει και $\mathbf{E}Y \leq \mathbf{E}Y_0$.*

Απόδειξη. Η $W_n = -Y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι submartingale και $\sup_n \mathbf{E}W_n^+ = 0 < \infty$. Άρα από Θεώρημα **??** το $\lim_{n\to\infty} W_n$ υπάρχει με πιθανότητα 1.
Επίσης, αφού Y_n supermartingale, έχουμε $\mathbf{E}Y_{n+1} \leq \mathbf{E}Y_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα από Λήμμα Fatou

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\big(\lim_{n\to\infty} Y_n\big) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}Y_n \leq \mathbf{E}Y_0$$

που είναι το ζητούμενο. $\square$

Παράδειγμα 7. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ και $\mathbf{P}(X_1 = -1) = q$ όπου $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ και $q = 1 - p$.
Θέτουμε $S_0 = 0$ και $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$, και $Y_n = \big(\frac{q}{p}\big)^{S_n} = r^{S_n}$ με $r < 1$. Η $(Y_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(X_n)_{n\geq 1}$ και $Y_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα $Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει και $\mathbf{E}Y < \infty$.
Έχουμε ότι $Y_n \in \{r^k : k \in \mathbb{Z}\} = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς το $Y \in A$ και $Y \neq \infty$ γιατί $\mathbf{E}Y < \infty$. Επίσης, αφού $Y \neq r^k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (αλλιώς η Y_n θα έπρεπε να σταθεροποιηθεί, που δεν συμβαίνει) έχουμε ότι $Y = 0$. Άρα $S_n \to \infty$.

Μάθημα 5 (Είδη σύγκλισης και θεωρήματα σύγκλισης)

Άσκηση 2. Έστω $(Z_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες τ.μ. με

$$Z_n = \begin{cases} -a_n, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n^2} \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1-\frac{1}{n^2} \\ a_n, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n^2} \end{cases}$$

όπου $a_1 = 2$, $a_n = 4\,(a_1 + \ldots + a_{n-1})$. Να αποδειχθούν τα παρακάτω:

1. Η $Y_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ είναι martingale ως προς την $(Z_n)_{n\geq 1}$.
2. Το $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει με πιθανότητα 1.
3. $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}|Y_n| = +\infty$.

Λύση. 1. $\mathbf{E}Z_n = 0$ και προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.

2. Έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(Z_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mathbf{P}(Z_n = a_n) + \mathbf{P}(Z_n = -a_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

και από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli παίρνουμε $\mathbf{P}\big(\limsup\limits_{n\geq 1}\{Z_n \neq 0\}\big) = 0$ και άρα το $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει με πιθανότητα 1.

3. Έχουμε $a_2 = 8,\ a_3 = 40 = 8\cdot 5,\ \ldots,\ a_n = 8\cdot 5^{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|Y_n| &\geq a_n\,\mathbf{P}(Z_n = a_n, Z_{n-1} = 0, \ldots, Z_2 = 0, Z_1 = a_1) \geq \\ &\geq 8\cdot 5^{n-2}\frac{1}{2n^2}\underbrace{\Big(1-\frac{1}{(n-1)^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{(n-2)^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{2^2}\Big)\frac{1}{2}}_{\geq c>0,\ \forall n\geq 1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{aligned}$$

γιατί ισχύει ότι για κάθε ακολουθία $c_n \in (0,1),\ n\geq 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-c_n) > 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$$

και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8\cdot 5^{n-2}}{2n^2} = +\infty$. Συνεπώς $\sup_{n\geq 1}\mathbf{E}|Y_n| = +\infty$.

□

Τρόποι σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. στον Ω. Λέμε ότι

1. Η X_n συγκλίνει στην X **σχεδόν βέβαια** ή **με πιθανότητα 1**, και γράφουμε $X_n \overset{as}{\to} X$, αν ισχύει
$$\mathbf{P}\big(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\big) = 1$$

2. Η X_n συγκλίνει στην X **στον $\mathbf{L}^p$** (για $p \geq 1$), και γράφουμε $X_n \stackrel{L^p}{\to} X$, αν

$$\mathbf{E}|X_n - X|^p \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. Η X_n συγκλίνει στην X **κατά πιθανότητα**, και γράφουμε $X_n \stackrel{P}{\to} X$, αν ισχύει

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \quad \forall \varepsilon > 0$$

4. Η X_n συγκλίνει στην X **κατά κατανομή**, και γράφουμε $X_n \stackrel{d}{\to} X$ ή $X_n \Rightarrow X$, αν ισχύει

$$\mathbf{P}(X_n \leq x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(X \leq x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο η συνάρτηση $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ είναι συνεχής.

Παρακάτω καταγράφουμε, χωρίς απόδειξη, κάποια βασικά θεωρήματα σχετικά με τη σύγκλιση ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών.

Λήμμα 3 (Λήμμα Fatou)**.** *Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία τ.μ. με $X_n \geq 0,\ \forall n \geq 0$. Τότε*

$$\mathbf{E}\big(\varliminf_{n\to\infty} X_n\big) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n$$

Θεώρημα 6 (Μονότονης Σύγκλισης)**.** *Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$, με $X_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 0$, μια αύξουσα ακολουθία τ.μ., δηλαδή $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega),\ \forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall \omega \in \Omega$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}(\lim_{x\to\infty} X_n)$$

Θεώρημα 7 (Κυριαρχημένης σύγκλισης)**.** *Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία τ.μ. ώστε $|X_n| \leq Y,\ \forall n \geq 1,\ \forall \omega \in \Omega$, όπου $\mathbf{E}Y < \infty$ και $X_n \stackrel{as}{\to} X$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X$$

Ως πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος παίρνουμε το:

Θεώρημα 8 (Φραγμένης σύγκλισης)**.** *Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία τ.μ ώστε $|X_n| \leq M < \infty,\ \forall n \geq 1,\ \forall \omega \in \Omega$ και $X_n \stackrel{as}{\to} X$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X$$

Πρόταση 4. *1. Αν $X_n \stackrel{as}{\to} X$, τότε $X_n \stackrel{P}{\to} X$.*

2. Αν $X_n \stackrel{L^p}{\to} X$ για κάποιο $p \geq 1$, τότε $X_n \stackrel{P}{\to} X$.

3. Αν $X_n \stackrel{P}{\to} X$, τότε $X_n \stackrel{d}{\to} X$.

Απόδειξη. 1. Για $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbf{E}(1_{|X_n - X| > \varepsilon}) \to \mathbf{E}(0) = 0$$

από Θεώρημα 8 (φραγμένης σύγκλισης), γιατί $Y_n = 1_{|X_n - X|} \stackrel{as}{\to} 0$ και άρα $|Y_n| \leq 1$.

2. Για $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbf{P}(|X_n - X|^p > \varepsilon^p) \leq \frac{\mathbf{E}(|X_n - X|^p)}{\varepsilon^p} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

γιατί έχουμε υποθέσει σύγκλιση στον L^p για $p \geq 1$.

3. Για $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n \leq x) &= \mathbf{P}(X_n \leq x,\, X \leq x + \varepsilon) + \mathbf{P}(X_n \leq x,\, X > x + \varepsilon) \leq \\ &\leq \mathbf{P}(X \leq x + \varepsilon) + \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(X_n \leq x) \leq \mathbf{P}(X \leq x + \varepsilon) = F_X(x + \varepsilon)$$

Για $\varepsilon \to 0$, επειδή $F_X(x)$ δεξιά συνεχής έπεται ότι

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(X_n \leq x) \leq \mathbf{P}(X \leq x) = F_X(x)$$

Παρόμοια με παραπάνω παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X \leq x - \varepsilon) \leq \mathbf{P}(X_n \leq x) + \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \quad \stackrel{\text{όρια}}{\Longrightarrow} \\ &\Longrightarrow \quad F_X(x - \varepsilon) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \leq x) \end{aligned}$$

και αν x είναι σημείο συνέχειας της F_X παίρνουμε

$$F_X(x) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(X_n \leq x)$$

και συνεπώς παίρνουμε αυτό που θέλουμε γιατί

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \leq x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

□

Θεώρημα 9. *Αν $X_n \stackrel{P}{\to} X$, τότε υπάρχει (γνησίως αύξουσα) ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\geq 1}$ τέτοια ώστε $X_{n_k} \stackrel{as}{\to} X$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $X_n \stackrel{P}{\to} X$ και συνεπώς $\mathbf{P}(|X_n - X| > 1) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Άρα $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{P}(|X_1 - X| > 1) \leq \frac{1}{2^1}$$

Έστω ότι έχουν οριστεί οι $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ ώστε

$$\mathbf{P}(|X_i - X| > 1) \leq \frac{1}{2^i}, \quad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Επειδή $\mathbf{P}(|X_n - X| > \frac{1}{k+1}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ έχουμε ότι $\exists n_{k+1} \in \mathbb{N}$ με $n_{k+1} > n_k$, τέτοιο ώστε

$$\mathbf{P}(|X_{n_{k+1}} - X| > \frac{1}{k+1}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

και έτσι ορίζεται επαγωγικά η ακολουθία με τη ζητούμενη ιδότητα.

Ισχυρισμός. *Ισχύει ότι* $\Pr\big(\{\omega \in \Omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_{n+1}(\omega) = X(\omega)\big\} = 1.$

Θέτουμε $A_k = \big\{\omega : |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{k}\big\}$. Επειδή $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$, από πρώτο λήμμα Borel-Cantelli, για το σύνολο

$$A = \limsup_{k\geq 1} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{P}(A) = 0$.
Για $\omega \in \Omega \setminus A$ υπάρχει $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ ώστε $\omega \notin A_k$ για κάθε $k \geq n_0(\omega)$, δηλαδή $|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k}$. Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} X_{n+1}(\omega) = X(\omega)$ και έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 10. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τ.μ. και $X_n \xrightarrow{d} X$. Τότε, υπάρχουν χώρος πιθανότητας $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ και τ.μ. $Y_n, Y : \Omega' \to \mathbb{R}$ ώστε*

1. *$Y_n \overset{d}{=} X_n$ και $Y \overset{d}{=} X$.*
2. *$Y_n \overset{as}{\to} Y$.*

Απόδειξη. Για χάρην απλότητας, θα αποδείξουμε μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος. Υποθέτουμε ότι οι X_n και X έχουν συναρτήσεις κατανομής F_{X_n} και F_X, αντίστοιχα, που είναι γνησίως αύξουσες και συνεχείς.
Θεωρούμε τ.μ. U σε χώρο πιθανότητας $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$, η οποία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ (δηλαδή $U \sim \mathsf{U}(0,1)$), και θέτουμε $Y_n = F_{X_n}^{-1}(U)$ και $Y = F_X^{-1}(U)$.
Έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(Y_n \leq x) = \mathbf{P}\big(F_{X_n}^{-1}(U) \leq x\big) = \mathbf{P}\big(U \leq F_{X_n}(x)\big) = F_{X_n}(x)$$

και ομοίως $\mathbf{P}(Y \leq x) = F_X(x)$.
Επειδή $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (έχουμε ως υπόθεση ότι $X_n \xrightarrow{d} X$), έχουμε $F_{X_n}^{-1}(y) \to F_X^{-1}(y),\ \forall y \in (0,1)$ και άρα $Y_n(\omega) \to Y(\omega),\ \forall \omega \in \Omega$ και έπεται το ζητούμενο. □

Εφαρμογή. *Αν* $X_n \stackrel{d}{\to} X$*, τότε* $\mathbf{E}h(X_n) \to \mathbf{E}h(X)$ *για κάθε* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχή και φραγμένη.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχουν χώρος πιθανότητας $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ και τ.μ. $(Y_n)_{n\geq 1}$, σε αυτόν με $Y_n \stackrel{d}{=} X_n, Y \stackrel{d}{=} X$ και $Y_n \stackrel{as}{\to} Y$. Τότε

$$\mathbf{E}h(X_n) = \mathbf{E}h(Y_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}h(Y) = \mathbf{E}h(X).$$

Η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από τη συνέχεια της h και η σύγκλιση από το Θεώρημα 8 (φραγμένης σύγκλισης). □

Μάλιστα ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω και αυτό δίνει έναν χαρακτηρισμό της σύγκλισης κατά κατανομή.

Μάθημα 6 (Βασικές ανισότητες - Ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα)

Άσκηση 3. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}, X$ τ.μ. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

1. Αν $X_n \xrightarrow{L^r} X$ για $r \geq 1$, τότε $\mathbf{E}|X_n|^r \to \mathbf{E}|X|^r$.
2. Αν $X_n \xrightarrow{L^1} X$, τότε $\mathbf{E}X_n \to \mathbf{E}X$. Ισχύει το αντίστροφο;
3. Αν $X_n \xrightarrow{L^2} X$, τότε $\mathbf{Var}(X_n) \to \mathbf{Var}(X)$.

Λύση. 1. Έχουμε ότι $\big|\|X_n\|_r - \|X\|_r\big| \leq \|X_n - X\|_r \to 0$ υψώνουμε στην r.

2. Έχουμε $|\mathbf{E}X_n - \mathbf{E}X| = |\mathbf{E}(X_n - X)| \leq \mathbf{E}|X_n - X| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Έστω $X = 0$ και $X_n \sim \mathsf{N}(0, n)$. Τότε $\mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X = 0$, αλλά $\mathbf{E}|X_n - X| = \mathbf{E}|X_n| = \sqrt{n}\,\mathbf{E}|Z| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, όπου $Z \sim \mathsf{N}(0,1)$.

3. Έχουμε $\mathbf{Var}(X_n) = \mathbf{E}(X_n^2) - (\mathbf{E}X_n)^2 \to \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$ (από τα (1), (2) και το ότι $X_n \xrightarrow{L^2} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{L^1} X$).

□

Θεώρημα 11 (Ανισότητα Hölder). *Έστω $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ δύο τ.μ. Τότε*

$$\mathbf{E}|XY| \leq \; X \;_p Y \;_q = \big(\mathbf{E}(|X|^p)\big)^{1/p} + \big(\mathbf{E}(|Y|^q)\big)^{1/q}.$$

Ως συνέπεια της παραπάνω ανισότητας έχουμε $1 \leq r < s$, τότε $\|X\|_r \leq \|Y\|_s$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο τη συνέπεια.

$$\|X\|_r^r = \mathbf{E}|X|^r \overset{p=\frac{s}{r}}{\leq} \big(\mathbf{E}(|X|^{rp}\big)^{1/p}\big(\mathbf{E}(1^q\big)^{1/q} = \big(\mathbf{E}(|X|^s)\big)^{r/s} \;\Rightarrow\; \|X\|_r \leq \|X\|_s$$

Άρα $L_s \subset L_r$ και $X_n \xrightarrow{L^s} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{L^r} X$. □

Ανισότητα Minkowski: Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ δύο τ.μ. και $p \in [1, \infty]$. Τότε $\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$

Θεώρημα 12 (Λήμματα Borel-Cantelli). *Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ενδεχόμενα σε έναν χώρο πιθανότητας. Τότε*

1. **Πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli:** *Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, τότε $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.*

2. **Δεύτερο Λήμμα Borel-Cantelli:** *Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$ και τα $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητα, τότε $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$.*

Ορισμός 5. Μια ακολουθία τ.μ. $(X_n)_{n\geq 1}$, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη** αν

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n \mathbf{E}\big(|X_n| \cdot 1_{|X_n|\geq a}\big) = 0$$

.

Παρατηρήσεις:

1. Αν $\mathbf{E}|X| < \infty$, τότε $\lim\limits_{a\to\infty} \mathbf{E}\big(|X|1_{|X|>a}\big) = 0$ γιατί $\lim\limits_{a\to\infty} |X| \cdot 1_{|X|>a} = 0$ αφού $X \in \mathbb{R}$ και $\big||X|1_{|X|>n}\big| \leq |X|$, $\mathbf{E}|X| < \infty$. Από Θεώρημα 7 (κυριαρχημένης σύγκλισης) έπεται το ζητούμενο.

2. Αν $|X_n| \leq Y$ για κάθε $n \geq 1$ και $\mathbf{E}|Y| < \infty$, τότε η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, διότι $\sup_n \mathbf{E}\big(|X_n|1_{|X_n|\geq a}\big) \leq \mathbf{E}\big(|Y| \cdot 1_{|Y|\geq a}\big) \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Αν $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = \infty$ (π.χ. $h(x) = x^{1+\varepsilon}$) και $\sup\limits_n \mathbf{E}h(|X_n|) = M < \infty$, τότε η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big(|X_n|1_{|X_n|\geq a}\big) &= \mathbf{E}\Big(\frac{|X_n|}{h(|X_n|)}\, h(|X_n|)1_{|X_n|\geq a}\Big) \leq \\
&\leq \sup_{x\geq a} \frac{x}{h(x)} \cdot \mathbf{E}\big(h(|X_n|)\big) \leq \\
&\leq M\, \frac{1}{\inf_{x\geq a} \frac{h(x)}{x}} \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Πρόταση 5. *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. Τότε*

$$\mathbf{E}|X| < \infty \iff \sup_{A:\, \mathbf{P}(A)<\delta} \mathbf{E}(|X|1_A) \overset{\delta\to 0}{\to} 0$$

Απόδειξη. Το δεύτερο μέλος της ισοδυναμίας γράφεται και ως εξής:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big[\mathbf{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbf{E}(|X|1_A) \leq \varepsilon\big]$$

$(\Longrightarrow)$: Έστω ότι $\mathbf{E}|X| < \infty$ και δεν ισχύει το δεξί μέλος της ισοδυναμίας. Τότε, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$, ακολουθία πραγματικών $(\delta_n)_{n\geq 1}$ με $\delta_n \to 0$ και σύνολα $(A_n)_{n\geq 1}$ με $\mathbf{P}(A_n) < \delta_n$ ώστε $\mathbf{E}(|X|1_{A_n}) \geq \varepsilon_0$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ (αλλιώς, αφού $\delta_n \to 0$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία της δ_n που να αθροίζει) και άρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$. Τότε, από το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli (1) παίρνουμε $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$ και επίσης $\lim\limits_{n\to\infty} |X|1_{A_n} = 0$ στο $\Omega \setminus \limsup A_n$. Επειδή $\big||X|1_{A_n}\big| \leq |X|$ με $\mathbf{E}|X| < \infty$, έπεται από Θεώρημα 7 (κυριαρχημένης σύγκλισης) ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}|X|1_{A_n} = 0$, άτοπο.

$(\Longleftarrow)$: Υποθέτουμε ότι ισχύει το δεξί μέλος της ισοδυναμίας που θέλουμε να αποδείξουμε. Τότε έχουμε ότι

$$\exists \delta > 0 : \sup_{A:\, \mathbf{P}(A)<\delta} \mathbf{E}\big(|X| 1_A\big) < 1$$

Για κάθε $M \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathbf{E}|X| = \mathbf{E}\big(|X| 1_{|X|<M}\big) + \mathbf{E}\big(|X| 1_{|X|\geq M}\big) \leq M + \mathbf{E}\big(|X| 1_{|X|\geq M}\big) \tag{4}$$

Επίσης, για κάθε $M > 0$ ισχύει

$$\lim_{M\to\infty} \mathbf{P}\big(|X| \geq M\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\underbrace{|X| \geq n}_{A_n}\big) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mathbf{P}(X = \infty) = 0$$

άρα υπάρχει $M_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{P}(|X| \geq M_0) \leq \delta$ και άρα $\mathbf{E}(|X|\, 1_{|X|\geq M_0}) < 1$. Η ανισότητα (4) για $M = M_0$ δίνει ότι

$$\mathbf{E}|X| \leq M_0 + 1 < \infty,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα 13. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$, τ.μ. ώστε $X_n \xrightarrow{P} X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.*
2. *$X, X_n \in L^1$, $\forall n \geq 1$ και $X_n \xrightarrow{L^1} X$.*
3. *$X_n \in L^1$, $\forall n \geq 1$ και $\mathbf{E}|X_n| \to \mathbf{E}|X| < \infty$.*

Απόδειξη. Υπάρχει στο βιβλίο των Grimmet-Stirzaker. □

Παράδειγμα 8. Έστω $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. με $\mathbf{E}|Y| < \infty$ και έστω $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ διήθηση (δηλαδή $\mathcal{F}_n$ σ-άλγεβρες στον Ω και $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1}$ για κάθε $i \geq 1$). Θέτουμε $X_n = \mathbf{E}(Y \,\big|\, \mathcal{F}_n)$, $\forall n \geq 1$. Έχουμε αποδείξει ότι η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale (του Doob) ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$

Ισχυρισμός: Η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Για $a > 0$ έχουμε

$$\mathbf{E}\big(|X_n| 1_{X_n\geq a}\big) \leq \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\big(|Y| \,\big|\, \mathcal{F}_n\big) \cdot 1_{\mathbf{E}(|Y| \,|\, \mathcal{F}_n)\geq a}\Big) = \mathbf{E}\big(|Y| 1_{B_{n,a}}\big),$$

όπου $B_{n,a} = \big\{\mathbf{E}(|Y| \,\big|\, \mathcal{F}_n) \geq a\big\}$ και άρα παίρνουμε

$$\sup_n \mathbf{E}\big(|X_n| 1_{X_n\geq a}\big) \leq \sup_n \mathbf{E}\big(|Y| 1_{B_{n,a}}\big) \tag{5}$$

Έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(B_{n,a}) = \mathbf{P}\big(\mathbf{E}(|Y| \,\big|\, \mathcal{F}_n) \geq a\big) \overset{Markov}{\leq} \frac{1}{a}\, \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(|Y| \,\big|\, \mathcal{F}_n)\big) = \frac{1}{a}\, \mathbf{E}|Y|$$

Επίσης, αφού $\mathbf{E}|Y| < \infty$, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε

$$\sup_{A:\,\mathbf{P}(A)<\delta_0} \mathbf{E}\big(|Y| 1_A\big) < \varepsilon$$

Για $a > 0$ με $\frac{1}{a} < \delta_0$ θα ισχύει $\mathbf{P}(B_{n,a}) < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$. και άρα η ανισότητα (4) μας δίνει

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n \mathbf{E}\big(|X_n| 1_{X_n \geq a}\big) \leq \varepsilon$$

και επειδή το ε είναι τυχόν έπεται το ζητούμενο.

Μάθημα 7 (Σύγκλιση martingales - Κάλπη Pólya - Χρόνοι διακοπής)

Πρόταση 6. *Έστω Z τ.μ. με $\mathbf{E}|Z| < \infty$ και $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ διήθηση. Θέτουμε $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n)$. Τότε, $\mathbf{E}(Z \,|\, \mathcal{F}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}(Z \,|\, \mathcal{F}_\infty)$ σχεδόν βέβαια και στον L^1.*

Απόδειξη. Θέτουμε $Y_n = \mathbf{E}(Z \,|\, \mathcal{F}_n)$, $\forall n \geq 1$. Η $(Y_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale και

$$\mathbf{E}|Y_n| = \mathbf{E}\big(|\mathbf{E}(Z \,|\, \mathcal{F}_n)|\big) \leq \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(|Z| \,\big|\, \mathcal{F}_n)\big) = \mathbf{E}|Z| < \infty$$

Συνεπώς $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}|Y_n| < \infty$ και από Θεώρημα 5 (σύγκλισης martingales) παίρνουμε ότι $Y_n \overset{as}{\to} Y_\infty$ για κάποια τ.μ. Y_∞ με $\mathbf{E}|Y_\infty| < \infty$.
Επειδή $(Y_n)_{n\geq 1}$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, έχουμε ότι $Y_n \overset{L^1}{\to} Y_\infty$. Μένει να δείξουμε ότι $Y_\infty = \mathbf{E}(Z \,\big|\, \mathcal{F}_\infty)$ και άρα (από μετροθεωρητικό ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbf{E}(1_A\, Y_\infty) = \mathbf{E}(1_A\, Z), \quad \forall A \in \mathcal{F}_\infty$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για $A \in \mathcal{F}_{n_0}$ (n_0 σταθερό) γιατί $1_A Y_n \overset{L^1}{\to} 1_A Y_\infty$ και άρα

$$\mathbf{E}(1_A\, Y_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(1_A\, Y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(1_A\, Z \,\big|\, \mathcal{F}_n)\big) = \mathbf{E}(1_A\, Z)$$

Τα παραπάνω ισχύουν για $Z \geq 0$. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε παίρνουμε το ζητούμενο δουλεύοντας ξεχωριστά για τις Z^+ και Z^-.
Θέτουμε $\mu(A) = \mathbf{E}(1_A\, Y_\infty)$ και $\nu(A) = \mathbf{E}(1_A\, Z)$. Τα μέτρα μ και ν συμφωνούν στην $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ η οποία είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$, και $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_\infty$. Συνεπώς τα μ και ν συμφωνούν στην $\mathcal{F}_\infty$.

□

Πρόταση 7. *Έστω $(Y_n)_{n\geq 1}$ martingale. Τότε, Y_n συγκλίνει στον L^1 αν και μόνο αν $Y_n = \mathbf{E}(Z \,\big|\, \mathcal{F}_n)$ για κάποια τ.μ. Z με $\mathbf{E}|Z| < \infty$.*

Απόδειξη. $(\Longleftarrow)$: Το είδαμε.
$(\Longrightarrow)$: Επειδή Y_n συγκλίνει, έστω στην Y, στον L^1 έπεται ότι $\mathbf{E}|Y_n| \to \mathbf{E}|Y|$. Άρα $\sup_{n\geq 1} |\mathbf{E}Y_n| < \infty$ και συνεπώς υπάρχει Y_∞ ώστε $Y \to Y_\infty$ σχεδόν βέβαια και στον L^1 ($Y_\infty \in L^1$ από λήμμα Fatou).
Θέτουμε $Z = Y_\infty$. Θα δείξουμε ότι $Y_{n_0} = \mathbf{E}(Y_\infty \,\big|\, \mathcal{F}_{n_0})$, δηλαδή (από μετροθεωρητικό ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής)

$$\mathbf{E}(Y_{n_0} 1_A) = \mathbf{E}(Y_\infty 1_A), \;\; \forall A \in \mathcal{F}_{n_0}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_\infty 1_A) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y_n 1_A) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(Y_n 1_A \,\big|\, \mathcal{F}_{n_0})\big) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big(1_A \underbrace{\mathbf{E}(Y_n \,\big|\, \mathcal{F}_{n_0})}_{Y_{n_0}}\big) = \mathbf{E}(Y_{n_0} 1_A)
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 9 (Κάλπη του Pólya)**.** Έστω μια κάλπη που περιέχει α άσπρες και β μαύρες σφαίρες. Διαδοχικά, επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα από την κάλπη και αφού δούμε το χρώμα της την επιστρέφουμε και προσθέτουμε άλλη μία σφαίρα του ίδιου χρώματος. Έστω A_n, B_n τα πλήθη των άσπρων και μάυρων σφαιρών, αντίστοιχα, που βρίσκονται στην κάλπη μετά και το n-οστό πείραμα και έστω E_n το ενδεχόμενο η σφαίρα που επιλέγουμε στο n-οστό πείραμα να είναι άσπρη. Θέτουμε

$$R_n = \frac{A_n}{A_n + B_n},\ \forall n \geq 0 \quad \text{και} \quad \mathcal{F}_n = \sigma(\{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n\}).$$

Αποδεικνύουμε ότι η $(R_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(R_{n+1} \,\big|\, \mathcal{F}_n) &= \frac{A_n + 1}{A_n + B_n + 1} \cdot \mathbf{P}(E_{n+1}) + \frac{A_n}{A_n + B_n + 1} \cdot \mathbf{P}(\neg E_{n+1}) = \\
&= \frac{A_n + 1}{A_n + B_n + 1} \cdot \frac{A_n}{A_n + B_n} + \frac{A_n}{A_n + B_n + 1} \cdot \frac{B_n}{A_n + B_n + 1} = \\
&= \frac{A_n(A_{n+1} + B_n)}{(A_{n+1} + B_{n+1})(A_n + B_n)} = \frac{A_n}{A_n + B_n} = R_n
\end{aligned}$$

Επειδή $(R_n)_{n\geq 0}$ martingale και $0 < R_n \leq 1$, $\forall n \geq 0$, έχουμε ότι το $\lim_{n\to\infty} R_n = R$ υπάρχει σχεδόν βέβαια και στον L^1.
Η R είναι τ.μ. με κατανομή $\mathsf{Beta}(\alpha, \beta)$, δηλαδή με πυκνότητα $\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, x^{\alpha-1}\, (1-x)^{\beta-1}\, 1_{x\in(0,1)}$.
Ας δούμε για παράδειγμα τι συμβαίνει αν $\alpha = \beta = 1$. Θέλουμε να δείξουμε τότε ότι η R ακολουθεί την κατανομή $\mathsf{Beta}(1, 1) = \mathsf{U}(0, 1)$.
Κωδικοποιούμε το τι έχει συμβεί μέχρι και το $(n+1)$-οστό πείραμα μέσω του διανύσματος $\mathcal{D}_{n+1} = (D_1, D_2, \ldots, D_{n+1})$, όπου για κάθε $i \in [n+1]$, $D_i = E_i$ αν στο i-οστό πείραμα τραβήξαμε άσπρη σφαίρα και $D_i = \neg E_i$ αν τραβήξαμε μαύρη.
Προσπαθώντας να υπολογίσουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(A_n = k)$ για $k \in [n + 1]$, ας δούμε τι πιθανότητα έχει να εμφανιστεί το διάνυσμα $\mathcal{D}^1_{n+1} = (D^1_1, \ldots, D^1_{n+1})$ όπου

$$D^1_i = \begin{cases} E_i, & 1 \leq i \leq k \\ \neg E_i, & k < i \leq n+1, \end{cases}$$

δηλαδή επιλέγουμε άσπρη σφαίρα στα πρώτα k πειράματα και μάυρη στα υπόλοιπα.
Εύκολα υπολογίζεται ότι η πιθανότητα αυτή είναι ίση με

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{k-1}{k}\right) \cdot \left(\frac{1}{k+1} \cdot \frac{2}{k+2} \cdot \frac{3}{k+3} \cdots \frac{n-k+1}{n+1}\right) = \frac{(k-1)!\,(n-k+1)!}{(n+1)!}$$

Τι γίνεται όμως με την πιθανότητα ενός άλλου διανύσματος που αντιπροσωπεύει πάλι k εμφανίσεις άσπρων σφαιρών και $n+1-k$ μαύρων; Ας δούμε τι πιθανότητα έχει να εμφανιστεί το διάνυσμα $\mathcal{D}^2_{n+1} = (D^2_1, \ldots, D^2_{n+1})$, όπου

$$D^2_i = \begin{cases} E_i, & i \text{ περιττός} \\ \neg E_i, & i \text{ άρτιος,} \end{cases}$$

δηλαδή επιλέγουμε εναλλάξ άσπρες και μαύρες σφαίρες ξεκινώντας με άσπρη. Εύκολα υπολογίζεται ότι η πιθανότητα αυτή είναι ίση με

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdots$$

παρατηρούμε ότι οι αριθμητές και οι παρονομαστές που εμφανίζονται σε αυτό το κλάσμα είναι οι ίδιοι με αυτούς που εμφανίστηκαν στην περίπτωση του $\mathcal{D}^1_{n+1}$.
Αυτό δεν είναι τυχαίο για τον εξής λόγο: Οι παρονομαστές θα είναι πάντα οι αριθμοί $2, 3, \ldots, n+1$ διότι μετά από κάθε πείραμα προστίθεται μία σφαίρα πάντα ανεξάρτητα από την έκβαση του πειράματος. Για τους αριθμητές: Για παράδειγμα αν $i \le \max\{k, n+1-k\}$, τότε ο i θα εμφανιστεί δυο φορές ως αριθμητής, μία όταν θα επιλέγουμε, έστω στο j_1 πείραμα, την i-οστή άσπρη σφαίρα (δηλαδή στο κλάσμα $\frac{i}{j_1+1}$) και μία όταν θα επιλέγουμε, έστω στο j_2 πείραμα, την i-οστή μάυρη σφαίρα (δηλαδή στο κλάσμα $\frac{i}{j_2+1}$). Με ανάλογο επιχείρημα αιτιολογούνται και οι περιπτώσεις $k \le i \le n+1-k$ και $n+1-k \le i \le k$, αλλά τότε μπορεί ο i να εμφανιστεί μόνο μια φορά ως αριθμητής.

$$\mathbf{P}(A_n = k) = \frac{(k-1)!\,(n-k+1)!}{(n+1)!} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}, \quad \forall k \in [n+1]$$

και συνεπώς έχουμε

$$\mathbf{P}\Big(R_n = \frac{k}{n+2}\Big) = \frac{1}{n+1} \implies \mathbf{P}(R_n \le x) = \mathbf{P}\big(A_n \le x(n+2)\big) = \frac{[x(n+2)]}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Χρόνοι διακοπής. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F})_{n\ge1}$ αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών στον Ω. Μια τ.μ.T λέγεται **χρόνος διακοπής** (ως προς την $(\mathcal{F})_{n\ge1}$) αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \le k\} \in \mathcal{F}_k$.
Για παράδειγμα, έστω $(X_n)_{n\ge1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1 = \frac{1}{2}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\big(\{X_1, \ldots, X_n\}\big)$ και $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\forall n \ge 1$ και $S_0 = 0$. Ο $T = \min\{i : S_i = 3\}$ είναι χρόνος διακοπής γιατί για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\{T \le k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \underbrace{\{S_i = 3\}}_{\in \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}_k$$

Όμως αν $\tilde{T} = \max\{i \le 20 : S_i = 0\}$, ο $\tilde{T}$ δεν είναι χρόνος διακοπής, π.χ. $\{\tilde{T} \le 8\} \notin \mathcal{F}_8$.

Μάθημα 8 (Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής)

Πρόταση 8. *Έστω $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ διήθηση και T χρόνος διακοπής (ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$). Τότε*

1. *Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale, τότε η $(X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ είναι submartingale.*
2. *Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι supermartingale, τότε η $(X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ είναι supermartingale.*
3. *Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale, τότε η $(X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ είναι martingale.*

Λόγω του (3) της παραπάνω πρότασης, αν X είναι martingale, έχουμε $\mathbf{E}(X_{n\wedge T}) = \mathbf{E}X_0$ και αν $T(\omega) < \infty$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} X_{n\wedge T} = X_T$.
Συνεπώς, αν ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{n\wedge T}) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_{n\wedge T}) \tag{6}$$

παίρνουμε $\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}X_0$. Συνεπώς θέλουμε να εξετάσουμε πότε γίνεται το όριο να περάσει μέσα στη μέση τιμή και να έχουμε την ισότητα (6).

Πρόταση 9. *Έστω $X = (X_n)_{\geq 0}$ ανέλιξη και T χρόνος διακοπής. Ισχύει η εξίσωση 6 για την X και τον T, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:*

1. *Η $(X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη (ως προς ω), δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|X_{n\wedge T(\omega)}(\omega)| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega$ και $\mathbf{P}(T < \infty) = 0$.*
2. *Ο T είναι φραγμένος, δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|T(\omega)| \leq M,\ \forall \omega \in \Omega$.*
3. *Ισχύουν, $\mathbf{E}T < \infty$, υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{E}(|X_{n+1} - X_n| \,|\, \mathcal{F}_n) \leq M$ και $\mathbf{E}|X_0| < \infty$.*

Απόδειξη.

1. Εφαρμόζεται το Θεώρημα 8 (φραγμένης σύγκλισης) γιατί

$$\lim_{n\to\infty} X_{n\wedge T} = X_T \text{ γιατί } T < \infty \text{ και } X_{n\wedge T} \text{ φραγμένη}$$

   και άρα ισχύει η 6.

2. Αν $T \leq M,\ \forall \omega \in \Omega$, τότε για $n > M$ έχουμε

$$\mathbf{E}(X_{n\wedge T}) = \mathbf{E}(X_T) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_{n\wedge T})$$

   και άρα ισχύει η 6.

3. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_{n\wedge T} &= X_0 + \sum_{k=1}^{n\wedge T}(X_k - X_{k-1}) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ |X_{n\wedge T}| = |X_0| + \sum_{k=1}^{n\wedge T}|X_k - X_{k-1}| &\leq |X_0| + \sum_{k=1}^{T}|X_k - X_{k-1}| = \\ &= |X_0| + \sum_{k=1}^{\infty}|X_k - X_{k-1}|\, 1_{k\leq T}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $Y = |X_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k - X_{k-1}|\,1_{k\leq T}$. Τότε $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}|X_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\big(|X_k - X_{k-1}|\,1_{k\leq T}\big)$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(|X_k - X_{k-1}|\,1_{k\leq T}) &= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(|X_k - X_{k-1}|\,1_{k\leq T}\,\big|\,\mathcal{F}_{k-1})\big) = \\
&= \mathbf{E}\big(1_{k\leq T}\,\mathbf{E}(|X_k - X_{k-1}|\,1_{k\leq T}\,\big|\,\mathcal{F}_{k-1})\big) \leq \\
&\leq M\,\mathbf{E}(1_{k\leq T}) = M\,\mathbf{P}(T \geq k)
\end{aligned}$$

άρα έχουμε ότι

$$\mathbf{E}Y \leq \mathbf{E}|X_0 + M \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T \geq k) = \mathbf{E}|X_0| + M\,\mathbf{E}T < \infty,$$

όπου η τελευταία ισότητα δικαιολογείται από το

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{k\leq T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}T = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T \geq k)$$

Καταλήγουμε στο ζητούμενο εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7 (κυριαρχημένης σύγκλισης).

□

Από το τρίτο μέρος της Πρότασης 8 και την Πρόταση 9 έπεται το επόμενο

Θεώρημα 14 (Επιλεκτικής διακοπής)**.** *Αν $(X_n)_{n\geq 0}$ martingale, T χρόνος διακοπής και ισχύει ένα από τα 1, 2, 3 της Πρότασης 9, τότε $\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}X_0$.*

Παράδειγμα 10. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Θέτουμε $S_0 = 0$ και $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\forall n \geq 1$, και $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_1, \ldots, X_n\})$. Οι $(S_n)_{n\geq 0}$ και $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$ είναι martingales ως προς $(X_n)_{n\geq 1}$. Για $a \in \mathbb{Z}$, θέτουμε $T_a = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k = a\}$.

1. Για $a < 0 < b$ θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{P}(T_a < T_b) = \frac{a}{|a|+b}$.
   Ο $T = T_a \wedge T_b$ είναι χρόνος διακοπής.
   Η ανέλιξη $M_n = S_n^2 - n$ είναι martingale, συνεπώς martingale είναι και η $M_{n\wedge T}$ και άρα $\mathbf{E}(M_{n\wedge T}) = \mathbf{E}M_0 = 0$. Συνεπώς έχουμε

   $$\mathbf{E}(S_{n\wedge T}^2) = \mathbf{E}(n \wedge T) \;\Rightarrow\; \mathbf{E}(n \wedge T) \leq a^2 \vee b^2 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(n \wedge T) \leq a^2 \vee b^2$$

   Από Θεώρημα 6 (μονότονης σύγκλισης) έχουμε $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(n \wedge T) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} n \wedge T) = \mathbf{E}T$, άρα $\mathbf{E} < \infty$ και συνεπώς $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.
   Για το martingale $(S_n)_{n\geq 0}$ έχουμε ότι $(S_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ ομοιόμορφα φραγμένη και $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$, άρα εφαρμόζεται το (1) του Θεωρήματος 14 (επιλεκτικής διακοπής) και παίρνουμε $\mathbf{E}(S_T) = \mathbf{E}(S_0)$. Όμως

   $$\begin{aligned}
   \mathbf{E}S_T &= \mathbf{E}(a\,1_{T_a<T_b} + b\,1_{T_b<T_a}) = \\
   &= a\,\underbrace{\mathbf{P}(T_a < T_b)}_{x} + b\,\mathbf{P}(T_b < T_a) = \\
   &= ax + b(1-x)
   \end{aligned}$$

και επειδή $\mathbf{E}S_T = 0$ καταλήγουμε στο ότι $x = \frac{b}{|a|+b}$, που είναι το ζητούμενο.

2. Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{E}(T_a \wedge T_b) = |a|b$.
Είδαμε παραπάνω ότι $\mathbf{E}(n \wedge T) = \mathbf{E}(S^2_{n\wedge T})$. Επίσης η $(S^2_{n\wedge T})_{n\geq 1}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη από το $\max\{a^2, b^2\}$, με όριο S^2_T. Άρα, εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα 6 και 8 (μονότονης σύγκλισης και φραγμένης σύγκλισης) για τις $n \wedge T$ και $S^2_{n\wedge T}$, αντίστοιχα, παίρνουμε
$$\begin{aligned} \mathbf{E}T = \mathbf{E}S^2_T &= \mathbf{E}\big(S^2_T\, 1_{T_a<T_b} + S^2_T\, 1_{T_b<T_a}\big) = \\ &= a^2\mathbf{P}(T_a < T_b) + b^2\mathbf{P}(T_b < T_a) = \\ &= a^2\,\frac{b}{|a|+b} + b^2\,\frac{a}{|a|+b} = \\ &= \frac{|a|\,b\,(|a|+b)}{|a|+b} = |a|b \end{aligned}$$

3. Θα αποδείξουμε ότι για $a \neq 0$ ισχύει $\mathbf{E}T_a = \infty$.
Για τον χρόνο T_a έχουμε ότι $\mathbf{E}S_{T_a} \neq 0$ γιατί $\mathbf{E}S_{T_a} = a$. Επίσης, το martingale $(S_n)_{n\geq 0}$ ικανοποιεί τη σχέση $|S_{n+1} - S_n| = 1$, $\forall n \geq 0$, $\forall \omega \in \Omega$.
Αν ίσχυε ότι $\mathbf{E}T_a < \infty$ θα εφαρμοζόταν το (3) του Θεωρήματος 14 (επιλεκτικής διακοπής) και θα είχαμε $\mathbf{E}S_{T_a} = \mathbf{E}S_0 = 0$, άτοπο.

Ορισμός 6 (Backward martingales)**.** Έστω $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ φθίνουσα ακολουθία σ-αλγεβρών και $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία τ.μ. με $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Η Y λέγεται **backward martingale** ως προς την $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ αν ισχύουν τα εξής:

1. Η Y είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$.

2. $\mathbf{E}|Y| < \infty$ για κάθε $n \geq 0$.

3. $\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{G}_{n+1}) = Y_{n+1}$ για κάθε $n \geq 0$.

Η σχέση (3) συνεπάγεται ότι $\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{G}_k) = Y_k$ για κάθε $k > n$. Με επαγωγή στο k, έστω ότι $\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{G}_k) = Y_k$, τότε
$$\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{G}_{k+1}) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{G}_k) \,|\, \mathcal{G}_{k+1}\big) \overset{E.Y.}{=} \mathbf{E}(Y_k \,|\, \mathcal{G}_{k+1}) = Y_{k+1}$$

Μάθημα 9 (Νόμος 0-1 του Kolmogorov - Ισχυρός Νόμος Μεγάλων Αριθμών)

Θεώρημα 15. *Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ backward martingale ως προς την $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$. Τότε*

1. *Το όριο $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ υπάρχει σχεδόν βέβαια και στον L^1.*
2. *$X_\infty = \mathbf{E}(X_0 \,|\, \mathcal{G}_\infty)$, όπου $\mathcal{G}_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$.*

Απόδειξη. 1. Για $a < b$, έστω $U_n[a,b\,;X]$ ο αριθμός των upcrossings του $[a,b]$ που κάνει η ανέλιξη $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Η $\hat{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n) = (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1)$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{G}_k)_{k=0}^n$, άρα

$$\mathbf{E}U_n[a,b\,;\hat{X}] \leq \frac{\mathbf{E}\big((\hat{X}_n - a)^+\big)}{b-a} = \frac{\mathbf{E}\big((\hat{X}_0 - a)^+\big)}{b-a} \quad \text{(ανισότητα Doob, θεώρημα 4)}$$

και επειδή $\mathbf{E}U_n[a,b\,;X] \leq 1 + \mathbf{E}U_n[a,b\,;\hat{X}]$ παίρνουμε

$$\mathbf{E}U_\infty[a,b\,;X] \leq 1 + \frac{\mathbf{E}\big((X_0 - a)^+\big)}{b-a} < \infty$$

Άρα $\mathbf{E}U_\infty[a,b\,;X] < \infty$ με πιθανότητα 1 άρα το $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ υπάρχει σχεδόν βέβαια άρα και στον L^1 (από Θεώρημα 13 αφού X_n ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη και $X_n \overset{as}{\to} X \;\Rightarrow\; X_n \overset{P}{\to} X$).

2. Θέλουμε $\mathbf{E}(X_\infty 1_A) = \mathbf{E}(X_0\, 1_A)$ για κάθε $A \in \mathcal{G}_\infty$. Έχουμε

$$\mathbf{E}(X_n\, 1_A) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X_0 \,|\, \mathcal{G}_n) 1_A\big) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(1_A X_0 \,|\, \mathcal{G}_n)\big) = \mathbf{E}(1_A\, X_0)$$

και υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}(X_\infty\, 1_A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n\, 1_A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_0\, 1_A) = \mathbf{E}(X_0\, 1_A),$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το ότι $X_n \overset{L^1}{\to} X_\infty$, άρα $\mathbf{E}X_n \to \mathbf{E}X_\infty$, και από την $|X_n\, 1_A - X_\infty\, 1_A| \leq |X_n - X_\infty|$.

□

Θεώρημα 16 (Νόμος 0-1 του Kolmogorov)**.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και τ.μ. $X_n : \Omega \to E_n,\ n \geq 1$. Θέτουμε $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}) = \sigma(\{X_k : k \geq n\})$ και $\mathcal{F}_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Αν οι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες και $A \in \mathcal{F}_\infty$, τότε $\mathbf{P}(A) \in \{0,1\}$.*

Απόδειξη (σκιαγράφηση). Στόχος είναι να δείξουμε ότι το A είναι ανεξαρτητο από το A γιατί τότε θα έχουμε

$$\mathbf{P}(A \cap A) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(A) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}^2(A) \;\Longrightarrow\; \mathbf{P}(A) \in \{0,1\}$$

Έστω $\mathcal{H}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n),\ \forall n \geq 1$. Αν $\Gamma \in \mathcal{H}_n$, τότε το Γ είναι ανεξάρτητο από την $\mathcal{F}_{n+1}$ και άρα και από την $\mathcal{F}_\infty$. Συνεπώς η ένωση $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_\infty$ και άρα (με κάποια δουλειά) συμπεραίνουμε ότι $\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n)$ ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_\infty$.
Όμως $\mathcal{F}_\infty \subset \sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n) = \mathcal{G}$, γιατί $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}) \subset \mathcal{G}$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα έχουμε ότι $\mathcal{F}_\infty$ ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_\infty$. Το επιχείρημα ολοκληρώνεται ως εξής:

$$A \in \mathcal{F}_\infty \ \Rightarrow\ A \text{ ανεξάρτητο από την } \mathcal{F}_\infty \ \Rightarrow\ A \text{ ανεξάρτητο από } A$$

που είναι ο στόχος που είχαμε θέσει. □

Πόρισμα 2. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες τ.μ., $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ και $\mathcal{F}_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Αν $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ είναι $\mathcal{F}_\infty$-μετρήσιμη, τότε $\exists c \in [-\infty, \infty]$ ώστε $\mathbf{P}(X = c) = 1$.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}_\infty$ και άρα από το προηγούμενο θεώρημα παίρνουμε ότι $\mathbf{P}(X \leq a) \in \{0, 1\}$.
Αν $\mathbf{P}(X = -\infty) = 1$ ή $\mathbf{P}(X = \infty) = 1$ έχουμε το ζητούμενο. Διαφορετικά, επειδή $\{X = -\infty\}, \{X = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$, παίρνουμε από το προηγούμενο θεώρημα ότι $\mathbf{P}(X = -\infty) = \mathbf{P}(X = \infty) = 0$ και συνεπώς $\mathbf{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$.
Έχουμε ότι η F_X είναι αύξουσα, $F_X(-\infty) = \lim\limits_{a\to\infty} F_X(a) = \mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{X \leq n\}\Big) = 0$ και $F_X(\infty) = 1$. Θέτουμε $c = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 0\}$. Τότε, $F_X(c-) = 0$ και $F_X(c+) = 1$ και άρα

$$\mathbf{P}(X = c) = F_X(c+) - F_X(c-) = 1 + 0 = 1,$$

που είναι αυτό που θέλαμε. □

Παράδειγμα 11. Να αποδείξετε οτί η τ.μ.

$$Z = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_1 + \ldots X_n}{n}$$

είναι $\mathcal{F}_\infty$ μετρήσιμη.
Πράγματι, γιατί για κάθε $k \geq 1$ έχουμε ότι η Z είναι $\mathcal{F}_k$ μετρήσιμη αφού

$$Z = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{X_1 + \ldots + X_k}{n} + \frac{X_{k+1} + \ldots + X_n}{n} \right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_{k+1} + \ldots + X_n}{n}$$

Πρόταση 10 (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών). *Έστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ και έστω $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Τότε*

$$\frac{S_n}{n} \to \mathbf{E}X_1, \quad \textit{σχεδόν βέβαια και στον } L^1$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{G}_n = \sigma(\{S_n, S_{n+1}, \dots\}) = \sigma(\{S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\})$, άρα η $\mathcal{G}_n$ είναι φθίνουσα. Έστω $Y_n = \frac{S_n}{n},\ n \geq 1$.

Ισχυρισμός. Η $(Y_n)_{n\geq 1}$ είναι backward martingale ως προς την $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$.

- Η Y_n είναι $\mathcal{G}_n$-μετρήσιμη.
- $\mathbf{E}|Y_n| \leq \frac{1}{n}\, n\, \mathbf{E}|X_1| = \mathbf{E}|X_1| < \infty$
- Υπολογίζουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή

  $$\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{G}_{n+1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i \,|\, \mathcal{G}_{n+1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i \,|\, S_{n+1}) = \frac{1}{n}\, n\, \mathbf{E}(X_1 \,|\, S_{n+1}) = \mathbf{E}(X_1 \,|\, S_{n+1})$$

  Επίσης έχουμε ότι

  $$S_{n+1} = \mathbf{E}(S_{n+1} \,|\, S_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{E}(X_i \,|\, S_{n+1}) = (n+1)\, \mathbf{E}(X_1 \,|\, S_{n+1})$$

  και άρα από τις δυο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε το ζητούμενο, δηλαδή

  $$\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{G}_{n+1}) = \mathbf{E}(X_1 \,|\, S_{n+1}) = \frac{S_{n+1}}{n+1} = Y_{n+1}$$

Άρα, από Θεώρημα 15, έχουμε ότι η $(Y_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει σε μια τ.μ. $Y_\infty \in L^1$, σχεδόν βέβαια και στον L^1. Η Y_∞ είναι $\mathcal{G}_\infty$ μετρήσιμη, άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(Y_\infty = c) = 1$. Τελικά έχουμε

$$Y_n = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^1} c \ \Rightarrow\ \frac{\mathbf{E}S_n}{n} \to \mathbf{E}c \ \Rightarrow\ \mathbf{E}X_1 \to \mathbf{E}c = c$$

και άρα $\mathbf{E}X_1 = c$ και το ζητούμενο έπεται. □

Μάθημα 10 (Η Μεγιστική Ανισότητα του Doob)

Πρόταση 11. *Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ submartingale ως προς μια $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$ και N χρόνος διακοπής ώστε $\mathbf{P}(N \leq k) = 1$. Τότε $\mathbf{E}X_0 \leq \mathbf{E}X_N \leq \mathbf{E}X_k$.*

Απόδειξη. Η $(X_{N\wedge j})_{j\geq 0}$ είναι submartingale, άρα $\mathbf{E}(X_{N\wedge 0}) \leq \mathbf{E}(X_{N\wedge k})$. Συνεπώς παίρνουμε ότι $\mathbf{E}X_0 \leq \mathbf{E}X_k$.

Ισχυρισμός. *Η $Y_n = X_n - X_{n\wedge N}$ είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*

Απόδειξη Ισχυρισμού. Είναι προφανές ότι $\mathbf{E}|Y_n| < \infty$, $\forall n \geq 0$. Υπολογίζουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbf{E}(X_{n\wedge N} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \\
&= \mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbf{E}(X_{n\wedge N}\, 1_{N\geq n} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbf{E}(X_{n\wedge N}\, 1_{N\leq n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \\
&= \mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbf{E}(X_n\, 1_{N\geq n} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbf{E}(X_N\, 1_{N\leq n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \\
&= \mathbf{E}(X_n\, 1_{N\leq n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) - \mathbf{E}(X_N\, 1_{N\leq n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \\
&= 1_{n\leq n-1} \big(\mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) - X_N\big) \geq \\
&\geq 1_{n\leq n-1} (X_{n-1} - X_n) = X_{n-1} - X_{N\wedge(n-1)} = Y_{n-1}
\end{aligned}$$

Συνεπώς η Y_n είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. □

Δεδομένου του ισχυρισμού έχουμε

$$\mathbf{E}Y_k \geq \mathbf{E}Y_0 = 0 \implies \mathbf{E}X_k - \mathbf{E}X_N \geq 0 \implies \mathbf{E}X_N \leq \mathbf{E}X_k,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης. □

Θεώρημα 17 (Μεγιστική ανισότητα του Doob). *Για $(X_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $M_n = \max\{X_0, \ldots, X_n\}$ για $n \geq 0$. Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, τότε*

$$\mathbf{P}(M_n \geq x) \leq \frac{\mathbf{E}(X_n^+\, 1_{X_n^+ \geq x})}{x}$$

Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι supermartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, τότε

$$\mathbf{P}(M_n \geq x) \leq \frac{\mathbf{E}X_0 + \mathbf{E}(X_n^-)}{x}$$

Παρατήρηση. Ας δούμε τι φράγμα θα πάρουμε αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Markov: Έστω $= \mathbf{P}(M_n \geq x) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \{X_k^+ \geq x\}\Big)$. Από ανισότητα Markov, για κάθε $k \geq 0$ έχουμε

$$\mathbf{P}(X_k^+ \geq x) \leq \frac{\mathbf{E}(X_k^+)}{x}$$

και από φράγμα ένωσης παίρνουμε ότι

$$A \leq \frac{1}{x} \left(\mathbf{E}X_0^+ + \ldots + \mathbf{E}X_n^+\right) \leq \frac{n}{x}\, \mathbf{E}X_n^+$$

δηλαδή παίρνουμε ένα άνω φράγμα το οποίο είναι πρακτικά άχρηστο ακόμη και για μικρές τιμές του n.

Απόδειξη Θεωρήματος 17. Αποδεικνύουμε το πρώτο μέρος του Θεωρήματος, όπου η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale.
Σταθεροποιούμε ένα $n \geq 1$. Έστω ο χρόνος διακοπής $N = \min\{k : X_k \geq x\} \wedge n$ και έστω $A = \{M_n \geq x\}$. Τότε

$$x\mathbf{P}(A) \overset{(\star)}{\leq} \mathbf{E}(X_N\, 1_A) \overset{(\star\star)}{\leq} \mathbf{E}(X_n\, 1_A) \leq \mathbf{E}(X_n^+\, 1_A)$$

Η ανισότητα $(\star)$ ισχύει γιατί $X_N\, 1_A \geq x\, 1_A$ και άρα $\mathbf{E}(X_N\, 1_A) \geq x\, \mathbf{P}(A)$.
Για την $(\star\star)$: Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\mathbf{E}X_N \leq \mathbf{E}X_n$ άρα

$$\mathbf{E}(X_N\, 1_A) + \mathbf{E}(X_N\, 1_{A^c}) \leq \mathbf{E}(X_n\, 1_A) + \mathbf{E}(X_n\, 1_{A^c})$$

και άρα

$$\mathbf{E}(X_N\, 1_A) \leq \mathbf{E}(X_n\, 1_A) \leq \mathbf{E}(X_n^+\, 1_A)$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο διαιρώντας με x (γιατί $\mathbf{P}(M_n \geq x) = \mathbf{E}(X_n\, 1_A)$).
Αποδεικνύουμε τώρα το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος, όπου η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι supermartingale. Έστω ο χρόνος διακοπής $T = \min\{k \geq 0 : X_k \geq x\}$. Τότε, η $(X_{N\wedge j})_{j\geq 0}$ είναι supermartingale. Άρα

$$\mathbf{E}X_0 \geq \mathbf{E}(X_{T\wedge n}) = \mathbf{E}(X_{T\wedge n}\, 1_{T\leq n}) + \mathbf{E}(X_{T\wedge n}\, 1_{T>n}) \geq x\, \mathbf{P}(T \leq n) - \mathbf{E}(X_n^-)$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Πρόταση 12. *Έστω $X \geq 0$ τ.μ. και $p > 0$. Τότε*

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^\infty t^{p-1}\, \mathbf{P}(X \geq t)\, dt$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$p \int_0^\infty t^{p-1}\, \mathbf{E}(1_{X>t})\, dt = \mathbf{E}\Big(p \int_0^\infty t^{p-1}\, 1_{X>t}\, dt\Big) = \mathbf{E}\Big(\int_0^X p\, t^{p-1}\, dt\Big) = \mathbf{E}(X^p)$$

από το οποίο έπεται το ζητούμενο αφού $\mathbf{P}(X \geq t) = \mathbf{E}(1_{X>t})$. □

Θεώρημα 18. *Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ submartingale, $p \in (1, \infty)$ και $\overline{X}_n = \max\{X_0^+, \ldots, X_n^+\}$. Τότε*

$$\mathbf{E}(\overline{X}^p) \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \mathbf{E}\big((X_n^+)^p\big)$$

Άρα αν $(Y_n)_{n\geq 0}$ martingale και $Y_n^* = \max_{n\geq 0} |Y_n|$, τότε

$$\mathbf{E}\big((Y_n^*)^p\big) \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \mathbf{E}\big(|Y_n|^p\big)$$

Απόδειξη. Έστω $M > 0$ σταθερό. Ισχύει η εξής ανισότητα

$$\mathbf{P}(\overline{X}_n \wedge M \geq t) \leq \frac{1}{t}\,\mathbf{E}(X_n^+ 1_{\overline{X}_n \wedge M \geq t}), \quad t > 0 \tag{7}$$

γιατί για $M < t$ αυτή γίνεται $0 \leq 0$ και για $M \geq t$ γίνεται $\mathbf{P}(\overline{X}_n \geq t) \leq \frac{1}{t}\,\mathbf{E}(X_n^+ 1_{\overline{X}_n \geq t})$, που ισχύει από Θεώρημα 17 (μεγιστική ανισότητα Doob) εφαρμοσμένο στο submartingale X_n^+ (είναι submartingale γιατί η $\phi(x) = x^+$ είναι κυρτή και η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι submartingale από υπόθεση). Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big((\overline{X}_n \wedge M)^p\big) &= p\int_0^\infty t^{p-1}\,\mathbf{P}(\overline{X}_n \wedge M \geq t)\,dt \leq \\
&\overset{(7)}{\leq} p\int_0^\infty t^{p-1}\,\frac{1}{t}\,\mathbf{E}(X_n^+ 1_{\overline{X}_n \wedge M \geq t})\,dt \leq \\
&\overset{(\star)}{\leq} \left(\frac{p}{p-1}\right)\mathbf{E}\big((X_n^+)^p\big)^{1-p}\mathbf{E}\big((\overline{X}_n \wedge M)^{(p-1)q}\big)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right)\mathbf{E}\big((X_n^+)^p\big)^{1-p}\mathbf{E}\big((\overline{X}_n \wedge M)^p\big)^{1-\frac{1}{p}} \implies \\
&\implies \mathbf{E}\big((\overline{X}_n \wedge M)^p\big)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\mathbf{E}\big((X_n^+)^p\big)^{\frac{1}{p}} \implies \\
&\implies \mathbf{E}\big((\overline{X}_n \wedge M)^p\big) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}\big((X_n^+)^p\big)
\end{aligned}$$

οπού η ανισότητα $(\star)$ προκύπτει από το 11 (ανισότητα Hölder) με $q = \frac{p}{p-1}$ (δηλάδη τέτοιο ώστε να ισχύει η προϋπόθεση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).
Από την τελευταία ανισότητα με εφαρμογή του Θεωρήματος 6 (μονότονης σύγκλισης) προκύπτει το ζητούμενο. □

Εφαρμογή (Ανισότητα Kolmogorov)**.** *Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες τ.μ. με $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}(X_i^2) = \sigma_i^2 \in (0,\infty)$ και $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ $n \geq 1$.Τότε,*

$$\mathbf{P}(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x) \leq \frac{1}{x^2}\,\mathbf{Var}(S_n)$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ και $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$. Η $(S_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale και η $Y_n = S_n^2$ είναι submartignale. Άρα από Θεώρημα 17 (μεγιστική ανισότητα Doob):

$$\mathbf{P}(\max\{S_1^2, \ldots, S_n^2\} \geq x^2) \leq \frac{1}{x^2}\,\mathbf{E}(S_n^2) = \frac{1}{x^2}\,\mathbf{Var}(S_n)$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Άσκηση 4. Έστω κάλπη Polyá (θυμηθείτε το Παράδειγμα 9) που περιέχει αρχικά r κόκκινες και b μπλε μπάλες, όπου $r, b > 0$. Έστω R_n (αντίστοιχα B_n) ο αριθμός των κόκκινων (αντίστοιχα μπλε) μπαλών μετά από n πειράματα.

1. Να αποδείξετε ότι η $Y_n = \frac{R_n}{n+r+b}$ $n \geq 0$ είναι martingale ως προς την $\mathcal{F}_{n n\geq 0}$, όπου $\mathcal{F}_n = \sigma(R_0, R_1, \ldots, R_n)$, $n \geq 0$.

2. Έστω T ο αριθμός των μπαλών που εξάγουμε μέχρι να εμφανιστεί μπλε μπάλα. Αν $r = b = 1$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{E}\big(\frac{1}{T+2}\big) = \frac{1}{4}$.

3. Αν $r = b = 1$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{P}(Y_n \geq \frac{3}{4}$ για κάποιο $n) \leq \frac{2}{3}$, όπου $Y_n = \frac{R_n}{n+r+b}$.

Λύση. 1. Υπολογίζουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}\left(\frac{R_{n+1}}{n+1+r+b} \,|\, \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{R_{n+1}}{n+1+r+b}\, 1_{R_{n+1}=R_n} + \frac{R_{n+1}}{n+1+r+b}\, 1_{R_{n+1}=R_n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \frac{R_n}{n+1+r+b}\, \mathbf{P}(1_{R_{n+1}=R_n}) + \frac{R_n+1}{n+1+r+b}\, \mathbf{P}(1_{R_{n+1}=R_n+1}) = \\
&= \frac{R_n}{n+1+r+b} \cdot \frac{n+r+b-R_n}{n+r+b} + \frac{R_n}{n+1+r+b} \cdot \frac{R_n+1}{n+r+b} = \\
&= \frac{1}{(n+1+r+b)(n+r+b)} \big(R_n(n+r+b-R_n) + (R_n+1)R_n\big) = \\
&= \frac{1}{(n+1+r+b)(n+r+b)} (n+r+b+1)R_n = \\
&= \frac{R_n}{n+r+b} = Y_n
\end{aligned}$$

2. Η $M_n = 1 - Y_n = \frac{B_n}{n+r+b}$ είναι martingale και $M_0 = \frac{1}{2}$ και $M_T = \frac{2}{T+2}$. Το Θεώρημα 14 (επιλεκτικής διακοπής) δίνει

$$\mathbf{E}(M_T) \overset{(\star)}{=} \mathbf{E}(M_0) \implies \mathbf{E}\left(\frac{1}{T+2}\right) = \frac{1}{4}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι ισχύει η ισότητα $(\star)$: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ και θα έχουμε το ζητούμενο αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο στην $\mathbf{E}(M_{T\wedge n} = \mathbf{E}(M_0)$.
Για $k \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T \geq k) &= \mathbf{P}(\text{τραβάμε κόκκινη μπάλα στα πειράματα } 1, 2 \ldots, k-1) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

και έχουμε αυτό που θέλουμε γιατί

$$\mathbf{P}(T = \infty) \leq \mathbf{P}(T \geq k) = \frac{1}{k} \to 0$$

3. Από Θεώρημα 17 (μεγιστική ανισότητα Doob) παίρνουμε ότι

$$\mathbf{P}\Big(\underbrace{\max_{1\le k\le n} Y_k \geq \frac{3}{4}}_{A_n}\Big) \leq \frac{1}{3/4}\,\mathbf{E}(Y_n^+) = \frac{4}{3}\,\mathbf{E}Y_n = \frac{4}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\Big\{Y_n \geq \frac{3}{4} \text{ για κάποιο } n\Big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

και επειδή η ακολουθία A_n είναι αύξουσα, παίρνουμε

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \frac{2}{3}$$

που δίνει το ζητούμενο.

□

Μάθημα 11 (Άσκηση - Σύζευξη)

Άσκηση 5. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες τ.μ. με

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n} \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1-\frac{1}{n} \\ -1, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n} \end{cases}$$

Θέτουμε $Y_1 = X_1$ και για $n \geq 2$

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{αν } Y_{n-1} = 0 \\ nY_{n-1}|X_n|, & \text{αν } Y_{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

και $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ για $n \geq 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1. Να αποδείξετε ότι η $(Y_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale ως προς $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
2. Να αποδείξετε ότι με πιθανότητα 1 το $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ δεν υπάρχει. Γιατί δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα Σύγκλισης των martingales (5);

Λύση. 1. Η Y_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη. Η Y_n μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$Y_n = X_n\, 1_{Y_{n-1}=0} \;+\; n\, Y_{n-1}|X_n|\, 1_{Y_{n-1}\neq 0}$$

και άρα

$$|Y_n| \leq |X_n| + n\,|Y_{n-1}||X_n| \leq 1 + n\,|Y_{n-1}|$$

και έπεται ότι $\mathbf{E}|Y_n| < \infty$ γιατί $|Y_1| = |X_1| \leq 1$ και μπορεί να υπολογιστεί φράγμα για την $\mathbf{E}|Y_n|$ για κάθε σταθερό n.
Μας μένει να δείξουμε ότι $\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}(Y_n \,|\, Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = Y_{n-1}$. Το κάνουμε πρώτα "εμπειρικά" διακρίνοντας περιπτώσεις για το Y_{n-1}:

- Αν $Y_{n-1} = 0$, τότε $Y_n = X_n$ και η μέση τιμή είναι $\mathbf{E}(X_n \,|\, Y_1, \ldots Y_{n-1}) = \mathbf{E}X_n = 0 = Y_{n-1}$.
- Αν $Y_{n-1} \neq 0$, τότε $Y_n = n\,Y_{n-1}|X_n|$ και η μέση τιμή είναι $\mathbf{E}(n\,Y_{n-1}|X_n| \,|\, Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = n\,Y_{n-1}\mathbf{E}(|X_n| \,|\, Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = n\,Y_{n-1}\mathbf{E}X_n = n\,Y_{n-1}\frac{1}{n} = Y_{n-1}$.

Διαφορετικά (πιο τυπικά) μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbf{E}(X_n\, 1_{Y_{n-1}=0} + n\,Y_{n-1}|X_n|\,1_{Y_{n-1}\neq 0} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \\
&= \mathbf{E}(X_n\, 1_{Y_{n-1}=0} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbf{E}(n\,Y_{n-1}|X_n|\,1_{Y_{n-1}\neq 0} \,|\, \mathcal{F}_n) = \\
&= 1_{Y_{n-1}=0}\,\mathbf{E}X_n + n\,Y_{n-1}\,1_{Y_{n-1}\neq 0}\,\mathbf{E}|X_n| = \\
&= 0 + n\,Y_{n-1}\frac{1}{n} = Y_{n-1}
\end{aligned}$$

2. Από τον ορισμό της Y_n ισχύει ότι αν $X_{n-1} = 0$ (που σημαίνει ότι $Y_{n-1} = 0$) και $X_n = 1$, τότε $Y_n = 1$. Δηλαδή $B_n = \{X_{n-1} = 0, X_n = 1\} \subset \{Y_n = 1\}$ και έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(B_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{4n}$$

Τα ενδεχόμενα $(B_n)_{n\geq 1}$ δεν είναι ανεξάρτητα όμως τα $(B_{2n})_{n\geq 1}$ είναι και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_{2n}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n} = \infty.$$

Συνεπώς, από δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli (2), παίρνουμε $\mathbf{P}(\limsup B_{2n}) = 1$ και άρα για $\omega \in \limsup B_{2n}$, ισχύει $Y_n(\omega) = 1$ για άπειρα n. Επειδή έχουμε επίσης ότι $Y_n(\omega) = 0$ για άπειρα n, συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα να υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ είναι 0.
Το Θεώρημα Σύγκλισης των martingales έχει ως προϋπόθεση ότι $\sup\limits_{n\geq 1} \mathbf{E}(Y_n^+) < \infty$. Στην περίπτωσή μας αυτό δεν ισχύει γιατί

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n^+) &= \mathbf{E}(X_n^+ 1_{Y_{n-1}=0}) + \mathbf{E}(n\, Y_{n-1}^+ |X_n|\, 1_{Y_{n-1}\neq 0}) = \\
&= \frac{1}{2n}\mathbf{P}(Y_{n-1}=0) + n\, \mathbf{E}(Y_{n-1}^+ 1_{Y_{n-1}\neq 0})\mathbf{E}(|X_n|) = \\
&= \frac{1}{2n}\mathbf{P}(Y_{n-1}=0) + \mathbf{E}(Y_{n-1}^+) \geq \\
&\geq \frac{1}{2n}\mathbf{P}(X_{n-1}=0) + \mathbf{E}(Y_{n-1}^+) = \\
&= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) + \mathbf{E}(Y_{n-1}^+)
\end{aligned}$$

και επειδή $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}(1 - \frac{1}{n-1}) = \infty$ παίρνουμε ότι $\sup\limits_{n\geq 1} \mathbf{E}(Y_n^+) = \infty$.

□

Σύζευξη (Coupling)

Έστω $\big((E_i, \mathcal{E}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια μετρήσιμων χώρων, $\big((\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια χώρων πιθανότητας και $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ένας χώρος πιθανότητας και $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια τ.μ. με $X_i : \Omega_i \to E_i$. **Σύζευξη** των $(X_i)_{i\in I}$ καλούμε μια οικογένεια τ.μ. $(\hat{X}_i)_{i\in I}$ με $\hat{X}_i : \Omega \to E_i$, τέτοια ώστε $X_i \overset{d}{=} \hat{X}_i$. Δηλαδή $\mathbf{P}_i(X_i \in A) = \mathbf{P}(\hat{X}_i \in A)$, $\forall A \in \mathcal{E}_i$.
Η κατανομή της X_i είναι το μέτρο $\mathbf{P}^{X_i} : \mathcal{E}_i \to [0,1]$ με $\mathbf{P}^{X_i} = P_i(X_i \in A)$, το οποίο είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(E_i, \mathcal{E}_i)$.

Παράδειγμα 12. Έστω X, Y τ.μ. ώστε $X \sim \mathsf{Bernoulli}\big(\frac{1}{2}\big)$ και $Y \sim \mathsf{Bernoulli}\big(\frac{3}{4}\big)$. Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \big((0,1), \mathcal{B}\big((0,1)\big), \lambda\big)$ και $U : \Omega \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφη τ.μ. (δηλαδή $F_U(x) = x$). Θέτουμε $\hat{X} = 1_{U\leq 1/2}$ και $\hat{Y} = 1_{U\leq 3/4}$ και έχουμε

$$\mathbf{P}(\hat{X} = 1) = \mathbf{P}(U \leq 1/2) = 1/2 \;\text{ και }\; \mathbf{P}(\hat{X} = 0) = 1/2,$$

συνεπώς $\hat{X} \overset{d}{=} X$ και

$$\mathbf{P}(\hat{Y} = 1) = \mathbf{P}(U \leq 3/4) = 3/4 \;\text{ και }\; \mathbf{P}(\hat{Y} = 0) = 1/4,$$

συνεπώς $\hat{Y} \stackrel{d}{=} Y$.
Άρα η $(\hat{X}, \hat{Y})$ είναι σύζευξη των (X, Y). Παρατηρούμε ότι $\hat{X} \leq \hat{Y}$ και συνεπώς οι $\hat{X}$ και $\hat{Y}$ είναι εξαρτημένες.
Αν θέλουμε να φτιάξουμε σύζευξη με ανεξάρτητες τ.μ., μπορούμε να ορίσουμε $\hat{X} = 1_{U_1 \leq 1/2}$ και $\hat{Y} = 1_{U_2 \leq 3/4}$, όπου $U_1, U_2 \sim \mathsf{U}(0,1)$ ανεξάρτητες.

Ο μετασχηματισμός ποσοστημορίων (quantile transform). Έστω $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ συνάρτηση κατανομής, δηλαδή αύξουσα, δεξιά συνεχής και $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Θέτουμε

$$G : (0,1) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$$

και παρατηρούμε ότι αν η F είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής τότε $G(u) = F^{-1}(u)$. Ισχύει ότι

$$G(u) \leq y \iff F(y) \geq u$$

- Αν $F(y) \geq u$, τότε $y \in \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\} = A_u$ και συνεπώς $\inf A_u = G(u) \leq y$.

- Έστω ότι $G(u) \leq y$. Για κάθε $n \geq 1$, υπάρχει $t_n \in A_n$ με $t_n \leq y + \frac{1}{n}$ και $u \leq F(t_n) \leq F(y + \frac{1}{n})$. Επειδή η F είναι δεξιά συνεχής παίρνουμε ότι $u \leq \lim_{n\to\infty} F(y + \frac{1}{n}) = F(y)$.

Μάθημα 12 (Σύζευξη - Απόσταση ολικής κύμανσης)

Πρόταση 13. *Έστω $U \sim \mathsf{U}(0,1)$ και F συνάρτηση κατανομής. Τότε η $G(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής την F.*

Απόδειξη. Για $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(G(U) \le x) = \mathbf{P}(U \le F(x)) = F(x)$. □

Παρατηρήσεις.

1. Αν X τ.μ., γράφουμε F_X και G_X για τη συνάρτηση κατανομής της X και τον μετασχηματισμό ποσοστημορίων της F_X, αντίστοιχα.
2. Αν $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $U \sim \mathsf{U}(0,1)$, τότε η οικογένεια $\big(G_{X_i}(U)\big)_{i\in I}$ είναι μία σύζευξη των $(X_i)_{i\in I}$.
3. Ο G_X χρησιμοποιείται για να δείξουμε το εξής:
   Αν $X_n \xrightarrow{P} X$, τότε υπάρχουν τ.μ. $(\hat{X}_n)_{n\ge 1}, \hat{X}$ με $\hat{X}_n \stackrel{d}{=} X_n$ και $\hat{X} \stackrel{d}{=} X$, και επιπλέον $\hat{X}_n \xrightarrow{as} \hat{X}$.
   Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας $\hat{X}_n = G_{X_n}(U)$ και $\hat{X} = G_X(U)$, όπου $U \sim \mathsf{U}(0,1)$.

Ορισμός 7. Έστω $(\mu_i)_{i\in I}$ μέτρα πιθανότητας στους χώρους $\big((E_i,\mathcal{E}_i)\big)_{i\in I}$. **Σύζευξη** των $(\mu_i)_{i\in I}$ λέμε μια οικογένεια τ.μ. $(X_i)_{i\in I}$ ώστε $X_i : \Omega \to E_i$, $\forall i \in I$ και $P^{X_i} = \mu_i$, $\forall i \in I$, όπου $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ο χώρος πιθανότητας στον οποίον ορίζονται οι $(X_i)_{i\in I}$.

Παράδειγμα 13. Αν $\nu = \mu$ είναι τα ομοιόμορφα μέτρα στο $\{0,1\}$, τότε μια σύζευξη είναι η $X = Y = 1_{U\le 1/2}$, όπου $U \sim \mathsf{U}(0,1)$.
Άλλη είναι να πάρουμε $\Omega = \big\{\{0,0\},\{0,1\},\{1,0\},\{1,1\}\big\}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X\big((\omega_1,\omega_2)\big) = \omega_1$, $Y\big((\omega_1,\omega_2)\big) = \omega_2$ και $\mathbf{P}(\{\omega_1,\omega_2\}) = 1/4$.

Ορισμός 8. Έστω μ και ν μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(E,\mathcal{E})$. **Απόσταση ολικής κύμανσης** (total variation distance) των μ και ν λέμε την ποσότητα

$$\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) = \sup_{A\in\mathcal{E}} |\mu(A) - \nu(A)|$$

Πρόταση 14. *Έστω μ και ν διακριτά μέτρα πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(E,\mathcal{E})$ (δηλαδή υπάρχουν $A_1, A_2 \subseteq E$ αριθμήσιμα τέτοια ώστε $\mu(E\setminus A_1) = \nu(E \setminus A_2) = 0$). Τότε (υποθέτοντας ότι το E είναι αριθμήσιμο) ισχύει*

$$\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\sum_{x\in E} |\mu(\{x\}) - \nu(\{x\}|$$

Απόδειξη. Έστω $p_x = \mu(\{x\})$, $q_x = \nu(\{x\})$ για κάθε $x \in E$, και $A_0 = \{x \in E : p_x \ge q_x\}$. Τότε, για κάθε $A \subset E$ έχουμε:

$$\mu(A) - \nu(A) = \sum_{x\in A}(p_x - q_x) \le \sum_{x\in A_0}(p_x - q_x)$$
$$\nu(A) - \mu(A) = 1 - \nu(A^c) - \big(1 - \mu(A^c)\big) = \mu(A^c) - \nu(A^c) \le \sum_{x\in A_0}(p_x - q_x)$$

και άρα $\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) \leq \sum_{x\in A_0}(p_x - q_x)$. Επίσης, $\mu(A_0) - \nu(A_0) = \sum_{x\in A_0}(p_x - q_x)$ και συνεπώς

$$\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) = \sum_{x\in A_0}(p_x - q_x) = \sum_{x\in A_0^c}(q_x - p_x) = \sum_{x\in A_0^c}|p_x - q_x|$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε

$$2\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) = \sum_{x\in E}|p_x - q_x| \iff \mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\sum_{x\in E}|p_x - q_x|$$

□

Πρόταση 15. *Έστω μ και ν μέτρα πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(E,\mathcal{E})$ και (X,Y) σύζευξη των μ,ν. Τότε $\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) \leq \mathbf{P}(X \neq Y)$.*

Απόδειξη. Για $A \in \mathcal{E}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu(A) - \nu(A) &= \mathbf{P}(X\in A) - \mathbf{P}(Y\in A) = \\
&= \mathbf{P}(X\in A, X = Y) + \mathbf{P}(X\in A, X\neq Y) - \mathbf{P}(Y\in A) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(Y\in A) + \mathbf{P}(X\neq Y) - \mathbf{P}(Y\in A) = \mathbf{P}(X\neq Y)
\end{aligned}$$

και έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 19. *Έστω μ και ν (διακριτά) μέτρα πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(E,\mathcal{E})$ και E αριθμήσιμο. Τότε, υπάρχει σύζευξη $(\hat{X},\hat{Y})$ των μ,ν ώστε*

$$\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) = \mathbf{P}(\hat{X}\neq\hat{Y})$$

Απόδειξη. Έστω $p_x = \mu(\{x\})$, $q_x = \nu(\{x\})$ για κάθε $x \in E$. Ορίζουμε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $\hat{X}$ και $\hat{Y}$ στον $E\times E$:
Έστω $a_x = p_x \wedge q_x$. Θέτουμε $f(x,x) = a_x$ και

$$f(x,y) = \frac{(p_x - a_x)(q_y - a_y)}{\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu)}, \quad \text{για } x \neq y$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) &= \frac{1}{2}\sum_{x\in E}|p_x - q_x| = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{x\in E\\ p_x\geq q_x}}(p_x - q_x) + \sum_{\substack{x\in E\\ p_x\leq q_x}}(q_x - p_x)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\sum_{\substack{x\in E\\ p_x\geq q_x}}(p_x - q_x) = \sum_{\substack{x\in E\\ p_x\geq q_x}}(p_x - q_x)
\end{aligned}$$

και γι'αυτό, ισχύει το εξής

$$\sum_{x \in E} (p_x - a_x) = \sum_{x \in E} \big(p_x - (p_x \wedge q_x)\big) = \sum_{\substack{x \in E \\ p_x \geq q_x}} (p_x - q_x) = \mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu, \nu)$$

Ισχυρισμός. Ισχύουν τα: $\sum\limits_{y \in E} f(x,y) = p_x, \ \forall x \in E$ και $\sum\limits_{x \in E} f(x,y) = q_y, \ \forall y \in E.$

Αποδεικνύουμε μόνο το πρώτο:

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in E} f(x,y) &= f(x,x) + \sum_{\substack{y \in E \\ y \neq x}} f(x,y) = \\
&= p_x \wedge q_x + \frac{(p_x - a_x)}{\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu)} \big(\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu) - (q_x - a_x)\big) = \\
&= a_x + (p_x - a_x) - \frac{(p_x - a_x)(q_x - a_x)}{\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu,\nu)} = p_x
\end{aligned}$$

Λόγω του ισχυρισμού, η $(\hat{X}, \hat{Y})$ είναι σύζευξη των μ και ν. Τέλος

$$\mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) = \sum_{x \in E} \sum_{\substack{y \in E \\ y \neq x}} f(x,y) = \sum_{x \in E} \big(p_x - (p_x \wedge q_x)\big) = \sum_{\substack{x \in E \\ p_x \geq q_x}} (p_x - q_x) = \mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(\mu, \nu)$$

$\square$

Παράδειγμα 14. Έστω οι τ.μ. $X \sim \mathsf{Bernoulli}(p)$ και $Y \sim \mathsf{Poisson}(p)$. Θέτουμε $p_0 = 1 - p$, $p_1 = p$ και $q_k = e^{-p} \frac{p^k}{k!}$ και βρίσκουμε τη σύζευξη $(\hat{X}, \hat{Y})$ του παραπάνω θεωρήματος ορίζοντας κοινή συνάρτητη κατανομής των $\hat{X}, \hat{Y}$:

$$\begin{gathered}
f(0,0) = p_0 \wedge q_0 = (1-p) \wedge e^{-p} = 1 - p \\
f(1,1) = p_1 \wedge q_1 = p \wedge e^{-p} p = p e^{-p} \\
\vdots
\end{gathered}$$

και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) &= 1 - \mathbf{P}(\hat{X} = \hat{Y}) = 1 - \big(f(0,0) + f(1,1)\big) = \\
&= 1 - (1 - p + pe^{-p}) = p - pe^{-p} = \underbrace{p(1 - e^{-p})}_{\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}(X,Y)} \leq p
\end{aligned}$$

Μάθημα 13 (Σύζευξη/εφαρμογές - Στοχαστική κυριαρχία - size-biased μετασχηματισμός)

Θεώρημα 20. *Έστω $(I_i)_{1\leq i\leq n}$ ανεξάρτητες τ.μ. με $I_i \sim \mathsf{Bernoulli}(p_i)$, $i \in [n]$, $X = \sum\limits_{i=1}^{n} I_i$, $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ και $Y \sim \mathsf{Poisson}(\lambda)$. Τότε, υπάρχει σύζευξη $(\hat{X}, \hat{Y})$ των X και Y ώστε $\mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\big((\hat{I}_i, \hat{J}_i)\big)_{1\leq i\leq n}$ ανεξάρτητες ώστε η $(\hat{I}_i, \hat{J}_i)$ να είναι σύζευξη των I_i, J_i, όπου $J_i \sim \mathsf{Poisson}(p_i)$.
Θέτουμε $\hat{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{I}_i$ και $\hat{Y} = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{J}_i$. Τότε, $\hat{X} \overset{d}{=} X$ και $\hat{Y} \overset{d}{=} Y \sim \mathsf{Poisson}(\lambda)$ και

$$\mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\hat{I}_i \neq \hat{J}_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

Συνέπεια: $\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}\big((\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)\big) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2$, όπου $\mathcal{L}(X)$ και $\mathcal{L}(Y)$ οι κατανομές των X και Y αντίστοιχα.
Για παράδειγμα, αν $p_i = \frac{\lambda}{n}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, τότε παίρνουμε

$$\mathsf{d}_{\mathsf{TV}}\left(\mathsf{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right), \mathsf{Poisson}(\lambda)\right) \leq \frac{\lambda^2}{n}$$

$\square$

Πρόταση 16 (Ανισότητα FGK). *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άυξουσες συναρτήσεις και X τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$ με $\mathbf{E}f(X), \mathbf{E}g(X), \mathbf{E}\big(f(X)\, g(X)\big) < \infty$. Τότε $\mathbf{E}\big(f(X)\, g(X)\big) \geq \mathbf{E}f(X)\, \mathbf{E}g(X)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε σε χώρο πιθανότητας τις τ.μ. X_1, X_2 με $X_1 \overset{d}{=} X_2 \overset{d}{=} X$ και X_1, X_2 ανεξάρτητες (δηλαδή η (X_1, X_2) είναι σύζευξη της (X, X)). Τότε

$$\begin{aligned}
& \big(f(X_1) - f(X_2)\big)\big(g(X_1) - g(X_2)\big) \geq 0 \\
\Longrightarrow\quad & f(X_1)g(X_1) - f(X_1)g(X_2) - f(X_2)g(X_1) + f(X_2)g(X_2) \geq 0 \\
\Longrightarrow\quad & \mathbf{E}\big(f(X_1)g(X_1)\big) - \mathbf{E}\big(f(X_1)g(X_2)\big) - \mathbf{E}\big(f(X_2)g(X_1)\big) + \mathbf{E}\big(f(X_2)g(X_2)\big) \geq 0 \\
\Longrightarrow\quad & 2\,\mathbf{E}\big(f(X)g(X)\big) - 2\,\mathbf{E}\big(f(X)\big)\mathbf{E}\big(g(X)\big) \geq 0 \\
\Longrightarrow\quad & \mathbf{E}\big(f(X)g(X)\big) \geq \mathbf{E}\big(f(X)\big)\,\mathbf{E}\big(g(X)\big)
\end{aligned}$$

$\square$

Πρόταση 17. *Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \sim \mathsf{Bernoulli}(p_1)$, $\forall i \geq 1$ και $(Y_j)_{j\geq 1}$ ανεξάρτητες τ.μ. με $Y_i \sim \mathsf{Bernoulli}(p_2)$, $\forall j \geq 1$, όπου $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$. Τότε για κάθε $a \in R$ ισχύει*

$$\mathbf{P}(\underbrace{X_1 + \ldots + X_n}_{\sim \mathsf{Bin}(n, p_1)} \leq a) \geq \mathbf{P}(\underbrace{Y_1 + \ldots + Y_n}_{\sim \mathsf{Bin}(n, p_2)} \leq a)$$

Απόδειξη. Κάνουμε την εξής σύζευξη των $\{X_i, Y_i : 1 \le i \le n\}$: Έστω $U_i \sim \mathsf{U}(0,1)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ ανεξάρτητες τ.μ. Θέτουμε $\hat{X}_i = 1_{U_i \le p_1}$ και $\hat{Y}_i = 1_{U_i \le p_2}$.
Οι τ.μ. $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ είναι ανεξάρητες μεταξύ τους και $\mathbf{P}(\hat{X}_i = 1) = \mathbf{P}(U_i \le p_1) = p_1$ και άρα $\hat{X}_i \sim$ Bernoulli(p_1), για κάθε $i \in [n]$.
Οι τ.μ. $\{Y_i : 1 \le i \le n\}$ είναι ανεξάρητες μεταξύ τους και $\mathbf{P}(\hat{Y}_i = 1) = \mathbf{P}(U_i \le p_2) = p_2$ και άρα $\hat{Y}_i \sim$ Bernoulli(p_2), για κάθε $i \in [n]$. Επίσης, έχουμε $\hat{X}_i \le \hat{Y}_i$ για κάθε $i \in [n]$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n \le a) &= \mathbf{P}(\hat{X}_1 + \ldots + \hat{X}_n \le a) \ge \\ &\ge \mathbf{P}(\hat{Y}_1 + \ldots + \hat{Y}_n \le a) = \mathbf{P}(Y_1 + \ldots + Y_n \le a) \end{aligned}$$

□

Υπενθύμιση για γράφημα $\mathsf{G}(n,p)$**:** Έστω $E_0 = \big\{\{i,j\} : i \ne j,\ \forall i,j \in [n]\big\}$. Κρατάμε κάθε ακμή του E_0 ανεξάρτητα με πιθανότητα p. Προκύπτει έτσι ένα τυχαίο γράφημα, έστω $([n], E_p) = G_p$.

Πρόταση 18. *Έστω $f(p) = \mathbf{P}(G_p$ συνεκτικό γράφημα$)$. Τότε η f είναι αύξουσα.*

Απόδειξη. Έστω $m = \binom{n}{2}$ και $\{e_1, \dots, e_m\} = E_0$.
Θεωρούμε $U_1, \dots, U_m \sim \mathsf{U}(0,1)$ ανεξάτtητες και θέτουμε $\hat{E}_p = \{e_i : U_i \le p\}$. Τότε, για $p_1 \le p_2$ ισχύει $\hat{E}_{p_1} \subseteq \hat{E}_{p_2}$. Άρα αν το γράφημα $G_{p_1} = ([n], \hat{E}_{p_1})$ είναι συνεκτικό, τότε και το $G_{p_2} = ([n], \hat{E}_{p_2})$ είναι συνεκτικό. Συνεπώς

$$f(p_1) = \mathbf{P}(G_{p_1} \text{ συνεκτικό}) \le \mathbf{P}(G_{p_2} \text{ συνεκτικό}) = f(p_2)$$

□

Ορισμός 9 (Στοχαστική κυριαρχία)**.** Έστω X, Y τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η Y **κυριαρχεί στοχαστικά** την X (γράφουμε $X \preceq Y$) αν ισχύει $\mathbf{P}(X \le t) \ge \mathbf{P}(Y \le t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 19. *Ισχύει ότι $X \preceq Y$ αν και μόνο αν υπάρχει σύζευξη $(\hat{X}, \hat{Y})$ των X, Y ώστε $\mathbf{P}(\hat{X} \le \hat{Y}) = 1$.*

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$): Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $F_X(t) = \mathbf{P}(X \le t) = \mathbf{P}(\hat{X} \le t) \ge \mathbf{P}(\hat{Y} \le t) = F_Y(t)$.
($\Longrightarrow$): Έστω $U \sim \mathsf{U}(0,1)$ και G_X και G_Y οι μετασχηματισμοί ποσοστημορίων των X και Y, αντίστοιχα. Θέτουμε $\hat{X} = G_X(U)$ και $\hat{Y} = G(U)$. Τότε $\hat{X} \overset{d}{=} X$, $\hat{Y} \overset{d}{=} Y$ και $\hat{X}(\omega) \le \hat{Y}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, γιατί $G_X(a) \le G_Y(a)$ για κάθε $a \in (0,1)$.
Παρατηρούμε ότι αν η X έχει πυκνότητα $f(x)$ και $\mu = \mathbf{E}X$, τότε

$$\mathbf{P}(X^* \le \mu) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{t} x f(x)\, dx \implies f_{X^*}(t) = \frac{1}{\mu}\, t\, f(t)$$

□

Size-biased μετασχηματισμός τυχαίων μεταβλητών. Έστω τ.μ. με τιμές στο $[0,\infty]$ και $\mathbf{E}X < \infty$. Ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής

$$F^*(t) = \frac{\mathbf{E}(X\, 1_{X \le t})}{\mathbf{E}X}.$$

Μια τ.μ. X^* με συνάρτηση κατανομής την F^* λεγεται **size-biased μετασχηματισμός της** X.

Θεώρημα 21. *Έστω τ.μ. X με τιμές στο $[0,\infty]$ και $\mathbf{E}X < \infty$. Τότε $X \preceq X^*$.*

Απόδειξη. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $F^*(t) \le F_X(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή ότι

$$\frac{\mathbf{E}(X\, 1_{X \le t})}{\mathbf{E}X} \le \mathbf{P}(X \le t)$$

ή ισοδύναμα ότι $\mathbf{E}(X\, 1_{X \le t}) \le \mathbf{E}X\mathbf{E}(1_{X \le t})$, το οποίο έπεται από την Πρόταση 16 (ανισότητα FGK) για τις αύξουσες συναρήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = 1_{x \le t}$. □

Μάθημα 14 (Κλαδωτές ανελίξεις - Εξαφάνιση)

Κλαδωτές ανελίξεις (branching processes). Έστω $\{X_{n,i} : n \geq 1, i \geq 1\}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$.

Ορίζουμε $Z_0 = 1$ και $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{n,k}$, για $n \geq 1$. Θέτουμε το άθροισμα να είναι μηδέν αν $Z_{n-1} = 0$. Η $(Z_n)_{n \geq 0}$ λέγεται **κλαδωτή ανέλιξη** ή **ανέλιξη Galton-Watson**.
Συμβολίζουμε με X την τ.μ. $X_{1,1}$ και ορίζουμε την κατανομή απογόνων

$$p_k = \mathbf{P}(X = k),\ k \in \mathbb{N}$$

και $\mu = \mathbf{E}X$ τη μέση τιμή της X.
Αν $Z_n = 0$ για κάποιο $n \geq 1$, τότε λέμε ότι έχουμε **εξαφάνιση** (extinction) και ορίζουμε την πιθανότητα εξαφάνισης

$$\eta = \mathbf{P}(\exists\, n \geq 1 : Z_n = 0)$$

και $G_X(s) = \mathbf{E}(s^X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k s^k$.

Θεώρημα 22. *Ο αριθμός η είναι η μικρότερη λύση της εξίσωσης $G_X(s) = s$ στο $[0, 1]$.*

Απόδειξη. Έστω $A_n = \{Z_n = 0\}$ και $\eta_n = \mathbf{P}(Z_n = 0)$. Τότε, επειδή η A_n, είναι αύξουσα έχουμε ότι

$$\eta = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \eta_n$$

Έστω $G_n(s) = \mathbf{E}(s^{Z_n}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z_n = k)s^k$. Τότε έχουμε ότι $\eta_n = G_n(0)$ (δηλαδή το η_n είναι ίσο με τον σταθερό όρο της τυπικής δυναμοσειράς $G_n(s)$). Για $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
G_n(s) = \mathbf{E}(s^{Z_n}) &= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(s^{Z_n} \,\big|\, Z_1)\big) = \\
&= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(s^{R_1+\ldots+R_{Z_1}} \,\big|\, Z_1)\big) = \\
&= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(s^{R_1})^{Z_1}\big) = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(s^{Z_{n-1}})^{Z_1}\big) = \\
&= \mathbf{E}\big(G_{n-1}(s)^X\big) = G_X\big(G_{n-1}(s)\big),
\end{aligned}$$

όπου $Z_n = R_1 + \ldots + R_{Z_1}$ με $R_1, \ldots, R_{Z_1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή Z_{n-1}.
Η παραπάνω ισότητα ισχύει και για $n = 1$ γιατί $G_0(s) = \mathbf{E}(s^{Z_1}) = s$.
Για $s = 0$ έχουμε $G_n(0) = G_X\big(G_{n-1}(0)\big)$ άρα $\eta_n = G_X(\eta_{n-1})$ και για $n \to \infty$ παίρνουμε $\eta = G_X(\eta)$. Μένει να αποδείξουμε ότι η η είναι η ελάχιστη λύση.
Έστω $a \in [0, 1]$ με $G_X(a) = a$. Τότε ισχύει $\eta_0 \leq a$ γιατί $\eta_0 = \mathbf{P}(Z_0 = 0) = 0$. Επειδή η G_X είναι αύξουσα έχουμε

$$G_X(\eta_0) \leq G_X(a) = a \implies \eta_1 \leq a$$

και εφαρμόζοντας επαγωγικά το ίδιο επιχείρημα, παίρνουμε ότι $\eta_n \leq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\eta \leq a$. $\square$

Παρατήρηση. *Το* $s = 1$ *είναι πάντα λύση της* $s = G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ *γιατί* $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Θεώρημα 23. *Για* $\mu = \mathbf{E}X$ *και η πιθανότητα εξαφάνισης, ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν* $\mu < 1$*, τότε* $\eta = 1$.
2. *Αν* $\mu = 1$ *και* $\mathbf{P}(X = 1) < 1$*, τότε* $\eta = 1$.
3. *Αν* $\mu > 1$*, τότε* $\eta < 1$.

Απόδειξη. Έχουμε $G_X(s) = \mathbf{E}(s^X)$ άρα $G'_X(s) = \mathbf{E}(X\, s^{X-1}) \geq 0$ και $G''_X(s) = \mathbf{E}(X(X-1)\, s^{X-2}) \geq 0$.
Η G_X είναι αύξουσα και κυρτή και $G'_X(1) = \mathbf{E}X = \mu$. Αν $G_X(0) = 0$ τότε $\eta = 0$.

1. Αν $\mu < 1$, τότε $G'_X(1) < 1$. Αν η $G_X(s) = s$ είχε λύση $s_0 < 1$, τότε θα έπρεπε (λόγω κυρτότητας) $G_X(1) \geq 1$, άτοπο. Άρα $\eta = 1$.
2. Αν $\mu < 1$, τότε $G'_X(1) = 1$. Αν η $G_X(s) = s$ είχε λύση $s_0 < 1$, τότε θα έπρεπε $G_X(s) = s, \forall s \in (s_0, 1)$ και άρα $G_X(s) = s, \forall s \in [0, 1]$ που σημαίνει ότι $p_1 = \mathbf{P}(X = 1) = 1$, άτοπο. Άρα $\eta = 1$.
3. Επειδή $G_X(0) > 0$ και $G'_X(1) > 1$, οι $f(s) = G_X(s)$ και $g(s) = s$ συναντιούνται και στο $(0, 1)$ και άρα $\eta < 1$.
   Αν $\zeta = 1 - \eta = \mathbf{P}(Z_n > 0, \forall n \in \mathbb{N})$, τότε $\mu > 1 \;\Rightarrow\; \zeta > 0$ (θετική πιθανότητα επιβίσωσης).

□

Ορισμός 10. Ονομάζουμε μια κλαδωτή ανέλιξη **υποκρίσιμη** (*subcritical*) αν $\mu < 1$, **κρίσιμη** (*critical*) αν $\mu = 1$ και $\mathbf{P}(X = 1) < 1$, **υπερκρίσιμη** (*supercritical*) αν $\mu > 1$.

Άσκηση 6. Έστω ότι η X έχει κατανομή $p_0 = 1 - p$, $p_2 = p$ για κάποιο $p \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι

$$\eta = \frac{1-p}{p}, \text{ αν } p > \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \eta = 1, \text{ αν } p \leq \frac{1}{2}$$

Λύση. Έχουμε ότι $\mu = \mathbf{E}X = 0(1 - p) + 2p = 2p$. Από Θεώρημα 23 παίρνουμε τα εξής:

- Αν $p < 1/2$, τότε $\mu < 1$ και άρα $\eta = 1$.
- Αν $p = 1/2$, τότε $\mu = 1$ και άρα $\eta = 1$ (γιατί $\mathbf{P}(X = 1) = 0 < 1$).
- Αν $p > 1/2$, τότε η η είναι η ελάχιστη λύση της εξίσωσης $G_X(s) = s$, δηλαδή της $p_0 s^0 + p_s s^2 = s$ ή ισοδύναμα της $ps^2 - s + (1 - p)$. Λύνοντας με διακρίνουσα βρίσκουμε τις λύσεις 1 και $\frac{1-p}{p}$ και άρα $\eta = \frac{1-p}{p}$.

$\square$

Παρατήρηση. *Ορίζουμε* $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n$ *και* $G_T(s) = \mathbf{E}(s^T)$. *Αν* $T = \infty$, *για* $s < 1$ *ισχύει* $s^T = 0$, *οπότε* $G_T(s) = \mathbf{E}(s^T 1_{T<\infty})$ *και άρα* $\lim\limits_{s\to 1} G_T(s) = \mathbf{P}(T < \infty) = \eta$.

Θεώρημα 24. *Ισχύει ότι* $G_T(s) = s\, G_X\big(G_T(s)\big)$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $T = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ και άρα

$$\begin{aligned}
G_T(s) = \mathbf{E}(s^T) &= \mathbf{E}\Big(s^{1+\sum_{n=1}^{\infty} Z_n}\Big) = \\
&= s\,\mathbf{E}\Big(s^{\sum_{n=1}^{\infty} Z_n}\Big) = \\
&= s\,\mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\big(s^{\sum_{n=1}^{\infty} Z_n} \,\big|\, Z_1\big)\Big) = \\
&= s \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\big(s^{\sum_{n=1}^{\infty} Z_n} \,\big|\, Z_1 = k\big)\mathbf{P}(Z_1 = k) = \\
&= s \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\big(s^{T^{(1)}} + \ldots + s^{T^{(k)}} \,\big|\, Z_1 = k\big)\mathbf{P}(X = k) = \\
&= s \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(s^T)^k\, \mathbf{P}(X = k) = \\
&= s \sum_{k=0}^{\infty} \big(G_T(s)\big)^k\, \mathbf{P}(X = k) = s\, G_X\big(G_T(s)\big),
\end{aligned}$$

όπου για την πέμπτη γραμμή παραπάνω, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Z_n \,\big|\, Z_1 = k) \overset{d}{=} T^{(1)} + \ldots + T^{(k)}$ με $T^{(1)}, \ldots, T^{(k)}$ ανεξάρτητες και ισόνομες με $T^{(i)} \overset{d}{=} T$, $\forall i \in [k]$. $\square$

Μάθημα 15 (Η κλαδωτή ανέλιξη ως τυχαίος περίπατος)

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει $Z_0 = 1$ και $Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}$, $\forall n \geq 1$, όπου η τ.μ. Z_n αντιστοιχεί στο πλήθος των ατόμων της n-οστής γενιάς. Επίσης θέσαμε $\mu = \mathbf{E}X_{1,1}$.

Πρόταση 20. *Ισχύει ότι* $\mathbf{E}Z_n = \mu^n$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\mathbf{E}Z_n = \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(Z_n \,\big|\, Z_{n-1})\big) = \mathbf{E}(Z_{n-1}\,\mu) = \mu\,\mathbf{E}(Z_{n-1}),$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την

$$\phi(x) = \mathbf{E}(Z_n \,\big|\, Z_{n-1} = x) = \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{x} X_{n,i}\Big) = \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{x} X_{n,i}\Big) = x\mu$$

θέτοντας όπου $x = Z_{n-1}$. Από αναδρομική σχέση $\mathbf{E}Z_n = \mu\mathbf{E}(Z_{n-1})$ με αρχική συνθήκη $Z_0 = 1 = \mu^0$, παίρνουμε με επαγωγή ότι $\mathbf{E}Z_n = \mu^n$. $\square$

Θεώρημα 25. *Ισχύει ότι* $\mathbf{P}(Z_n > 0) \leq \mu^n$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) = \mathbf{P}(Z_n \geq 1) \overset{Markov}{\leq} \mathbf{E}Z_n = \mu^n$$

Προφανώς, το φράγμα αυτό είναι χρήσιμο μόνο όταν $\mu < 1$. $\square$

Θεώρημα 26. *Αν* $\mu < 1$, *τότε* $\mathbf{E}T = \frac{1}{1-\mu}$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $T = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$. Υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}T = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(Z_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k = \frac{1}{1-\mu}$$

$\square$

Ο τυχαίος περίπατος που παράγεται από μία κλαδωτή ανέλιξη. Εξερευνούμε το δέντρο της κλαδωτής ανέλιξης ως εξής:

- Όταν επισκεπτόμαστε ένα ενεργό άτομο, το καθιστούμε ανενεργό και ενεργοποιούμε τα παιδιά του. Αρχικά το μόνο ενεργό άτομο είναι το μοναδικό άτομο της γενιάς 0.
- Στο πρώτο βήμα της εξερεύνησης επισκεπτόμαστε το άτομο της γενιάς 0 και σε κάθε επόμενο βήμα επισκεπτόμαστε τυχαία κάποιο ενεργό άτομο από την ελάχιστη γενιά που περιέχει ενεργά άτομα.

- Η εξερεύνηση τερματίζεται όταν όλα τα άτομα είναι ανενεργά.

Ορίζουμε την ακολουθία $(S_i)_{i\geq 0}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_i &= S_{i-1} + X_i - 1, \;\; \forall i \geq 1, \end{aligned}$$

όπου το X_i είναι ο αριθμός των παιδιών του i ατόμου που επισκεπτόμαστε και έτσι το S_i αντιπροσωπεύει το πλήθος των ενεργών ατόμων μετά την i-οστή επίσκεψη. Αυτό γιατί, πριν την i-οστή επίσκεψη τα ενεργά άτομα είναι S_{i-1} και με την i-οστή επίσκεψη απενεργοποιείται ένα (αντιστοιχεί στο -1) και ενεργοποιούνται τα παιδιά του (αντιστοιχούν στο X_i).
Παρατηρούμε ότι κατανομή του X_i είναι ίδια με αυτήν του $X_{1,1}$. Ορίζουμε

$$T = \inf\{k : S_k = 0\} = \sharp \text{ κόμβοι της ανέλιξης}$$

Μια ακολουθία $(x_1, \dots, x_t)$ αντιστοιχεί σε μια πραγματοποίηση μιας κλαδωτής ανέλιξης αν και μόνο αν $x_i \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [t]$ και $x_1 + \ldots + x_t = t - 1$, όπου $t < \infty$. Τότε λέμε ότι η ακολουθία $(x_1, \dots, x_t)$ είναι **αποδεκτή ιστορία**.
Με δεδομένη την πειθαρχία του τρόπου εξερεύνησης (π.χ. όπως παραπάνω που επισκεπτόμαστε τυχαία έναν ενεργό κόμβο της μικρότερης γενιάς), μια κλαδωτή ανέλιξη κωδικοποιείται πλήρως από την ακολουθία $H = (X_1, X_2, \dots, X_T)$, όπου $T = \inf\{k : S_k = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Για $t \in \mathbb{N}$ και $(x_1, \dots, x_t)$ αποδεκτή ιστορία ισχύει ότι

$$\mathbf{P}\big(H = (x_1, \dots, x_t)\big) = p_{x_1} \cdots p_{x_t}, \quad \text{όπου } p_k = \mathbf{P}(X_{1,1} = k)$$

Ορισμός 11. Έστω $p = (p_k)_{k\geq 0}$ κατανομή στο $\mathbb{N}$ ώστε η κλαδωτή ανέλιξη που παράγει (δηλαδή τα $X_{n,i}$ έχουν κατανομή p) να έχει πιθανότητα εξαφάνισης $\eta \in (0, 1]$. **Συζυγή** της p ονομάζουμε την κατανομή $p' = (p'_k)_{k\geq 0}$ με $p'_k = \eta^{k-1} p_k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Η p' είναι συνάρτηση πιθανότητας γιατί

$$\sum_{k=0}^{\infty} p'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k-1} p_k = \frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k p_k = \frac{1}{\eta}\, G_X(\eta) = \frac{1}{\eta}\, \eta = 1$$

Άσκηση 7. Έστω X' τ.μ. με κατανομή p'. Τότε

1. $G_{X'}(s) = \frac{1}{\eta}\, G_X(\eta s)$.
2. Αν $0 < \eta < 1$, τότε $\mathbf{E}X' < 1$.

Λύση. 1. Έχουμε ότι

$$G_{X'}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p'_k s^k = \frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k p_k\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (\eta s)^k = \frac{1}{\eta} G_X(\eta s)$$

2. Οι τυπικές δυναμοσειρές $G_X(s)$ και $G_{X'}(s)$ παραγωγίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} G'_X(s) = \mathbf{E}(X s^{X-1}) \;&\Longrightarrow\; G'_X(1) = \mathbf{E}X \\ G'_{X'}(s) = \tfrac{1}{\eta}\, G'_X(\eta s) \;&\Longrightarrow\; \mathbf{E}X' = G'_X(\eta) \end{aligned}$$

Έστω ότι $G'_X(\eta) > 1$. Τότε

$$G_X(1) \geq G_X(\eta) + G'_X(\eta)(1-\eta) > \eta + 1 - \eta = 1$$

που είναι άτοπο. Έστω ότι $G'_X(\eta) = 1$. Τότε $G'_X(s)$, $\forall s \in (\eta, 1)$ και άρα (έπεται από βασικό θεώρημα μιγαδικής ανάλυσης) $G'_X(s) = 1$, $\forall s \in \mathbb{C}$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k\, s^{k-1} = 1 \implies p_1 = 1 \implies \eta = 0$$

που είναι επίσης άτοπο. Συνεπώς $\mathbf{E}X' = G'_X(\eta) > 1$, που είναι το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 27. *Έστω $p = (p_k)_{k\geq 0}$ κατανομή στο $\mathbb{N}$ ώστε η κλαδωτή ανέλιξη που παράγει να έχει πιθανότητα εξαφάνισης $\eta \in (0,1)$ και έστω p' η συζυγής κατανομή της p. Τότε, η κλαδωτή ανέλιξη που παράγει η p δεσμευμένη σε εξαφάνιση, έχει τον ίδιο νόμο με την κλαδωτή ανέλιξη που παράγει η p'.*

Απόδειξη. Έστω $(x_1, \ldots, x_t)$ μια αποδεκτή ιστορία για κλαδωτή ανέλιξη με $t < \infty$ και έστω $H = (X_1, \ldots, X_T)$ η ιστορία της p και $H' = (X'_1, \ldots, X'_T)$ η ιστορία της p'. Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$A = \{ \text{ η ανέλιξη που παράγει η } p \text{ εξαφανίζεται } \}.$$

Τότε έχουμε

$$\mathbf{P}\big(H = (x_1, \ldots, x_t) \,\big|\, A\big) = \frac{\mathbf{P}\big(H = (x_1, \ldots, x_t) \cap A\big)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}\big(H = (x_1, \ldots, x_t)\big)}{\eta} = \frac{1}{\eta}\, p_{x_1} \cdots p_{x_t}$$

και επίσης

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(H' = (x_1, \ldots, x_t)\big) &= p'_{x_1} \cdots p'_{x_t} = \\
&= \eta^{x_1 - 1}\, p_{x_1} \cdots \eta^{x_t - 1}\, p_{x_t} = \\
&= \eta^{x_1 + \ldots + x_t - t}\, p_{x_1} \cdots p_{x_t} = \\
&= \frac{1}{\eta}\, p_{x_1} \cdots p_{x_t}
\end{aligned}$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Μάθημα 16 (Κλαδωτές ανελίξεις)

Θεώρημα 28. *Έστω ότι $\mu = \mathbf{E}X > 1$ και T είναι ίσο με το συνολικό πλήθος ατόμων. Τότε, για $k \in \mathbb{N}^+$ έχουμε ότι*

$$\mathbf{P}(k \leq T < \infty) \leq \frac{\mathrm{e}^{-kI}}{1 - \mathrm{e}^{I}}$$

όπου $I = \sup\limits_{t \leq 0} \big(t - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX})\big)$. Επίσης ισχύει ότι $I > 0$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(k \leq T < \infty) &= \sum_{r=k}^{\infty} \mathbf{P}(T = r) \leq \\
&\leq \sum_{r=k}^{\infty} \mathbf{P}(S_r = 0) = \\
&= \sum_{r=k}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_r = r - 1) \leq \\
&\leq \sum_{r=k}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_r \leq r)
\end{aligned}$$

Έστω $a_r = \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_r \leq r)$. Για $t \leq 0$,

$$\begin{aligned}
a_r &= \mathbf{P}\big(\, t(X_1 + \ldots + X_r) \geq t\, r\big) = \\
&= \mathbf{P}\big(\mathrm{e}^{t(X_1 + \ldots + X_r)} \geq \mathrm{e}^{tr}\big) \leq \\
&\overset{Markov}{\leq} \mathrm{e}^{-tr}\, \mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{tX_1}\big)^r
\end{aligned}$$

και παίρνοντας $\inf_{t \leq 0}$ έχουμε

$$a_r = \mathrm{e}^{-r\, \sup_{t \leq 0} \left\{t - \log \mathbf{E}(e^{tX_1})\right\}} = \mathrm{e}^{-rI}$$

και άρα καταλήγουμε στο

$$\mathbf{P}(k \leq T < \infty) \leq \sum_{r=k}^{\infty} \mathrm{e}^{-rI} = \frac{\mathrm{e}^{-kI}}{1 - \mathrm{e}^{-I}}$$

που είναι το ζητούμενο.
Μένει να αποδείξουμε ότι $I > 0$. Έστω $A(t) = t - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})$, $t \leq 0$.
Για $t \leq 0$ έχουμε

$$A'(t) = 1 - \frac{\big(\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})\big)'}{\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})} = 1 - \frac{\mathbf{E}(X_1 \mathrm{e}^{tX_1})}{\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})}$$

και $A'(0-) = 1 - \mathbf{E}X_1 = 1 - \mu < 0$ και παίρνουμε το ζητούμενο γιατί

$$A(0) = 0 - \log 1 = 0 \overset{A'(0)<0}{\Longrightarrow} \sup_{t<0} A(t) > 0 \implies I > 0$$

□

Παρατήρηση. Ισχύει ότι $I = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \big\{ t - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1}) \big\}$ γιατί για $t > 0$, επειδή η συνάρτηση $\log(x)$ είναι κοίλη, παίρνουμε από ανισότητα Jensen ότι

$$\log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1}) \geq \mathbf{E}(tX_1) = t\mu$$

και άρα για $t > 0$ έχουμε $t - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1}) \leq t\,(1-\mu) < 0$.

Θα αποδείξουμε κάποια πράγματα για την υπερκρίσιμη κλαδωτή ανέλιξη. Υπενθυμίζουμε ότι $Z_0 = 1$, $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{Z_n - 1} X_{n,i}$ και $\mu = \mathbf{E}X_{1,1} > 1$.

Θεώρημα 29. *Έστω ότι $\mu > 1$. Τότε $Z_n/\mu^n \to W_\infty$ σχεδόν βέβαια για $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\big(\{X_{k,i} : 1 \leq k \leq n,\ i \in \mathbb{N}^+\}\big)$ και $M_n = Z_n/\mu^n$.

Ισχυρισμός. Η $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Η M_n είναι προφανώς $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη και

$$\mathbf{E}M_n = \frac{\mathbf{E}(Z_n)}{\mu^n} = \frac{\mu^n}{\mu^n} = 1.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) &= \frac{1}{\mu^n}\,\mathbf{E}\bigg(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{n,k} \,\Big|\, \mathcal{F}_{n-1} \bigg) = \\
&= \frac{1}{\mu^n}\,\mathbf{E}\bigg(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} X_{n,k} 1_{\{Z_{n-1}=j\}} \,\Big|\, \mathcal{F}_{n-1} \bigg) = \\
&= \frac{1}{\mu^n} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} 1_{\{Z_{n-1}=j\}} \overbrace{\mathbf{E}(X_{n,k} \,|\, \mathcal{F}_{n-1})}^{\mathbf{E}(X_{n,k})=\mu} = \\
&= \frac{1}{\mu^{n-1}} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} 1_{\{Z_{n-1}=j\}}}_{Z_{n-1}} = \frac{Z_{n-1}}{\mu^{n-1}} = M_{n-1}
\end{aligned}$$

□

Επειδή λοιπόν η M_n είναι martingale, έχουμε ότι συγκλίνει σχεδόν βέβαια και άρα $M_n \to W_\infty$ με $\mathbf{E}(W_\infty) \leq \lim \mathbf{E}(M_n) = 1$.
Βέβαια, $W_\infty = 0$ στο γεγονός της εξαφάνισης $\{\omega : \exists n \text{ με } Z_n = 0\}$. Αλλά

$$\mathbf{P}(W_\infty = 0) = \eta \iff \mathbf{E}(X \log X) < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} k \log k\, p_k < \infty.$$

Τότε επίσης ισχύει ότι $\mathbf{E}(W_\infty) = 1$. Αλλιώς $\mathbf{P}(W_\infty = 0) = 1$. □

Έστω $(Z_n)_{n\geq 0}$ υπερκρίσιμη κλαδωτή ανέλιξη με πιθανότητα εξαφάνισης η, πιθανότητα επιβίωσης $\zeta = 1-\eta$, κατανομή $(p_k)_{k\geq 0}$, και έστω $Z_n^{(\infty)}$ το πλήθος των ατόμων της n-οστής που έχουν άπειρους απογόνους. Έστω επίσης $A_\infty = \{Z_n \neq 0,\ \forall n \geq 1\}$.

Θεώρημα 30. *Η $Z_n^{(\infty)} \,\big|\, A_\infty$ είναι κλαδωτή ανέλιξη που δεν εξαφανίζεται (δηλαδή $\eta^{(\infty)} = 0$, όπου $\eta^{(\infty)}$ η πιθανότητα εξαφάνισης της $Z_n^{(\infty)} \,\big|\, A_\infty$) και έχει κατανομή $(p_k^{(\infty)})_{k\geq 0}$ την εξής:*

$$p_0^{(\infty)} = 0 \ \ \text{και} \ \ p_k^{(\infty)} = \frac{1}{\zeta}\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}\eta^{j-k}(1-\eta)^k p_j$$

Επίσης, $\mu^{(\infty)} = \mathbf{E}(Z_1^{(\infty)} \,\big|\, A_\infty) = \mathbf{E}Z_1$, άρα και η $(Z_n^{\infty})_{n\geq 1}$ είναι υπερκρίσιμη.

Απόδειξη. Ξεκινάμε υπολογίζοντας τύπο για την $p_k^{(\infty)}$. Αν $k=0$, τότε $\mathbf{P}(Z_1^{(\infty)} = k \,\big|\, A_\infty) = 0$. Για $k \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
p_k^{(\infty)} = \mathbf{P}(Z_1^{(\infty)} = k \,\big|\, A_\infty) &= \frac{\mathbf{P}\big(\{Z_1^{(\infty)} = k\} \cap A_\infty\big)}{\mathbf{P}(A_\infty)} = \frac{\mathbf{P}\big(Z_1^{(\infty)} = k\big)}{\zeta} = \\
&= \frac{1}{\zeta}\sum_{j=k}^{\infty}\mathbf{P}\big(Z_1^{(\infty)} = k \,\big|\, Z_1 = j\big)\mathbf{P}(Z_1 = j) = \\
&= \frac{1}{\zeta}\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}\eta^{j-k}(1-\eta)^k p_j
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. Υπολογίζουμε και τη μέση τιμή

$$\begin{aligned}
\mu^{(\infty)} &= \mathbf{E}(Z_1^{(\infty)} \,\big|\, A_\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k^{(\infty)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{1}{\zeta}\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}\eta^{j-k}(1-\eta)^k p_j
\end{aligned}$$

□

Έστω $(Z_n)_{n\geq 0}$ κλαδωτή ανέλιξη και T το συνολικό πλήθος απογόνων της.

Θεώρημα 31. *Ισχύει ότι $\mathbf{P}(T = n) = \frac{1}{n}\,\mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n = n-1)$, $\forall n \geq 1$, όπου X_i ανεξάρτητες και ισόνομες με $X_1 \overset{d}{=} X$.*
Γενικότερα, ισχύει ότι $\mathbf{P}(T_1 + \ldots + T_k = n) = \frac{k}{n}\,\mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n = n-k)$, όπου $T_1, \ldots, T_k$ ανεξάρτητες και ισόνομες με $T_i \overset{d}{=} T$.

Απόδειξη. Το παραπάνω θεώρημα προκύπτει από ένα άλλο θεώρημα που αποδεικνύεται στο επόμενο μάθημα. □

Μάθημα 17 (Κλαδωτές ανελίξεις - Κλαδωτή ανέλιξη Poisson)

Θεώρημα 32. *Έστω $(Y_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{Z}\cap\{k : k \geq -1\}$. Έστω S_n ο τυχαίος περίπατος με προσαυξήσεις $Y_1, Y_2, \ldots$ και P_k το μέτρο σύμφωνα με το οποίο $S_0 = k$, δηλαδή $S_n = k + Y_1 + \ldots = Y_n$, $n \geq 1$. Αν θέσουμε $H_0 = \inf\{k \geq 0 : S_k = 0\}$, τότε ισχύει ότι*

$$\mathbf{P}_k(H_0 = n) = \frac{k}{n}\,\mathbf{P}_k(S_n = 0)$$

Παρατηρήσεις: (1) Το Θεώρημα **??** έπεται από το παραπάνω θεώρημα:

Έστω $(\Sigma_i)_{i\geq 0}$ ο τυχαίος περίπατος που ορίζει μια κλαδωτή ανέλιξη, δηλαδή $\Sigma_0 = 1$ και $\Sigma_n = \Sigma_{n-1} + X_n - 1$. Θεωρούμε τον τυχαίο περίπατο του Θεωρήματος **??** με προσαυξήσεις $Y_i = X_1 - 1$, $\forall i \geq 1$. Τότε έχουμε ότι

$$\mathbf{P}_k(S_n = 0) = \mathbf{P}(k + X_1 + \ldots + X_n - n = 0) = \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n = n - k)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\mathbf{P}_k(H_0 = n) = \mathbf{P}(T_1 + \ldots + T_k = n)$$

και άρα έπεται το ζητούμενο.

(2) Έστω S_k ο απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ και $T = \inf\{k \geq 1 : S_k = 0\}$. Έστω επίσης $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_{-1}$ τα μέτρα που αντιστοιχούν σε συμμετρικό τυχαίο περίπατο που ξεκινά από το 1 και το -1, αντίστοιχα. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T = 2n) &= \frac{1}{2}\,\mathbf{P}_1(T = 2n-1) + \frac{1}{2}\,\mathbf{P}_{-1}(T = 2n-1) = \\
&= \mathbf{P}_1(T = 2n-1) = \\
&\overset{??}{=} \frac{1}{2n-1}\,\mathbf{P}_1(S_{2n-1} = 0) = \\
&\overset{2}{=} \frac{1}{2n-1}\,\mathbf{P}_1(S_{2n} = 0) = \\
&= \frac{1}{2n-1}\,\underbrace{\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}}_{\approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} \sim \frac{c}{n^{3/2}}
\end{aligned}$$

Απόδειξη Θεωρήματος 32. Θα κάνουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$, αυτό που θέλουμε είναι $\mathbf{P}_k(S_0 \neq 0,\, S_1 = 0) = k\,\mathbf{P}_k(S_1 = 0)$. Για $k = 0$ και για $k \geq 2$ η ισότητα γίνεται $0 = 0$ και για $k = 1$ γίνεται $\mathbf{P}_1(S_0 \neq 0, S_1 = 0) = \mathbf{P}_1(S_1 = 0)$ που ισχύει επίσης.
Για $n \geq 2$ και $k = 0$ έχουμε $0 = 0$ γιατί $\mathbf{P}_0(H_0 = n) = 0$, αφού $H_0 = 0$. Για $k \geq 1$

[2] $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2}\,\mathbf{P}_1(S_{2n-1} = 0) + \frac{1}{2}\,\mathbf{P}_{-1}(S_{2n-1} = 0) = \mathbf{P}_1(S_{2n-1} = 0)$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_k(H_0 = n) &= \sum_{s=-1}^{\infty} \mathbf{P}_k(H_0 = n \,\big|\, Y_1 = s)\, \mathbf{P}(Y_1 = s) = \\
&= \sum_{s=-1}^{\infty} \mathbf{P}_{k+s}(H_0 = n-1)\, \mathbf{P}(Y_1 = s) = \\
&\overset{E.Y.}{=} \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{k+s}{n-1}\, \mathbf{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0)\, \mathbf{P}(Y_1 = s) = \\
&= \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{k+s}{n-1}\, \mathbf{P}_k(S_n = 0 \,\big|\, Y_1 = s)\, \mathbf{P}(Y_1 = s) = \\
&= \frac{k}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} \mathbf{P}_k(S_n = 0 \,\big|\, Y_1 = s)\, \mathbf{P}(Y_1 = s) + \frac{1}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} s\, \mathbf{P}_k(S_n = 0, Y_1 = s) = \\
&= \frac{k}{n-1}\, \mathbf{P}_k(S_n = 0) + \frac{1}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} s\, \mathbf{P}_k(Y_1 = s \,\big|\, S_n = 0)\, \mathbf{P}_k(S_n = 0) = \\
&= \frac{k}{n-1}\, \mathbf{P}_k(S_n = 0) + \frac{1}{n-1}\, \mathbf{P}_k(S_n = 0)\, \mathbf{E}(Y_1 \,\big|\, S_n = 0) = \\
&\overset{(*)}{=} \mathbf{P}_k(S_n = 0) \left(\frac{k}{n-1} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{k}{n} \right) = \\
&= \mathbf{P}_k(S_n = 0)\, \frac{k_n - k}{n(n-1)} = \frac{k}{n}\, \mathbf{P}_k(S_n = 0),
\end{aligned}$$

όπου η ισότητα $(*)$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}
k + Y_1 + \ldots + Y_n = S_n \quad &\Longrightarrow \quad k + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(Y_j \,\big|\, S_n) = \mathbf{E}(S_n \,\big|\, S_n) = S_n \implies \\
&\Longrightarrow \quad k + n\, \mathbf{E}(Y_1 \,\big|\, S_n) = S_n \implies \\
&\Longrightarrow \quad \mathbf{E}(Y_1 \,\big|\, S_n) = \frac{S_n - k}{n} \implies \\
&\Longrightarrow \quad \mathbf{E}(Y_1 \,\big|\, S_n = 0) = -\frac{k}{n}
\end{aligned}$$

□

Κλαδωτή ανέλιξη Poisson. Έστω κλαδωτή ανέλιξη με $X_1 \sim \mathsf{Poisson}(\lambda)$, δηλαδή $p_k = \mathbf{P}(X_1 = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \geq 0$. Ορίζουμε

$$G_\lambda(s) = \mathbf{E}(s^{X_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\, s^k = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda s} = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)} \qquad (\star)$$

Για $\lambda > 1$, η πιθανότητα εξαφάνισης η είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $G_\lambda(s) = s$ στο $[0,1]$. Επειδή $\mathbf{E}X_1 = \lambda$, αν $\lambda \leq 1$ έχουμε ότι $\eta = 1$.
Η ανέλιξη, αν δεσμεύσουμε σε εξαφάνιση, είναι μια άλλη κλαδωτή ανέλιξη με νόμο $p'_k = \eta^{k-1} p_k,\ k \geq 0$. Υπολογίζουμε το p'_k για κάθε $k \geq 0$:

$$p'_k = \eta^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\eta} \frac{(\eta\lambda)^k}{k!} \overset{(\star)}{=} \mathrm{e}^{-\lambda\eta} \frac{(\eta\lambda)^k}{k!} \sim \mathsf{Poisson}(\eta\lambda)$$

Ορίζουμε $\mu_\lambda = \eta\lambda < 1$ και υπολογίζουμε τη σχέση μ_λ και λ:

$$\eta\lambda = \lambda\,\mathrm{e}^{\eta\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \implies \eta\lambda\,\mathrm{e}^{-\eta\lambda} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda} \implies \mu_\lambda\,\mathrm{e}^{-\mu\lambda} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Πρόταση 21. *Έστω μια κλαδωτή Poisson με παράμετρο λ και T^* το συνολικό πλήθος ατόμων της. Τότε*

$$\mathbf{P}(T^* = n) = \frac{(\lambda n)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda n}$$

Απόδειξη. Από Θεώρημα **??** για $k = 1$ παίρνουμε:

$$\mathbf{P}(T^* = n) = \frac{1}{n}\,\mathbf{P}(\underbrace{X_1 + \ldots + X_n}_{\sim \mathsf{Poisson}(n\lambda)} = n-1) = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(\lambda n)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda n}$$

□

Θεώρημα 33. *Έστω μια κλαδωτή Poisson με παράμετρο λ και T^* το συνολικό πλήθος ατόμων της. Τότε*

$$\mathbf{P}(T^* = n) \approx \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi n^3}}\,\mathrm{e}^{-nI_\lambda}\,(1 + o(1))\,,$$

όπου $I_\lambda = \lambda - 1 - \log\lambda$.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη Πρόταση και τον τύπο του Stirling παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T^* = n) &= \frac{(\lambda n)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda n}}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1 + o(1))} = \\
&= \frac{\lambda^{n-1}\,n^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda n}\,\mathrm{e}^n}{n^n\,\sqrt{2\pi n}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi n^3}}\,\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{n(1-\lambda-\log\lambda)}\,(1 + o(1)) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi n^3}}\,\mathrm{e}^{-nI_\lambda}\,(1 + o(1))
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα πέφτει εκθετικά για $\lambda \neq 1$ και για $\lambda = 1$ γίνεται $1/n^{3/2}$. □

Μάθημα 18 (Μέγιστη συνεκτική συνιστώσα για το γράφημα Erdös-Renyi)

Θεωρούμε δύο κλαδωτές ανελίξεις, η μία με $X_1 \sim \mathsf{Bin}(n,p)$ και η άλλη με $X_1^* \sim \mathsf{Poisson}(\lambda)$ με $\lambda = np$. Έστω $\mathbf{P}_{n,p}$ και $\mathbf{P}_\lambda$ τα μέτρα που αντιστοιχούν σε αυτές και T, T^* το συνολικό πλήθος ατόμων για καθεμιά απ'αυτές. Τότε έχουμε το παρακάτω

Θεώρημα 34. *Για κάθε $k \geq 1$ ισχύει:*

$$\mathbf{P}_{n,p}(T \geq k) = \mathbf{P}_\lambda(T^* \geq k) + e_n(k)$$

όπου

$$|e_n(k)| \leq \frac{\lambda^2}{n} \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{P}_\lambda(T^* \geq s) \leq \frac{k\lambda^2}{n}$$

Απόδειξη. Υπάρχουν χώρος πιθανότητας και τ.μ $(X_i)_{i\geq 1}$ και $(X_i^*)_{i\geq 1}$ σε αυτόν, ώστε $X_i \sim \mathsf{Bin}(n,p)$, $X_i^* \sim \mathsf{Poisson}(np)$, $(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες, $(X_i^*)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες και $\mathbf{P}(X_i \neq X_i^*) \leq \lambda^2/n$ (το έχουμε δει σε προηγούμενο μάθημα). Από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T \geq k) &= \mathbf{P}(T \geq k, T^* \geq k) + \mathbf{P}(T \geq k, T^* < k)\\ \mathbf{P}(T^* \geq k) &= \mathbf{P}(T \geq k, T^* \geq k) + \mathbf{P}(T^* \geq k, T < k)\end{aligned}$$

παίρνουμε ότι

$$\mathbf{P}(T \geq k) - \mathbf{P}(T^* \geq k) = \mathbf{P}(T \geq k, T^* < k) - \mathbf{P}(T^* \geq k, T < k)$$

και άρα

$$|\mathbf{P}(T \geq k) - \mathbf{P}(T^* \geq k)| \leq \max\left\{\mathbf{P}(T \geq k, T^* < k),\, \mathbf{P}(T^* \geq k, T < k)\right\}$$

Ορίζουμε $R = \inf\{s \geq 1 : X_s \neq X_s^*\}$. Αν $T \geq k$ και $T^* < k$, τότε υπάρχει $s \in \{1, \dots, k-1\}$ ώστε $X_s \neq X_s^*$, γιατί αλλιώς θα είχαμε $S_i = S_i^*$, $\forall i \in [s]$, που είναι άτοπο. Άρα

$$\mathbf{P}(T \geq k, T^* < k) = \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{P}(T \geq k, T^* < k, R = s)$$

Στο γεγονός $\{T \geq k,\ T^* < k,\ R = s\}$, ισχύει για κάθε $i \in [s-1]$ ότι $S_i = S_i^*$ και επειδή $T \geq k$ έχουμε ότι $S_i = S_i^* \geq 1$ και άρα $T^* \geq s$. Συνεπώς

$$\mathbf{P}(T \geq k, T^* < k) \leq \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{P}(T^* \geq s, X_s \neq X_s^*) = \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{P}(T^* \geq s)\,\mathbf{P}(X_s \neq X_s^*) \leq \frac{\lambda}{n^2} \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{P}(T^* \geq s),$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από την ανεξαρτησία των ενδεχομένων $\{T^* \geq s\}$ και $\{X_s \neq X_s^*$, αφού

$$T_s^* \geq s \iff S_i^* \geq 1,\ \forall i \in \{1, \dots, s-1\}$$

και άρα εξαρτάται από τις $X_1^*, \dots, X_{s-1}^*$ που είναι ανεξάρητες από τις $X_1, \dots, X_{s-1}$. Με όμοιο τρόπο παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T^* \geq k, T < k) &= \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{P}(T^* \geq k, T < k, R = s) \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{P}(T^* \geq s, X_s \neq X_s^*) \leq \frac{\lambda^2}{n} \sum_{s=1}^{k-1} \mathbf{P}(T^* \geq s)\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Συμβολίζουμε με $ER_n(p)$ το τυχαίο γράφημα με κορυφές το σύνολο $[n] = \{1, 2 \dots, n\}$, όπου $n \in \mathbb{N}^+$ και $p \in [0,1]$, και καθεμιά από τις $\binom{n}{2}$ ακμές του πλήρους γραφήματος K_n να επιλέγεται με πιθανότητα p. Οι ακμές του $ER_n(p)$ είναι λοιπόν αυτές οι ακμές που επιλέξαμε με τον παραπάνω τυχαίο τρόπο. Για γράφημα G συμβολζίουμε με $E(G)$ το σύνολο των ακμών του και με $V(G)$ το σύνολο των κορυφών του.
Για κορυφές $s, t \in V(G)$ λέμε ότι επικοινωνούν, και γράφουμε $s \leftrightarrow t$ αν υπάρχει ακολουθία κορυφών $v_1, \dots, v_k \in V(G)$ τέτοια ώστε $\{s, v_1\}, \{v_k, t\} \in E(G)$ και $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G), \forall i \in [k-1]$.
Για $v \in V(G)$ ορίζουμε τη συνεκτική συνιστώσα του στο G ως $\mathcal{C} = \{s \in V(G) : s \leftrightarrow v\}$ και καλούμε $\mathcal{C}_{max}$ οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα έχει μέγιστο πλήθος στοιχείων, δηλαδή $|\mathcal{C}_{max}| = \max_{v \in V(G)} |\mathcal{C}_v|$.
Θεωρούμε το $ER_n(p)$ με $p = \lambda/n$. Ορίζουμε

$$Z_1 = \sharp \text{ κορυφών } s \text{ ώστε } \{1, s\} \in ER_n(p)$$

και έχουμε ότι

$$Z_1 = \sum_{i \in [n], i \neq 1} \underbrace{1_{\{\{1,i\} \in ER_n(p)\}}}_{\mathsf{Bernoulli}(p)} \implies \mathbf{E}Z_1 = (n-1)p = (n-1)\frac{\lambda}{n} \sim \lambda$$

Αν $\lambda < 1$ τότε λέμε ότι έχουμε *υποκρίσιμη φάση* και τότε

$$\frac{|\mathcal{C}_{max}|}{\log n} \xrightarrow{P} \frac{1}{I_\lambda}, \quad \text{όπου } I_\lambda = \lambda - 1 - \log \lambda$$

Αν $\lambda > 1$ τότε λέμε ότι έχουμε *υποκρίσιμη φάση* και τότε

$$\frac{|\mathcal{C}_{max}|}{n} \xrightarrow{P} \zeta_\lambda, \quad \text{όπου } \zeta_\lambda = \text{πιθανότητα επιβίωσης κλαδωτής } \mathsf{Poisson}(\lambda)$$

και

$$\frac{|\mathcal{C}_{max}| - n\zeta_\lambda}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, \sigma_\lambda^2), \quad \text{όπου } \sigma_\lambda^2 = \frac{\zeta_\lambda(1-\zeta_\lambda)}{(1-\lambda+\lambda\zeta_\lambda)^2}$$

Εξερεύνηση συνιστώσας. Έστω $\mathcal{C}(v)$ η συνεκτική συνιστώσα μιας κορυφής $v \in V(G)$ σε κάποιο γράφημα G. Περιγράφουμε μια διαδικασία εξερεύνησης της $\mathcal{C}(v)$. Σε κάθε χρονική στιγμή υπάρχουν τριών ειδών κορυφές: ενεργές, ουδέτερες και ανενεργές.

- Τον χρόνο $t = 0$ η κορυφή v είναι ανενεργή και όλες οι άλλες ουδέτερες.
- Κάθε ακέραιο χρόνο επιλέγουμε τυχαία μια ενεργή κορυφή w και επισκεπτόμαστε όλες τις ουδέτερες $w' \in V(G)$ με $\{w, w'\} \in E(G)$ και κάνουμε κάθε τέτοια w' ενεργή και την w ανενεργή.
- Συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι να γίνουν όλες οι κορυφές ανενεργές.

'Εστω $S_t = \sharp$ ενεργές κορυφές τον χρόνο t και $X_t = \sharp$ κορυφές που γίνονται ενεργές τον χρόνο t. Ισχύει ότι

$$S_t = S_{t-1} + X_t - 1$$

και άρα

$$|\mathcal{C}(v)| = \min\{t \in \mathbb{N} : S_t = 0\}.$$

Έστω $N_t = |V(G)| - t - S_t$, δηλαδή το N_t είναι ίσο με το πλήθος των ουδέτερων κορυφών μετά τον χρόνο t. Στο $G = ER_n(p)$ έχουμε ότι $X_t \sim \mathsf{Bin}(N_{t-1}, p)$.

Μάθημα 19 (Μέγιστη συνεκτική συνιστώσα για το γράφημα Erdös-Renyi)

Θεώρημα 35. *Ισχύει ότι $|\mathcal{C}(1)| \preceq T^{\geq}$, όπου $\mathcal{C}(1)$ η συνιστώσα του 1 στο $ER_n(p)$ και $T^{\geq}$ είναι το μέγεθος μιας κλαδωτής με $X_i \sim \mathsf{Bin}(n,p)$. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι για κάθε $k \geq 0$:*

$$\mathbf{P}_{np}(|\mathcal{C}(1)| \geq k) \leq \mathbf{P}_{n,p}(T^{\geq} \geq k)$$

Απόδειξη. Με σύζευξη, θεωρούμε $Y_i \sim \mathsf{Bin}(n - N_{i-1}, p)$ η οποία δεδομένης της N_{i-1} είναι ανεξάρτητη της X_i. Θέτουμε $X_i^{\geq} = X_i + Y_i \sim \mathsf{Bin}(n,p)$ δεδομένου του N_{i-1} και παρατηρούμε ότι η $X_i^{\geq}$ είναι ανεξάρτητη από τις $X_1, \ldots, X_{i-1}$ και άρα από τις $X_1^{\geq}, \ldots, X_{i-1}^{\geq}$. Η $(X_i^{\geq})_{i\geq 1}$ περιγράφει την εξερεύνηση μιας κλαδωτής με κατανομή απογόνων $\mathsf{Bin}(n,p)$. Σαφώς $S_i^{\geq} \geq S_i$ και άρα $X_1^{\geq} + \ldots + X_1^{\geq} - (i-1) \geq X_1 + \ldots + X_1 - (i-1)$. Άρα παίρνουμε ότι

$$|\mathcal{C}(1)| = \min\{i : S_i = 0\} \leq \min\{i : S_i^{\geq} = 0\} = T^{\geq}.$$

□

Θεώρημα 36. *Για κάθε $k \in [n]$ ισχύει ότι $\mathbf{P}_{np}(|\mathcal{C}(1)| \geq k) \geq \mathbf{P}_{n-k,p}(T^{\geq} \geq k)$. Παρατηρούμε ότι αυτό δε σημαίνει πως $T^{\geq} \preceq \mathcal{C}(1)$ γιατί το $\mathbf{P}_{n-k,p}$ εξαρτάται από το k.*

Απόδειξη. Έστω $T_k = \min\{t : N_t \leq n-k\} =$ πρώτος χρόνος που έχουμε δει τουλάχιστον k κορυφές.
Για $i \leq T_k$ έχουμε ότι $X_i \sim \mathsf{Bin}(N_{i-1}, p) \succeq \mathsf{Bin}(n-k, p)$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$|\mathcal{C}(1)| \geq k \iff S_i \geq 1,\ i \leq T_k \leq k-1$$

"$\Longrightarrow$": Έχουμε ότι $S_i \geq 1$, $\forall i = 1, \ldots, k-1$ και $T_k \leq k-1$.
"$\Longleftarrow$": Αυτό γιατί από τη στιγμή T_k και έπειτα η διαδικασία εξερεύνησης έχει να ανακαύψει τους υπόλοιπους ενεργούς κόμβους.
Θεωρούμε $X_i^{\leq}$ ανεξάρτητες και ισόνομες με $X_i^{\leq} \sim \mathsf{Bin}(n-k, p)$, $i \geq 1$ και για $i \leq T_k$ θεωρούμε $Y_i \sim \mathsf{Bin}(N_{i-1} - (n-k), p)$ δεδομένης της N_{i-1}. Θέτουμε $X_i = X_i^{\leq} + Y_i \sim \mathsf{Bin}(N_{i-1}, p)$, δεδομένης της N_{i-1}, και $S_i = X_1 + \ldots + X_i - (i-1)$ $S_i^{\leq} = X_1^{\leq} + \ldots + X_i^{\leq} - (i-1)$. Έχουμε ότι $S_i \succeq S_i^{\leq}$ και τότε

$$\{|\mathcal{C}(1)| \geq k\} = \{S_i \geq k,\ \forall i \leq T_k\} \supset \{S_i^{\leq} \geq 1,\ \forall i \leq T_k\} \supset \{S_i^{\leq} \geq 1,\ \forall i \leq k-1\} = \{T^{\leq} \geq k\}.$$

□

Θεώρημα 37. *Έστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $\mathbf{E}X_1 \in \mathbb{R}$ και έστω $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\forall n \geq 1$ και $S_0 = 0$. Τότε:*

1. *Για $a \geq \mathbf{E}X_1$ ισχύει ότι $\mathbf{P}(S_n \geq na) \leq \mathrm{e}^{-nI(a)}$*
2. *Για $a \leq \mathbf{E}X_1$ ισχύει ότι $\mathbf{P}(S_n \leq na) \leq \mathrm{e}^{-nI(a)}$,*

όπου $I(a) = \sup\limits_{t\in R}\big\{ta - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX})\big\}$.

Απόδειξη. 1. Έστω $t > 0$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_n \geq na) &= \mathbf{P}(tS_n \geq tna) = \mathbf{P}(\mathrm{e}^{tS_n} \geq \mathrm{e}^{tna}) \leq \\ &\overset{Markov}{\leq} \mathrm{e}^{-tan}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) = \mathrm{e}^{-tan}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})^n = \\ &= \mathrm{e}^{-n\{at - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})\}}\end{aligned}$$

Παίρνουμε infimum για $t \geq 0$, άρα

$$\mathbf{P}(S_n \geq na) \leq \mathrm{e}^{-n\sup_{t\geq 0}\{at - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})\}} = \mathrm{e}^{-nI(a)}$$

Όμως ισχύει ότι

$$\sup_{t\geq 0}\{\underbrace{ta - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{atX_1})}_{A(t)}\} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{ta - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{atX_1})\}$$

γιατί $A(0) = 0$ και για $t < 0$ έχουμε

$$ta - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1}) \overset{Jensen}{\leq} ta - \mathbf{E}(\log \mathrm{e}^{tX_1}) = ta - t\mathbf{E}X_1 = t(a - \mathbf{E}X_1) \leq 0.$$

2. Για $t < 0$ έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(S_n \leq na) = \mathbf{P}(tS_n \geq tna) \leq \mathrm{e}^{-tna}\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})^n = \mathrm{e}^{-tna}\mathrm{e}^{-n\left(at - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})\right)}$$

και άρα παίρνουμε

$$\mathbf{P}(S_n \leq na) \leq \mathrm{e}^{-n\sup_{t\leq 0}\{at - \log \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1})\}} = \mathrm{e}^{-nI(a)}.$$

$\square$

Εφαρμογή. Έστω ότι $X_i \sim \mathsf{Bernoulli}(p)$, $i \geq 1$ και $\mathbf{E}X_1 = p$. Ορίζουμε $M_{X_1}(t) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_1}) = p\mathrm{e}^t + (1-p)\mathrm{e}^0 = 1 - p + p\mathrm{e}^t$ και $I(a) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{ta - \log(q + p\mathrm{e}^t\}$. Για $a = \frac{p\mathrm{e}^t}{q + p\mathrm{e}^t}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I(a) &= at - \log \frac{p}{a}\mathrm{e}^t = (a-1)t + \log\frac{a}{p} = (a-1)\log\frac{aq}{(1-a)p} + \log\frac{a}{p} = \\ &= a\log\frac{a}{p} + (a-1)\log\frac{q}{1-a} = a\log\frac{a}{p} + (1-a)\log\frac{1-a}{q}.\end{aligned}$$

Άρα για $a \in (p, 1]$ παίρνουμε

$$\mathbf{P}(S_n \geq na) \leq \mathrm{e}^{nI(a)} \leq \mathrm{e}^{nI_p(a)}.$$

Μάθημα 20 (Μέγεθος $\mathcal{C}_{max}$ για την υποκρίσιμη περίπτωση)

Εξετάζουμε το γράφημα $ER_n(p)$ όταν $p = \frac{\lambda}{n}$ και $\lambda < 1$ (υποκρίσιμη περίπτωση).

Θεώρημα 38. *Έστω $\lambda < 1$ και $I(\lambda) = \lambda - 1 - \log\lambda$. Τότε, για κάθε $a > \frac{1}{I(\lambda)}$, υπάρχουν $\delta = \delta(a,\lambda)$, $c = c(a,\lambda)$ τέτοια ώστε*

$$\mathbf{P}_\lambda\big(|\mathcal{C}_{max}| \geq a\log n\big) \leq \frac{c}{n^\delta}, \quad \forall n \geq 1.$$

Απόδειξη. Έστω $k = [a\log n]$. Τότε έχουμε

$$\mathbf{P}_\lambda\big(|\mathcal{C}_{max}| > k\big) \leq n\,\mathbf{P}_\lambda\big(|\mathcal{C}(1)| > k\big) \leq n\,\mathbf{P}_{n,p}(T > k), \tag{8}$$

όπου η πρώτη ανισότητα προκύπτει από union bound και T είναι το συνολικό μέγεθος κλαδωτής με $X_i \sim \mathsf{Bin}(n,p)$. Υπενθυμίζουμε ότι $\hat{S}_i = \hat{X}_1 + \ldots + \hat{X}_i - (i-1)$, όπου $\hat{X}_i \sim \mathsf{Bin}(n,p)$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{n,p}(T > k) &= \mathbf{P}_{n,p}(\hat{S}_i \geq 1\ \forall i = 1,\ldots,k) \leq \mathbf{P}_{n,p}(\hat{S}_k \geq 1) = \\ &= \mathbf{P}_{n,p}(\hat{X}_1 + \ldots + \hat{X}_k \geq k) = \mathbf{P}_{n,p}\left(\hat{X}_1 + \ldots + \hat{X}_k \geq nk\frac{1}{n}\right) \leq \mathrm{e}^{-nkI_p(1/n)}\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα πορκύπτει από το

$$nkI_p\left(\frac{1}{n}\right) = nk\left(p - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\log pn\right) = \lambda k - k - k\log\lambda = k(\lambda - 1 - \log\lambda) = kI_\lambda$$

Από το παραπάνω και την (**??**) παίρνουμε ότι

$$\mathbf{P}_\lambda\big(|\mathcal{C}_{max}| > k\big) \leq n\mathrm{e}^{-(a\log n - 1)I_\lambda} = \mathrm{e}^{I_\lambda} n^{1 - aI_\lambda} = \frac{e^{I_\lambda}}{n^{aI_\lambda - 1}}$$

και θέτοντας $\delta = aI_\lambda - 1$ και $c = \mathrm{e}^{I_\lambda}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Έχοντας ως στόχο να αποδείξουμε ότι $\frac{|\mathcal{C}_{max}|}{\log n} \xrightarrow{P} \frac{1}{I_\lambda}$, αρκεί τώρα να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα που εξασφαλίζει ότι η πιθανότητα η μεγαλύτερη συνεκτική συνιστώσα να είναι (οσοδήποτε) μικρότερη από $\frac{1}{I_\lambda}\log n$, πάει στο μηδέν.

Θεώρημα 39. *Έστω $\lambda < 1$, $I(\lambda) = \lambda - 1 - \log\lambda$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $\delta = \delta(\epsilon,\lambda)$, $c = c(\epsilon,\lambda)$ τέτοια ώστε*

$$\mathbf{P}_\lambda\left(|\mathcal{C}_{max}| \leq \left(\frac{1}{I_\lambda} - \epsilon\right)\log n\right) \leq \frac{c}{n^\delta}, \quad \forall n \geq 1.$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος θα δούμε τη **μέθοδο της δεύτερης ροπής**:

Λήμμα 4. *Έστω X τ.μ. με τιμές στο $[0,\infty)$. Τότε, για $\beta \in [0,\infty)$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $\mathbf{P}(X \le \beta\,\mathbf{E}X) \le \dfrac{\mathbf{Var}(X)}{(1-\beta)^2\,(\mathbf{E}X)^2}$

2. $\mathbf{P}(X \ge \beta\,\mathbf{E}X) \ge (1-\beta)^2\,\dfrac{(\mathbf{E}X)^2}{\mathbf{E}X^2}$ [ανισότητα Paley-Zygmunt]

Απόδειξη. 1. Το ζητούμενο έπεται από την ανισότητα Chebyshev:

$$\mathbf{P}(X \le \beta\,\mathbf{E}X) = \mathbf{P}(X-\mathbf{E}X \le (\beta-1)\,\mathbf{E}X) \le \mathbf{P}\big(|X-\mathbf{E}X| \ge (\beta-1)\,\mathbf{E}X\big) \le \frac{\mathbf{Var}(X)}{(\beta-1)^2\,(\mathbf{E}X)^2}.$$

2. Έστω $A = 1_{X \ge a\mathbf{E}X}$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X &= \mathbf{E}(X\,1_A) + \mathbf{E}(X\,1_A^c) \overset{C-S}{\le} \big(\mathbf{E}(X^2)\big)^{1/2}\big(\mathbf{E}(1_A)\big)^{1/2} + \beta\,\mathbf{E}X \cdot \mathbf{P}(A^c) \le \\ &\le \big(\mathbf{E}(X^2)\big)^{1/2}\big(\mathbf{P}(A)\big)^{1/2} + \beta\,\mathbf{E}X\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$(1-\beta)\,\mathbf{E}X \le \big(\mathbf{P}(A)\big)^{1/2}\big(\mathbf{E}(X^2)\big)^{1/2} \implies \mathbf{P}(A) \ge (1-\beta)^2\,\frac{(\mathbf{E}X)^2}{\mathbf{E}X^2},$$

που είναι το ζητούμενο.

□

Παράδειγμα 15. Έστω η τυχαία μεταβλητή X, όπου

$$X = \begin{cases} 0, & \text{με πιθανότητα } 1-\frac{1}{n} \\ n^2, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{n} \end{cases}$$

Τότε $\mathbf{E}X = n$ και $\mathbf{E}X^2 = n^4 \cdot 1/n = n^3$, άρα $(\mathbf{E}X)^2/\mathbf{E}X^2 = 1/n$. Βλέπουμε η δεύτερη ροπή δίνει πολλή περισσότερη πληροφορία για την X από το να γνωρίζαμε μόνο τη μέση τιμή της.

Απόδειξη Θεωρήματος **??**. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$Z_{\ge k} = \sum_{v\in[n]} 1_{|\mathcal{C}(v)|\ge k} = \sharp\{v \in [n] : |\mathcal{C}(v)| \ge k\}.$$

Τότε ισχύει ότι $|\mathcal{C}_{max}| \ge k \Leftrightarrow Z_{\ge k} \ge 1$ ή ισοδύναμα $|\mathcal{C}_{max}| < k \Leftrightarrow Z_{\ge k} = 0$.
Από το (1) του Λήμματος **??**, θέτοντας $\beta = 0$, παίρνουμε ότι

$$\mathbf{P}(Z_{\ge k} = 0) \le \frac{\mathbf{Var}(Z_{\ge k})}{\big(\mathbf{E}(Z_{\ge k})\big)^2}, \quad \text{όπου } k = k_n = [a\log n] \text{ με } a = \frac{1}{I_\lambda} - \epsilon$$

Βήμα 1: Βρίσκουμε κάτω φράγμα για την ποσότητα $\mathbf{E}(Z_{\geq k})$.

$$\mathbf{E}(Z_{\geq k}) = \mathbf{E}\left(\sum_{v \in [n]} 1_{|\mathcal{C}(v)| \geq k} \right) = n\,\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(1) \geq k\big) \overset{??}{\geq} n\,\mathbf{P}_{n-k,p}(T \geq k),$$

όπου T είναι το συνολικό πλήθος κόμβων για κλαδωτή με κατανομή απογόνων που ακολουθεί $\mathsf{Bin}(n-k,p)$.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω (Θεώρημα 3.20, Random Graphs and Complex Networks. Vol. I, Remco Van Der Hofstad):

$$\mathbf{P}_{n-k,p}(T \geq k) = \mathbf{P}^*_{\lambda^*}(T^* \geq k) + \frac{ck(\lambda^*)^2}{n'}$$

όπου

$$\lambda^* = (n-k)\,p = \frac{(n-k)\lambda}{n} = \frac{(n-a\log n)\lambda}{n} = \lambda - \frac{a\lambda \log n}{n} \sim \lambda$$

$$n' = n - k = n - a\log n \sim n$$

και συνεπώς έχουμε ότι

$$\frac{k(\lambda^*)^2}{n'} = k\,\frac{(n-k)^2\,p^2}{n-k} = k\,(n-k)\,\frac{\lambda^2}{n^2} \leq \frac{k}{n}\,\lambda^2 = \frac{a\log n}{n}\,\lambda^2.$$

Βρίσκουμε κάτω φράγμα για το $\mathbf{P}^*_{\lambda^*}(T^* \geq k)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^*_{\lambda^*}(T^* \geq k) \geq \mathbf{P}^*_{\lambda^*}(T^* = k) \quad &= \quad \frac{(\lambda^* k)^{k-1}}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda^* k} \sim \frac{(\lambda^* k)^{k-1}}{(k/\mathrm{e})^k\sqrt{2\pi k}}\,\mathrm{e}^{-\lambda^* k} = \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,k^{3/2}\,\lambda^*}\,\mathrm{e}^{-k(\lambda^*-1-\log\lambda^*)} = \frac{c}{k^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-kI_{\lambda^*}} \geq \\
&\geq \quad \frac{c}{k^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-k(I_\lambda+\epsilon_1)} \quad (\text{γιατί για μεγάλο } n \text{ ισχύει } |I_{\lambda^*} - I_\lambda| < \epsilon_1)
\end{aligned}$$

Έχουμε ότι $a < 1/I_\lambda \Leftrightarrow aI_\lambda < 1$. Παίρνουμε $\epsilon_2 > 0$ ώστε να ικανοποιούνται τα

$$a(I_\lambda + \epsilon_2 + \epsilon_3) < 1 \quad \text{και} \quad (\log n)^{3/2} < n^{a\epsilon_2} \Leftrightarrow \frac{1}{(\log n)^{3/2}} > \frac{1}{n^{a\epsilon_2}}$$

και παίρνουμε ότι

$$\mathbf{P}^*_{\lambda^*}(T^* = k) \geq \frac{c}{(\log n)^{3/2}} \cdot \frac{1}{n^a(I_\lambda+\epsilon_1)} \geq \frac{1}{n^{a(I_\lambda+\epsilon_1+\epsilon_2)}}.$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής κάτω φράγμα για το $\mathbf{E}(Z_{\geq k})$

$$\mathbf{E}(Z_{\geq k}) = n\,\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(1)| \geq k\big) \geq \frac{n}{n^{a(I_\lambda+\epsilon_1+\epsilon_2)}} = n^{1-a(I_\lambda+\epsilon_1+\epsilon_2)},$$

όπου $1 - a(I_\lambda + \epsilon_1 + \epsilon_2) \geq 0$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε άνω φράγμα για την ποσότητα $\mathbf{Var}(Z_{\geq k})$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(Z_{\geq k}) &= \sum_{i,j\in[n]} \mathbf{Cov}\big(1_{|\mathcal{C}(i)|\geq k}, 1_{|\mathcal{C}(j)|\geq k}\big) = \\
&= \sum_{i,j\in[n]} \Big\{\mathbf{E}\big(1_{|\mathcal{C}(i)|\geq k}, 1_{|\mathcal{C}(j)|\geq k}\big) - \mathbf{E}\big(1_{|\mathcal{C}(i)|\geq k}\big)\,\mathbf{E}\big(1_{|\mathcal{C}(j)|\geq k}\big)\Big\} = \\
&= \sum_{i,j\in[n]} \Big\{\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k\big) - \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k\big)^2\Big\} = \\
&= \sum_{i\in[n]} \Big\{\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k\big) - \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k\big)^2\Big\} + \sum_{\substack{i,j\in[n]\\ i\neq j}} \Big\{\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k\big) - \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k\big)^2\Big\}
\end{aligned}$$

Δουλεύουμε ξεχωριστά για το $\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k\big)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k\big) &= \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k, i \leftrightarrow j\big) + \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k, i \not\leftrightarrow j\big) = \\
&= \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, i \leftrightarrow j\big) + \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k, i \not\leftrightarrow j\big)
\end{aligned}$$

και συνεχίζουμε δουλεύοντας ξεχωριστά για το $\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k, i \not\leftrightarrow j\big)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, |\mathcal{C}(j)| \geq k, i \not\leftrightarrow j\big) &= \sum_{l=k}^{n} \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}_i| \geq k, |\mathcal{C}_j| \geq k, i \not\leftrightarrow j\big) = \\
&= \sum_{l=k}^{n} \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}_i| = l\big)\,\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}_j| \geq k, i \not\leftrightarrow j \,\big|\, |\mathcal{C}_i| = l\big) = \\
&= \sum_{l=k}^{n} \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}_i| = l\big)\,\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}_j| \geq k\big) \leq \quad \big(\text{η δεύτερη πιθανότητα σε } ER_{n-l}(p)\big) \\
&\leq \sum_{l=k}^{n} \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}_i| = l\big)\,\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}_j| \geq k\big) = \quad \big(\text{και η δεύτερη πιθανότητα σε } ER_{n}(p)\big) \\
&= \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(j)| \geq k\big) \sum_{l=k}^{n} \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq l\big) = \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(j)| \geq k\big)\,\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k\big)
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τώρα τα παραπάνω φτάνουμε στο

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(Z_{\geq k}) &\leq \sum_{i\in[n]} \Big\{\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k\big) - \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k\big)^2\Big\} + \sum_{\substack{i,j\in[n]\\ i\neq j}} \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, j \leftrightarrow j\big) \leq \\
&\leq \sum_{i,j\in[n]} \mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(i)| \geq k, j \leftrightarrow j\big) = \mathbf{E}\bigg(\sum_{i,j\in[n]} 1_{|\mathcal{C}(i)|\geq k}\, 1_{i\leftrightarrow j}\bigg) = \\
&= \mathbf{E}\bigg(\sum_{i\in[n]} 1_{|\mathcal{C}(i)|\geq k} \cdot |\mathcal{C}(i)|\bigg) = n\,\mathbf{E}\Big(|\mathcal{C}(i)| \cdot 1_{|\mathcal{C}(1)|\geq k}\Big)
\end{aligned}$$

Θα χρειαστούμε το παρακάτω:

Λήμμα 5. *Έστω X τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}$ και έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε,*

$$\mathbf{E}\big(X\,1_{X\geq k}\big) = k\,\mathbf{P}(X\geq k) + \sum_{j=k+1}^{\infty}\mathbf{P}(X\geq j).$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$X\,1_{X\geq k} = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{j\leq X}\,1_{X\geq k} = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{X\geq k\vee j}$$

και συνεπώς ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big(X\,1_{X\geq k}\big) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{P}(X\geq k\vee j) &= \sum_{j=1}^{k}\mathbf{P}(X\geq k) + \sum_{j=k+1}^{\infty}\mathbf{P}(X\geq j) = \\ &= k\,\mathbf{P}(X\geq k) + \sum_{j=k+1}^{\infty}\mathbf{P}(X\geq j).\end{aligned}$$

□

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιώντας το παραπανω λήμμα

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(Z_{\geq k_n}) &\leq n\left(k_n\,\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(1)|\geq k_n\big) + \sum_{j=k_n+1}^{\infty}\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}(1)|\geq j\big)\right) \leq \\ &\leq n\left(k_n\,\mathrm{e}^{-(k_n-1)I_\lambda} + \sum_{j=k_n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(j-1)I_\lambda}\right) = \\ &= n\left(\mathrm{e}^{I_\lambda}\,k_n\,\mathrm{e}^{-k_nI_\lambda} + \frac{\mathrm{e}^{-k_nI_\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-I_\lambda}}\right) \leq \\ &\leq c_\lambda\cdot n\cdot k_n\cdot\mathrm{e}^{-k_nI_\lambda} = \\ &= c_\lambda\cdot n\cdot a\,\log n\cdot n^{-a\,I_\lambda} = c_\lambda\cdot a\cdot n^{1-I_\lambda}\cdot\log n\end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε στο στο ζητούμενο ως εξής (για κατάλληλη επιλογή του ϵ)

$$\mathbf{P}\big(Z\geq k_n = 0\big) \leq \frac{c_\lambda\cdot a\cdot n^{1-I_\lambda}\cdot\log n}{(n^{1-aI_\lambda-\epsilon})^2} = \frac{a\cdot c_\lambda\cdot\log n}{n^{1-aI_\lambda-2\epsilon}} \leq \frac{c}{n^\delta}\to 0.$$

□

Μάθημα 21 (Υπερκρίσιμη και κρίσιμη περίπτωση - Κίνηση Brown)

Θα δούμε, χωρίς αποδείξεις, τι ισχύει για το μέγεθος της μεγαλύτερης συνεκτικής συνιστώσας σε ένα γράφημα $ER_n(p)$ όπου $p=\lambda/n$, για τις περιπτώσεις που $\lambda>1$ (υπερκρίσιμη) και $\lambda=1$ (κρίσιμη).

Υπερκρίσιμη περίπτωση, $\lambda > 1$**.** Ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\dfrac{|\mathcal{C}_{max}|}{n} \xrightarrow{P} \zeta_\lambda = \mathbf{P}\big(\text{επιβίωση κλαδωτής Poisson}(\lambda)\big)$.

2. $\dfrac{|\mathcal{C}_{max}| - \zeta_\lambda n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, \sigma_\lambda^2)$, όπου $\sigma_\lambda^2 = \dfrac{\zeta_\lambda(1-\zeta_\lambda)}{(1-\lambda+\lambda\zeta_\lambda)}$.

Κρίσιμη περίπτωση, $\lambda = 1$**.** Γενικότερα, για $\lambda_n = 1 + \theta/n^{1/3}$, $\theta \in R$ ισχύει ότι

$$|\mathcal{C}_{max}| \approx n^{2/3}$$

ή ακριβέστερα, υπάρχει $b > 0$ ώστε για κάθε $\omega > 1$ να ισχύει

$$\mathbf{P}_{\lambda_n}\left(\frac{1}{\omega} \le \frac{|\mathcal{C}_{max}|}{n^{2/3}} \le \omega\right) \ge 1 - \frac{b}{\omega}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{P}_{\lambda_n}\left(\frac{|\mathcal{C}_{max}|}{n^{2/3}} \notin I_\omega\right) \le \frac{b}{\omega}, \quad \text{όπου } I_\omega = \left[\frac{1}{\omega}, \omega\right].$$

Εδώ κλείνουμε το θέμα του γραφήματος $ER_n(p)$ και περνάμε στο επόμενο που είναι η **κίνηση Brown**.

Ορισμός 12. Καλούμε **ανέλιξη** κάθε σύνολο $(X_t)_{t\in I}$ τυχαίων μεταβλητών που είναι ορισμένες σε κοινό χώρο πιθανότητας, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών και συνήθως $I = \mathbb{N}$ ή $I = [0, \infty]$.

Παράδειγμα 16 (Η ανέλιξη Poisson στο $[0,\infty)$)**.** Έστω $\lambda > 0$ και $(T_i)_{i\ge 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $T_i \sim \exp(\lambda)$ και $S_i = T_1 + \ldots + T_i$. Θέτουμε $X_t = \sharp\{i \ge 1 : S_i \le t\}$. Η X_t ονομάζεται **ανέλιξη Poisson**.

Ορισμός 13 (Μονοδιάστατη κίνηση Brown)**.** Μια στοχαστική ανέλιξη $\big(B(t)\big)_{t\ge 0}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται **μονοδιάστατη κίνηση Brown** αν ισχύουν τα εξής:

(i) Η B έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε $n \ge 1$ και για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ με $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, οι τ.μ. $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες.

(ii) Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ με $0 \le s < t$ ισχύει ότι $B(t) - B(s) \sim \mathsf{N}(0, t-s)$.

(iii) Με πιθανότητα 1, η απεικόνιση $t \mapsto B(t)$ είναι συνεχής.

Κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις:

- Αν $B(0) = 0$ τότε καλούμε την B **τυπική κίνηση Brown** (για συντομία θα γράφουμε μερικές φορές ΤΚΒ).

- Γενικά το $B(0)$ είναι τυχαία μεταβλητή. Αν $\mathbf{P}(B(0) = x) = 1$ τότε καλούμε την B **κίνηση Brown που ξεκινάει από το** x. Όταν παίρνουμε πιθανότητα ή μέση τιμή για αυτήν την κίνηση Brown γράφουμε $\mathbf{P}_x$ και $\mathbf{E}_x$.
- Αν η B είναι κίνηση Brown, τότε η $X_t = B(t) - B(0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ είναι τυπική κίνηση Brown. Δηλαδή, αν θέλουμε $B(0) \sim \exp(1)$, παίρνουμε $X \sim \exp(1)$ και W ΤΚΒ και θέτουμε $B(t) = X + W(t)$.

Παρατήρηση. Έστω B τυπική κίνηση Brown. Οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης της B υπολογίζονται εύκολα, όπου με τον όρο κατανομές πεπερασμένης διάστασης εννούμε για $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, την κατανομή του $(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$.
Έστω $t_0 = 0$ και $X_k = B(t_k) - B(t_{k-1}),\ k = 1, \ldots, n$. Τότε, οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες (από ιδιότητα (i) της κίνησης Brown για ανεξαρτησία των προσαυξήσεων) και $X_k \sim \mathsf{N}(0, t_k - t_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$ (από ιδιότητα (ii) της κίνησης Brown). Προφανώς $B(t_k) = X_1 + \ldots + X_k$, άρα

$$\begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) \\ \vdots \\ B(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{t_1 - t_0}\, Z_1 \\ \sqrt{t_2 - t_1}\, Z_2 \\ \vdots \\ \sqrt{t_n - t_{n-1}}\, Z_n \end{bmatrix},$$

όπου $Z_1, \ldots, Z_n \sim \mathsf{N}(0, 1)$. Άρα το $(X_1, \ldots, X_n)$ είναι γκαουσιανό διάνυσμα (*gaussian vector*).

Μάθημα 22 (Κίνηση Brown)

Παράδειγμα 17. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και κίνηση Brown με $B(0) = x$. Τότε, για $s, t \geq 0$ ισχύει ότι $\mathbf{Cov}\big(B(s), B(t)\big) = s \wedge t$.
Για $s = t$ έχουμε $\mathbf{Cov}\big(B(s), B(t)\big) = \mathbf{Var}\big(B(t)\big) = t = s \wedge t$.
Επίσης έχουμε ότι $B(t) - B(0) \sim \mathsf{N}(0, t) \Rightarrow B(t) \sim \mathsf{N}(x, t)$.
Για $s < t$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}\big(B(s), B(t)\big) &= \mathbf{Cov}\big(B(s), B(s) + (B(t) - B(s))\big) = \\
&= \mathbf{Cov}\big(B(s), B(s)\big) + \mathbf{Cov}\big(B(s), B(t) - B(s)\big) = \\
&= s + 0 = s = s \wedge t.
\end{aligned}$$

Άσκηση 8 (5.3 από σημειώσεις Στοχαστικού Λογισμού)**.** Έστω $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ και έστω B τυπική κίνηση Brown. Να αποδειχθεί ότι η $X = a_1 B(t_1) + \ldots + a_n B(t_n)$ ακολουθεί την $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = 0$ και με σ^2 που θα προσδιορίσετε.

Λύση. Έστω $X_1 = B(t_1)$ και $X_i = B(t_i) - B(t_{i-1}) \sim \mathsf{N}(0, t_i - t_{i-1})$, $2 \leq i \leq n$. Τότε, προφανώς ισχύει ότι $B(t_i) = X_1 + X_2 + \ldots + X_i$ και άρα

$$\begin{aligned}
X &= a_1 X_1 + a_2(X_1 + X_2) + \ldots + a_n(X_1 + \ldots + X_n) = \\
&= X_1(a_1 + \ldots + a_n) + X_2(a_2 + \ldots + a_n) + \ldots + X_n a_n = \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i \left(\sum_{j=i}^{n} a_j \right)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, κατά τα γνωστά, $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = 0$ και

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{j=i}^{n} a_j \right)^2 \mathbf{Var} X_i \right\} = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{j=i}^{n} a_j \right)^2 (t_i - t_{i-1}) \right\}$$

□

Άσκηση 9 (5.4 από σημειώσεις Στοχαστικού Λογισμού)**.** Έστω $r, s, t \in \mathbb{R}$ με $0 \leq r < s < t$ και B τυπική κίνηση Brown. Να αποδειχθεί ότι η δεσμευμένη τ.μ. $B(s) - B(r) \,\big|\, \big(B(r), B(t)\big)$ ακολουθεί την $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = \frac{s-r}{t-r}(y - x)$ και $\sigma^2 = \frac{s-r}{t-r}(t - s)$, όπου $x = B(r)$ και $y = B(t)$.

Λύση. Έστω $Z = B(s) - B(r)$ και $W = B(t) - B(s)$. Θέλουμε να βρούμε την κατανομή της

$$Z \,\big|\, \big(B(r), B(t)\big) = Z \,\big|\, \big(B(r), B(t) - B(r)\big) \overset{(*)}{=} Z \,\big|\, B(t) - B(r) = Z \,\big|\, Z + W,$$

όπου η $(*)$ ισχύει γιατί η προσαύξηση $Z = B(s) - B(r)$ είναι ανεξάρτητη της $B(r)$.

Υπενθυμίζουμε ότι $f_{Z,Z+W}(a,b) = f_Z(a)f_W(b-a)$ (γενικότερα αν $h(Z,W) = (\tilde{Z},\tilde{W})$, τότε $f_{\tilde{Z},\tilde{W}}(a,b) = f_{Z,W}\big(h^{-1}(a,b)\big)\cdot|\mathbf{J}h^{-1}(a,b)|$, όπου $|\mathbf{J}h^{-1}(a,b)|$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα της h^{-1} στο σημείο (a,b)) και άρα έχουμε

$$\begin{aligned} f_{Z\,|\,Z+W=y+x}(z) &= \frac{f_{Z\,|\,Z+W}(z,y-x)}{f_{Z+W}(y-x)} = \frac{f_Z(z)f_W(y-x-z)}{f_{Z+W}(y-x)} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi(s-r)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{s-r}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(y-x-z)^2}{t-s}}}{\sqrt{2\pi(t-r)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{t-r}}} = \ldots = \\ &= \ldots = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{(s-r)(t-s)}{t-r}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 18. Έστω $0 \le r < s < t$ με $s = \frac{t+r}{2}$, $B(r) = x$ και $B(t) = y$. Τότε, από την παραπάνω άσκηση, έχουμε ότι

$$B(s) - B(r)\,\big|\,\big(B(r),B(t)\big) \sim \mathsf{N}(\mu,\sigma^2),\quad \text{όπου}\ \ \mu = \frac{1}{2}(y-x)\ \ \text{και}\ \ \sigma^2 = \frac{1}{4}(t-r)$$

και έπεται ότι

$$B(s)\,\big|\,\big(B(r),B(t)\big) \sim \mathsf{N}\bigg(\frac{x+y}{2},\frac{1}{4}(t-r)\bigg) = \frac{B(r)+B(t)}{2} + \sqrt{\frac{t-r}{4}}\,Z,\quad \text{όπου}\ Z \sim \mathsf{N}(0,1).$$

Θεώρημα 40. *Υπάρχει μια τυπική κίνηση Brown.*

Περιγραφή απόδειξης. Έστω ότι $B_1 \sim \mathsf{N}(0,1)$ και έστω $\mathcal{D}_n = \{\frac{k}{2^n},\ k = 0,1\ldots,2^n\}$.
Αν ξέρουμε τις τιμές της $B(d) = B(s)$ και $B(d+\frac{1}{2^n}) = B(t)$ για κάποιο $d \in \mathcal{D}_{n-1}$, ποια είναι η κατανομή του $B(\frac{t+s}{2})$; Από τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$B\bigg(\frac{t+s}{2}\bigg)\,\big|\,\big(B(t),B(s)\big) = \frac{B(t)+B(s)}{2} + \frac{1}{2^{(n+1)/2}}\,Z,\quad Z \sim \mathsf{N}(0,1).$$

Θεωρούμε $\Big\{Z_t : t \in \bigcup\limits_{n\ge 1}\mathcal{D}_n\Big\}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $Z_t \sim \mathsf{N}(0,1)$ και θέτουμε $B(0) = 0$ και $B(0) = Z_1$.
Αν έχουμε ορίσει την B στο σύνολο $\mathcal{D}_{n-1}$, για $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ έχουμε ότι $d-\frac{1}{2^n}, d-\frac{1}{2^n} \in \mathcal{D}_{n-1}$. Θέτουμε

$$B(d) = \frac{B(d-2^{-n}) + B(d+2^{-n})}{2} + \frac{1}{2^{(n+1)/2}}\,Z_d \quad \text{και επίσης}$$

$$F_0(t) = \begin{cases} Z_1, & t=1 \\ 0, & t=0 \\ \text{γραμμική}, & t\in(0,1) \end{cases} \quad \text{και}\quad F_n(t) = \begin{cases} \frac{Z_t}{2^{(n+1)/2}}, & t=1 \\ 0, & t=0 \\ \text{γραμμική}, & \text{ανάμεσα σε διαδοχικά σημεία του } D_n \end{cases}$$

Για $t \in \mathcal{D}_n$ ισχύει ότι $B(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} F_k(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k(t)$. Έτσι ορίζουμε την B στο $[0, 1]$. Έστω $\left(B^{(k)}\right)$ τυπικές κινήσεις Brown ορισμένες στο $[0, 1]$. Ορίζουμε

$$B(t) = B^{(1)}(1) + B^{(2)}(1) + \ldots + B^{(k)}(1) + B^{(k+1)}(t-k) \ , \text{ αν } t \in [k, k+1), \ k \geq 0.$$

$\square$

Έστω B τυπική κίνηση Brown. Τότε η B είναι μια απεικόνιση $B : \Omega \to C[0, \infty)$ και η κατανομή της B είναι μέτρο (καλείται **μέτρο Wiener**) στον χώρο $C[0, \infty)$.
Υπενθυμίζουμε τη μετρική:
Έστω $f_n, f \in C[0, \infty)$. Τότε $f_n \to f$ στον $C[0, \infty)$ αν για κάθε $k > 0$ ισχύει ότι

$$f_n|_{[0,k]} \to f|_{[0,k]} \quad \text{ομοιόμορφα}$$

και μια μετρική που συμφωνεί με αυτή τη σύγκλιση είναι η

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{||\,(f-g)|_{[0,n]}\,||_{\infty}}{||f||}$$

Θεώρημα 41. *Αν B και B^* είναι δύο τυπικές κινήσεις Brown, τότε έχουν την ίδια κατανομή. Δηλαδή ισχύει ότι*

$$\forall A \in \mathcal{B}(C[0, \infty)) \ \textit{ισχύει} \ \mathbf{P}(B \in A) = \mathbf{P}(B^* \in A).$$

Μάθημα 23 (Κίνηση Brown - Ιδιότητες)

Έστω $\big(B(t)\big)_{t\geq 0}$ μια κίνηση Brown. Ορίζουμε $\mathcal{F}_t = \sigma\big(\{B(s) : s \in [0,t]\}\big)$ (μπορούμε να σκεφτόμαστε την $\mathcal{F}_t$ ως την πληροφορία για το τι έχει κάνει η κίνηση Brown από την αρχή μέχρι τον χρόνο t).

Πρόταση 22 (Μετατόπιση)**.** *Έστω $t_0 \geq 0$. Θέτουμε $X(t) = B(t+t_0) - B(t_0)$, $\forall t \geq 0$. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

1. *Η X είναι τυπική κίνηση Brown και*
2. *Η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{t_0}$.*

Απόδειξη. 1. Ελέγχουμε τις ιδιότητες της κίνησης Brown:

(i) Για $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_n$, οι τ.μ. $X(s_1), X(s_2) - X(s_1), \ldots, X(s_n) - X(s_{n-1})$ είναι ίδιες με τις $B(t_0+s_1) - B(t_0)$, $B(t_0+s_2) - B(t_0+s_1), \ldots$, $B(t_0+s_n) - B(t_0+s_{n-1})$. Αυτές είναι προσαυξήσεις της B και γι'αυτό είναι ανεξάρτητες.

(ii) Για $0 \leq s < t$ έχουμε $X(t) - X(s) = B(t_0+t) - B(t_0+s) \sim \mathsf{N}(0, t-s)$.

(iii) Προφανώς, η X είναι συνεχής με πιθανότητα 1.

2. Η απόδειξη είναι τεχνική γι'αυτό εξετάζουμε την ειδική περίπτωση $t_0 = 0$. Ορίζουμε $\mathcal{F}_0 = \sigma\big((B(0)\big)$ και $\mathcal{F}_{t_0} = \sigma\big(\{B(s) : s \in [0,t_0]\}\big)$.
Για να αποδείξουμε ότι η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{t_0}$ αρκεί να δείξουμε ότι, για $n, l \in \mathbb{N}$ και $0 \leq s_1 < \ldots < s_n \leq t_0$, $0 \leq r_1 < \ldots, r_l$, οι παρακάτω τ.μ. είναι ανεξάρτητες:
$$\big(B(s_1), B(s_2), \ldots, B(s_n)\big)$$
$$\big(B(t_0+r_1) - B(t_0), \ldots, B(t_0+r_l) - B(t_0)\big)$$
το οποίο ισχύει.
Το (2) συνεπάγεται ότι $\big(B(t)\big)_{t\geq t_0} \,\big|\, \mathcal{F}_{t_0} \overset{d}{=} \big(B(t)\big)_{t\geq t_0} \,\big|\, B(t_0)$.

□

Πρόταση 23 (Αλλαγή κλίμακας)**.** *Έστω $c \neq 0$ και B τυπική κίνηση Brown. Η $X(t) \overset{d}{=} \frac{1}{c}\, B\big(c^2\, t\big)$, $\forall t \geq 0$ είναι τυπική κίνηση Brown. Ειδικά $B \overset{d}{=} -B$.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις ιδιότητες μία μία:

(i) Για $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots t_n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \big(X(t_0),\, X(t_1) - X(t_0),\, \ldots,\, X(t_n) - X(t_{n-1})\big) & = \\ = \;& \big(\tfrac{1}{c}B(c^2 t_0),\, \tfrac{1}{c}B(c^2 t_1) - \tfrac{1}{c}B(c^2 t_0),\, \ldots,\, \tfrac{1}{c}B(c^2 t_n) - \tfrac{1}{c}B(c^2 t_{n-1})\big) & = \\ = \;& \tfrac{1}{c} \cdot \big(B(c^2 t_0),\, B(c^2 t_1) - B(c^2 t_0),\, \ldots,\, B(c^2 t_n) - B(c^2 t_{n-1})\big) & \end{aligned}$$

και άρα ανεξάρτητες.

(ii) Για $0 \le s < t$ έχουμε $X(t) - X(s) = \frac{1}{c}\left(B(c^2 t) - B(c^2 s)\right) \sim \mathsf{N}\big(0, \frac{1}{c^2}\, c^2(t-s)\big) = \mathsf{N}\big(0, (t-s)\big)$.

(iii) Προφανώς, η X είναι συνεχής με πιθανότητα 1.

(iv) Έχουμε ότι $X(0) = \frac{1}{c}\, B(c^2 \cdot 0) = B(0) = 0$.

Συνεπώς η $X(t)$ είναι τυπική κίνηση Brown και για $c = -1$ παίρνουμε ότι $B \overset{d}{=} -B$. $\square$

Εφαρμογή. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Για $a \neq 0$ θέτουμε*

$$T_a^B = \inf\{t \ge 0 : B(t) = a\}.$$

Τότε, ισχύει ότι $T_a^B = a^2\, T_1^B$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την τυπική κίνηση Brown $X^a(t) = \frac{1}{a}\, B(a^2 t)$, $\forall t \ge 0$.
Τότε, έχουμε ότι $X^a(t) = 1 \Leftrightarrow B(a^2 t) = a$, άρα

$$T_1^{X_a} = \frac{1}{a^2}\, T_a^B \implies T_a^B = a^2\, T_1^{X_a} \overset{d}{=} a^2\, T_1^B \quad (\text{γιατί } X_a \overset{d}{=} B).$$

$\square$

Θεώρημα 42. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Τότε, η $X(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ t\, B(\frac{1}{t}), & t > 0 \end{cases}$ είναι τυπική κίνηση Brown.*

Απόδειξη. Η απόδειξη δεν είναι δύσκολη αν χρησιμοποιήσουμε τον εξής χαρακτηρισμό:
Αν $\mathbf{Cov}\big((X(t), X(s)\big) = s \wedge t$, $\forall s, t \ge 0$ και το διάνυσμα $\big(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\big)^T$ είναι γκαουσσιανό, τότε η $X(t)$ είναι τυπική κίνηση Brown.
Υπολογίζουμε το $\mathbf{Cov}\big((X(t), X(s)\big) = s \wedge t$:

$$\mathbf{Cov}\big((X(t), X(s)\big) = \mathbf{Cov}\left(s\, B\Big(\frac{1}{s}\Big), t\, B\Big(\frac{1}{t}\Big)\right) = st\, \mathbf{Cov}\left(B\Big(\frac{1}{s}\Big), B\Big(\frac{1}{t}\Big)\right) = st\left(\frac{1}{s} \wedge \frac{1}{t}\right) = t \wedge s.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t \to 0} t\, B\Big(\frac{1}{t}\Big) = X(0) = 0 \implies \lim_{t \to \infty} \frac{B(t)}{t} = 0.$$

$\square$

Επισκέψεις στο 0

Έστω B τυπική κίνηση Brown. Θέτουμε

$$T^+ = \inf\{t > 0 : B(t) > 0\} \quad \text{και} \quad T^- = \inf\{t > 0 : B(t) < 0\}.$$

Θεώρημα 43. *Ισχύει ότι* $\mathbf{P}(T^+ = T^- = 0) = 1$.

Απόδειξη. Για κάθε $a > 0$ ισχύει ότι $T^+ \stackrel{d}{=} a^2\, T^+$ (γιατί $X^a(t) = \frac{1}{a}\, B(a^2 t) \;\Rightarrow\; T_X^+ = \frac{1}{a^2}\, T_B^+$).
Για $x > 0$ και για κάθε $a > 0$ έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(T^+ > x) = \mathbf{P}(a^2\, T^+ > x) = \mathbf{P}\Big(T^+ > \frac{x}{a^2}\Big)$$

Για $a \to 0^+$ παίρνουμε $\mathbf{P}(T^+ > x) = \mathbf{P}(T^+ = \infty) \leq \mathbf{P}(T_1 = \infty) = 0$.
Άρα $\mathbf{P}(T^+ = 0) = 1$. Όμοια δείχνουμε ότι $\mathbf{P}(T^- = 0) = 1$ (επειδή $B \stackrel{d}{=} -B$). Συνεπώς παίρνουμε ότι $\mathbf{P}\big(\inf\{t > 0 : B(t) = 0\} = 0\big) = 1$. $\square$

Πρόταση 24. *Έστω $Z = \{t > 0 : B(t) = 0\}$. Με πιθανότητα 1 ισχύει ότι $\lambda(Z) = 0$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue.*

Απόδειξη. Το Z είναι Lebesgue-μετρήσιμο γιατί $Z = B^{-1}(0)$ και η B είναι συνεχής. Έχουμε ότι

$$\mathbf{E}\big((\lambda(Z)\big) = \mathbf{E}\bigg(\int_0^\infty 1_{B(s)=0}\, ds\bigg) = \int_0^\infty \mathbf{E}\big(1_{B(s)=0}\big)\, ds = \int_0^\infty \underbrace{\mathbf{P}(B(s) = 0)}_{\sim \mathsf{N}(0,s)}\, ds = 0$$

και άρα παίρνουμε ότι $\mathbf{P}\big(\lambda(Z) = 0\big) = 1$. $\square$

Συμπεριφορά στο ∞

Πρόταση 25. *Με πιθανότητα 1 ισχύει ότι*

$$\overline{\lim}\, \frac{B(t)}{\sqrt{t}} = +\infty \quad \textit{και} \quad \underline{\lim}\, \frac{B(t)}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι

$$\limsup \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = +\infty, \quad \text{με πιθανότητα } 1.$$

Για $k > 0$, έστω $A_n = \big\{\frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq k\big\}$. Έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(\limsup A_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\big(B(1) \geq k\big) > 0.$$

Ισχύει ότι

$$\limsup_{n\geq 1} A_n \subseteq \Big\{\overline{\lim}\, \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geq k\Big\} \in \mathcal{C}_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma\big(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\big),$$

όπου $\big(X_i\big)_{i\geq 1}$ με $X_i = B(i) - B(i-1)$.
Επίσης, δεδομένου ενός $n_0 \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\frac{B(n)}{\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_{n_0+1} + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$$

και συνεπώς ισχύει ότι

$$\left\{ \overline{\lim} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geq k \right\} \in \sigma\big(X_{n_0+1}, X_{n_0+2}, \ldots\big) \implies \left\{ \overline{\lim} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geq k \right\} \in \mathcal{C}_\infty.$$

Από τον 0-1 νόμο του Kolmogorov παίρνουμε ότι

$$\mathbf{P}\Bigg(\underbrace{\overline{\lim} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geq k}_{C_k} \Bigg) = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

και άρα $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k \Big) = 1$ και στο $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ έχουμε $\overline{\lim} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geq k = +\infty$. $\square$

Συμπέρασμα: Άρα $\mathbf{P}(T_1 < \infty) = 1$ και $\mathbf{P}\big(\sup\{t : B(t) = 0\} = \infty \big) = 1$.

Μάθημα 24 (Πολυδιάστατη Κίνηση Brown - Θ. Donsker)

Άσκηση 10 (5.9 από σημειώσεις Στοχαστικού Λογισμού)**.** Έστω $t_0 > 0$ και B τυπική κίνηση Brown. Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\underbrace{\text{η } B \text{ έχει τοπικό ελάχιστο στο } t_0}_{A_{t_0}}) = 0$$

Λύση. Η $X(t) = B(t_0 + t) - B(t_0)$ είναι τυπική κίνηση Brown. Έστω $\omega \in A_{t_0}$ και $\delta(\omega) > 0$ ώστε $X(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, \delta)$.
Τότε, $T_X^- = \inf\{t > 0 : X(t) < 0\} \geq \delta > 0$. Όμως $\mathbf{P}(T_X^- > 0) = 0$ από Θεώρημα **??** και επειδή $A_{t_0} \subseteq \{T_X^- > 0\}$, παίρνουμε ότι $\mathbf{P}(A_{t_0}) = 0$. □

Παραπάνω είδαμε ότι η πιθανότητα να έχει μια τυπική κίνηση Brown B τοπικό ελάχιστο σε ένα *δεδομένο σημείο* είναι 0. Όμως η B πρέπει να έχει τοπικά ελάχιστα γιατί είναι συνεχής. Αυτό εξηγείται αν εξετάσουμε προσεκτικά τα παρακάτω:

$$\forall t > 0,\ \mathbf{P}(\underbrace{\text{το } t \text{ δεν είναι τοπικό ελάχιστο της } B}_{A_t^c}) = 1$$

$$\mathbf{P}(\underbrace{\forall t > 0,\ \text{το } t \text{ δεν είναι τοπικό ελάχιστο της } B}_{\bigcap_{t>0} A_t^c}) = 0.$$

Σε αντίστοιχο πνεύμα είναι και η παρακάτω παρατήρηση, όμως τώρα η τομή έχει κι αυτή πιθανότητα 1:

Παρατήρηση (Άσκηση 5.10 από σημειώσεις Στοχαστικού Λογισμού)**.** Έστω $t_0 > 0$ και B τυπική κίνηση Brown. Ισχύουν τα παρακάτω:

$$\mathbf{P}(\underbrace{\text{ η } B \text{ δεν είναι διαφορίσιμη στο } t_0}_{C_{t_0}}) = 1$$

$$\mathbf{P}(\underbrace{\forall t > 0,\ \text{η } B \text{ δεν είναι διαφορίσιμη στο } t}_{\bigcap_{t>0} C_t}) = 1$$

Ορισμός 14 (Η πολυδιάστατη κίνηση Brown)**.** *Έστω $d \geq 1$ ακέραιος και $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(d)}$ ανεξάρτητες (μονοδάστατες) κινήσεις Brown. Ονομάζουμε* **d-διάστατη κίνηση Brown** *την ανέλιξη $B(t) = \left(B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(d)}\right)^T$, $\forall t \geq 0$.*
Αν $B(0) = 0 \in \mathbb{R}^d$, λέμε την B **τυπική d-διάστατη κίνηση Brown**.

Έστω $(X_i)_{i \geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $\mathbf{E}X_1 = 0$ και $\mathbf{Var}X_1 = 1$ (π.χ. $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1 = 1/2)$. Θέτουμε $S_0 = 0$ και $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\forall n \geq 1$ και

$$S(x) = \begin{cases} S_x, & \text{αν } x \in \mathbb{N} \\ \text{γραμμική επέκταση}, & \text{αν } x \in (k, k+1) \text{ για } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε την

$$S_n^* : [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ με } S_n^*(t) = \frac{S(nt)}{\sqrt{n}}.$$

Η S_n^* είναι τ.μ. με τιμές στον $C[0, \infty)$ και συγκλίνει κατά κατανομή στην τυπική κίνηση Brown.

Υπενθύμιση: Λέμε ότι η ακολουθία τ.μ. $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τ.μ. X, και γράφουμε $X_n \Rightarrow X$, αν και μόνο αν $\mathbf{P}(X_n \leq x) \to \mathbf{P}(X \leq x)$ για κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$ που η F_X είναι δεξιά συνεχής. Ή ισοδύναμα αν $\mathbf{E}f(X_n) \to \mathbf{E}f(X)$ για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη.

Υπενθυμίζουμε και σε ποια μετρική αναφερόμαστε όταν μιλάμε για σύγκλιση στον $C[0, \infty)$. Έστω $f_n, f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Λέμε ότι η f_n **συγκλίνει στην** f **ομοιόμορφα στα συμπαγή**, και γράφουμε $f_n \overset{u.c.}{\to} f$, αν

$$\lim_{n\to\infty} ||\,(f - f_n)|_{[0,k]}\,||_\infty = 0,\ \forall k > 0$$

Μια μετρική που συμφωνεί με αυτή τη σύγκλιση ορίζεται ως εξής:

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \big\{ \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, n]\} \wedge 1 \big\}.$$

Η $F : C[0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $F(f) = f(1)$ είναι συνεχής γιατί αν $f_n \overset{u.c.}{\to} f$, τότε $||\,(f_n - f)|_{[0,1]}\,||_\infty \to 0$ και άρα $f_n(1) - f(1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Η συγκλιση κατά κατανομή της S_n^* στην τυπική κίνηση Brown, εκφράζεται τυπικά με το παρακάτω:

Θεώρημα 44 (Donsker)**.** *Για κάθε $F : C[0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη, ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}F(S_n^*) = \mathbf{E}F(B), \quad \textit{όπου } B \textit{ τυπική κίνηση Brown}.$$

Παρατήρηση. Το Θέωρημα Donsker δίνει το κεντρικό οριακό θεώρημα, δηλαδή ότι

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathsf{N}(0, 1), \text{ για } \mathbf{E}X_1 = 0 \text{ και } \mathbf{Var}X_1 = 1$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\mathbf{E}\, g\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}\, g(Z), \quad \forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ φραγμένη και συνεχή με } Z \sim N(0, 1)$$

Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη και συνεχής. Ορίζουμε $F : C[0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $F(f) = g\big(f(1)\big)$. Η F είναι φραγμένη και συνεχής (γιατί αν $f_n \overset{u.c.}{\to} f$, τότε $f_n(1) \to f(1) \Rightarrow g\big(f_n(1)\big) \to$

$g\big(f(1)\big)$).
Άρα, από Θ.Donsker, έχουμε ότι

$$\mathbf{E}\, g\big(S_n^*(1)\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}\, g\big(B(1)\big) \implies \mathbf{E}\, g\bigg(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\bigg) \to \mathbf{E}\, g\big(B(1)\big)$$

και το ζητούμενο έπεται γιατί $B(1) \sim \mathsf{N}(0,1)$.

Άσκηση 11 (5.12 από σημειώσεις Στοχαστικού Λογισμού)**.** Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος και $I_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2$, $\forall n \geq 1$. Να αποδειχθεί ότι η I_n συγκλίνει κατά κατανομή στην τ.μ. $\displaystyle\int_0^1 \big(B(t)\big)^2 dt$, όπου B τυπική κίνηση Brown.

Λύση. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\frac{S_{tn}}{\sqrt{n}} \approx B(t) \;\text{ άρα για } t = \frac{k}{n} \;\text{ ισχύει ότι }\; \frac{S_k}{\sqrt{n}} \approx B\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

και συνεπώς

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\bigg(\frac{S_k}{\sqrt{n}}\bigg)^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\bigg(B\Big(\frac{k}{n}\Big)\bigg)^2$$

Θέλουμε για κάθε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη να ισχύει ότι

$$\mathbf{E}\, g(I_n) \to \mathbf{E}\, g\bigg(\int_0^1 \big(B(t)\big)^2\, dt\bigg).$$

Για δεδομένη g θεωρούμε την $F : C[0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $F(f) = g\bigg(\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\, dt\bigg)$.

(i) Η F είναι συνεχής: Αν $f_n \overset{u.c.}{\to} f$, τότε

$$\int_0^1 f_n^2(t)\, dt \to \int_0^1 f^2(t)\, dt \implies g\bigg(\int_0^1 f_n^2(t)\, dt\bigg) \to g\bigg(\int_0^1 f^2(t)\, dt\bigg)$$

(ii) $F(B) = g\bigg(\displaystyle\int_0^1 B^2(t)\, dt\bigg)$.

(iii) Έχουμε $\mathbf{E}\, F(S_n^*) \to \mathbf{E}\, F(B) = \mathbf{E}\, g\bigg(\displaystyle\int_0^1 B^2(t)\, dt\bigg)$, από Θ.Donsker.
Μένει να αποδείξουμε ότι $\mathbf{E}\, g(I_n) - \mathbf{E}\, F(S_n^*) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, δηλαδή ότι
$\mathbf{E} g(I_n) - \mathbf{E} g\bigg(\displaystyle\int_0^1 \big(S_n^*(t)\big)^2\, dt\bigg) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

□

Μάθημα 25 (Η Ισχυρή Ιδιότητα Markov για την κίνηση Brown)

Παράδειγμα 19 (5.18 από σημειώσεις Στοχαστικού Λογισμού)**.** Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\mathbf{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \max_{1\leq k\leq n} S_k < x\Big) \to \mathbf{P}\Big(\max_{t\in[0,1]} B(t) < x\Big)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\frac{S_k}{\sqrt{n}} \approx B\Big(\frac{k}{n}\Big) \text{ και άρα } \max_{1\leq k\leq n} B\Big(\frac{k}{n}\Big) < x$$

Θεωρούμε την $F : C[0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $F(f) = 1_{\max\{f(t):t\in[0,1]\}<x}$. Έστω

$$D_F = \big\{f : F \text{ ασυνεχής στην } f\big\} = \big\{f : \max\{f(t) : t \in [0,1]\} = x\big\}.$$

Αν $f \in C[0,\infty)$ και $\max\{f(t) : t \in [0,1]\} \neq x$, τότε η F είναι συνεχής στην f.
Έστω $f_n \stackrel{u.c.}{\to} f$. Τότε, αν $||\, F|_{[0,1]}\, ||_\infty < x$, έπεται ότι για μεγάλα n ισχύει $||\, f_n|_{[0,1]}\, ||_\infty < x$ και άρα $F(f_n) = 1 \to 1 = F(f)$.
Αν $||\, F|_{[0,1]}\, ||_\infty > x$, τότε για μεγάλα n ισχύει $||\, f_n|_{[0,1]}\, ||_\infty > x$ και άρα $F(f_n) = 0 \to 0 = F(f)$.
Υπάρχει πρόβλημα αν $f \in D_F$ αλλά λύνεται με τη βοήθεια του παρακάτω:

Πρόταση 26. *Αν $(X_n)_{n\geq 1}$, τ.μ. με τιμές σε διαχωρίσιμο μετρικό χώρο $\mathcal{X}$ και $X_n \Rightarrow X$, τότε $\mathbf{E}\,F(X_n) \to \mathbf{E}\,F(X)$ για κάθε $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ φραγμένη με $\mathbf{P}(X \in D_F) = 0$ (όπου με D_F συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της F).*

Συνεπώς μπορούμε στο παράδειγμά μας να εφαρμόσουμε το Θ.Donsker, αρκεί να ισχύει $\mathbf{P}(B \in D_F) = 0$. Από την ισχυρή ιδιότητα Markov για την κίνηση Brown, που θα μελετήσουμε παρακάτω, έχουμε αυτό που θέλουμε γιατί μας δίνει ότι

$$\mathbf{P}(B \in D_F) = \mathbf{P}\big(\max\{B(t) \in [0,1]\} = x\big) = 0.$$

□

Παράδειγμα 20. Έστω $A + n = \max\{k \leq n : S_k = 0\}$. Έπεται (με κάποια δουλειά) από το Θ.Donsker ότι

$$\frac{A_n}{n} \Rightarrow Z = \max\{t \in [0,1] : B(t) = 0\}$$

Αυτό μπορούμε να το απαδείξουμε παρατηρώντας ότι

$$S_k = S\Big(n\,\frac{k}{n}\Big) = \sqrt{n}\,S^*\Big(\frac{k}{n}\Big) \approx \sqrt{n}\,B\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

και χρησιμοποιώντας την $F(f) = \max\{t : f(t) = 0\}$.

Η ισχυρή ιδιότητα Markov

Έστω $B(t)$ d-διάστατη κίνηση Brown και $\mathcal{F}_t = \sigma\big(\{B(s) : s \in [0,t]\}\big)$. Έστω $T : \Omega \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Η T λέγεται **χρόνος διακοπής** (ως προς την $\mathcal{F}_t$) αν

$$\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \ge 0.$$

Για παράδειγμα, για $d = 1$ και $T = \inf\{t > 0 : B(t) = 3\}$ έχουμε ότι $\{T \le t\} = \{\exists s \le t : B(s) = 3\} \in \mathcal{F}_t$ και άρα το T είναι χρόνος διακοπής.
Αν T είναι χρόνος διακοπής, σκεφτόμαστε το $\mathcal{F}_T$ ως την πληροφορία μέχρι τον χρόνο T. Τυπικά η $\mathcal{F}_T$ ορίζεται ως

$$\mathcal{F}_T = \big\{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t\big\}.$$

Θεώρημα 45 (Ισχυρή ιδιότητα Markov)**.** *Έστω B τυπική κίνηση Brown και έστω T χρόνος διακοπής με $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$. Τότε η ανέλιξη $\big(B(T+t) - B(t)\big)_{t \ge T}$ είναι τυπική κίνηση Brown, ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_T$.*

Παράδειγμα 21. Έστω B μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown και $= \max\{t \le 1 : B(t) = 0\}$. Να αποδειχθεί ότι ο T δεν είναι χρόνος διακοπής.
Έχουμε ότι $\mathbf{P}\big(B(1) = 0\big) = 0$ και άρα $\mathbf{P}(T < 1) = 1$.
Αν ο T ήταν χρόνος διακοπής, τότε η $X_t = B(T+t) - B(t)$ θα ήταν τυπική κίνηση Brown. Όμως $X_t \ne 0$, $\forall t \in (0, 1-T)$, άτοπο.

Θεώρημα 46 (Αρχή της ανάκλασης)**.** *Έστω B μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown και T χρόνος διακοπής με $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$. Τότε, η παρακάτω ανέλιξη είναι τυπική κίνηση Brown:*

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} B(t), & t \in [0,T] \\ 2\,B(T) - B(t), & t \ge T \end{cases}$$

Σκιαγράφηση απόδειξης. Έστω $B^{(1)} = B|_{[0,T]}$, $B^{(2)} = B(T+t) - B(t)$, $\forall t \ge 0$.
Η $B^{(2)}$ είναι τυπική κίνηση Brown (από προηγούμενο θεώρημα) και $B^{(2)} \overset{d}{=} -B^{(2)}$.
Άρα η B που ορίζεται ως η “συγκόλληση” $\big(B^{(1)}, B^{(2)}\big)$ έχει την ίδια κατανομή με την $\hat{B}$ που ορίζεται ως η “συγκόλληση” $\big(B^{(1)}, -B^{(2)}\big)$. $\square$

Πόρισμα 3. *Έστω $M(t) = \sup\big\{B(s) : s \in [0,t]\big\}$. Για κάθε $t, a > 0$ ισχύει ότι*

$$\mathbf{P}\big(M(t) > a\big) = 2\,\mathbf{P}\big(B(t) > a\big) = \mathbf{P}\big(|B(t)| > a\big).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την αρχή της ανάκλασης για τον χρόνο διακοπής $T_a = \inf\{t > 0 : B(t) = a\}$. Είναι χρόνος διακοπής γιατί

$$\{T_a \le t\} \in \mathcal{F}_t \ \text{ αφού } \ \{T_a \le t\} = \bigcap_{n \ge 1} \bigcup_{q \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \Big\{B(q) > a - \frac{1}{n}\Big\}.$$

Η $\hat{B}(t) = \begin{cases} B(t), & t \in [0, T_a] \\ 2\,a - B(t), & t \geq T_a \end{cases}$ είναι τυπική κίνηση Brown. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(M(t) > a\big) &= \mathbf{P}\big(M(t) > a,\, B(t) > a\big) + \mathbf{P}\big(M(t) > a,\, B(t) < a\big) + \mathbf{P}\big(M(t) > a,\, B(t) = a\big) = \\ &= \mathbf{P}\big(B(t) > a\big) + \mathbf{P}\big(\hat{B}(t) > a\big) = 2 \cdot \mathbf{P}\big(B(t) > a\big) \end{aligned}$$

Άρα $M(t) \overset{d}{=} |B(t)|,\ \forall t \geq 0$.
Παρατηρούμε ότι οι $\big(M(t)\big)_{t\geq 0}$ και $\big(|B(t)|\big)_{t\geq 0}$ είναι διαφορετικές ως ανελίξεις καθώς η $\big(M(t)\big)_{t\geq 0}$ είναι αύξουσα ως μονοπάτι ενώ η $\big(|B(t)|\big)_{t\geq 0}$ προφανώς δεν είναι. $\square$