Στοχαστικές Ανελίξεις

Εργασία 1

- Από το σύγγραμμα του μαθήματος τις ασκήσεις 6, 7, 10, 12, 14, 23, 30, 31.
- Από το βιβλίο του Kulkarni τις ασκήσεις 2.2, 2.7 στη σελίδα 53.
- Την εξής άσκηση.

  Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$. Θέτουμε $M_n := \max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Είναι η $(M_n)_{n\geq 0}$ αλυσίδα Markov;

για την πιθανότητα ενός ενδεχομένου A που εξαρτάται από την τροχιά της αλυσίδας. Για παράδειγμα, αν $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{X}^{n+1}$, έχουμε

$$\mathbb{P}_x\big[(X_0, \dots, X_n) = v\big] = \delta_x(v_0)p(v_0, v_1)\cdots p(v_{n-1}, v_n).$$

Χρησιμοποιώντας τη μαρκοβιανή ιδιότητα για $k = 0$, έχουμε ότι $\mathbb{P}\big[\,\cdot\,\big|X_0 = x\big] = \mathbb{P}_x\big[\,\cdot\,\big]$.

1.5 Ασκήσεις

Άσκηση 1 Θεωρήστε δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές A,Θ και ορίστε τη στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t\geq 0}$ με τύπο

$$X_t = A\sin(\omega t + \Theta),$$

όπου $\omega \in \mathbb{R}$. Αν η A ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό $\lambda = 1$ και η Θ ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2\pi]$, υπολογίστε τις $\mathbb{E}\big[X_t\big]$ και $\mathbb{E}\big[X_t X_s\big]$, για κάθε $s, t \geq 0$.

Άσκηση 2 Αν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι η στοχαστική διαδικασία του Παραδείγματος 3, ορίζουμε

$$Y_t = e^{-t}X_{e^{2t}}.$$

Δείξτε ότι η $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ είναι διαδικασία Gauss, με $m(t) = \mathbb{E}\big[Y_t\big] = 0$ και $\rho(s,t) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_s) = e^{-|t-s|}$.

Άσκηση 3 Θεωρήστε μια διαδικασία Gauss $\{X_t\}_{t\geq 0}$, με $m(t) = \mathbb{E}\big[X_t\big] = 0$, για κάθε $t \geq 0$ και

$$\rho(s,t) = \mathrm{Cov}\big(X_t, X_s\big) = \frac{1}{2}\big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\big), \quad s, t \geq 0,$$

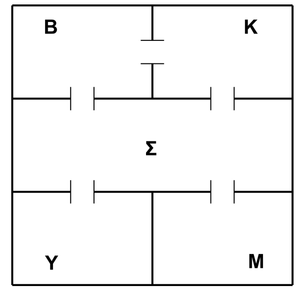
για κάποιο $H \in (0, 1)$.
α) Δείξτε ότι για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $X_t \sim \mathcal{N}\big(0, t^{2H}\big)$.
β) Υπολογίστε για $t \geq 0$ και $h > 0$ τη μέση τιμή και τη διασπορά της προσαύξησης $X_{t+h} - X_t$ και δείξτε ότι η $X_{t+h} - X_t$ ακολουθεί την ίδια κατανομή με την X_h.
γ) Δείξτε ότι για κάθε $t, h > 0$, η $X_{t+h} - X_t$ είναι ανεξάρτητη από την X_t, αν και μόνο αν $H = 1/2$.
δ) Ποια γνωστή μας στοχαστική διαδικασία είναι η $\{X_t\}_{t\geq 0}$ όταν $H = 1/2$;
ε) Ορίζουμε για κάθε $t \geq 0:\ Y_t = \alpha^{-H}X_{\alpha t}$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι $\mathbb{E}\big[Y_t\big] = \mathbb{E}\big[X_t\big]$, για κάθε $t \geq 0$ και $\mathrm{Cov}\big(Y_t, Y_s\big) = \mathrm{Cov}\big(X_t, X_s\big)$, για κάθε $s, t \geq 0$. Πώς ερμηνεύετε αυτό το αποτέλεσμα;

Άσκηση 4 α) Αντικαταστήστε τα σύμβολα * με αριθμούς, ώστε ο πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & * & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/8 & * \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & * & * \\ * & 3/5 & 1/5 & 1/5 & * \\ 0 & 0 & 1/10 & 1/5 & * \end{pmatrix}$$

να είναι πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, \dots, 7\}$ με πιθανότητες μετάβασης $p(i,j)$ για κάθε $i, j \in \mathbb{X}$.

Άσκηση 5 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός σπιτιού με πέντε δωμάτια: κουζίνα (Κ), βιβλιοθήκη (Β), σαλόνι (Σ), υπνοδωμάτιο (Υ) και μπάνιο (Μ), καθώς και οι πόρτες που τα συνδέουν. Ένα έντομο που ζει στο σπίτι κάθε βράδυ διασχίζει τυχαία μία από τις πόρτες του δωματίου στο οποίο βρίσκεται και παραμένει στο δωμάτιο που οδηγεί η πόρτα μέχρι το επόμενο βράδυ. Αρχικά το έντομο βρίσκεται στο μπάνιο. Αν $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι η μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ ={Κ, Β, Σ, Υ, Μ} που περιγράφει τη θέση του εντόμου μετά από n βράδυα, βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής της.



Άσκηση 6 Έχουμε πέντε χαρτιά της τράπουλας, τα τέσσερα είναι επτά κούπα και το ένα ρήγας σπαθί. Τα απλώνουμε στη σειρά σε ένα τραπέζι και σε κάθε βήμα επιλέγουμε ένα από τα δύο ακραία χαρτιά (το αριστερότερο με πιθανότητα 2/3, το δεξιότερο με πιθανότητα 1/3) και το τοποθετούμε στη μέση. Κατασκευάστε έναν κατάλληλο χώρο καταστάσεων και τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας που θα περιέγραφε την θέση του ρήγα.

Άσκηση 7 Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι να φέρουμε πέντε συνεχόμενες φορές έξι. Περιγράψτε μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$ που θα μοντελοποιούσε αυτό το παιχνίδι. Κάντε το ίδιο για την περίπτωση στην οποία ρίχνουμε το ζάρι μέχρι να εμφανιστεί η ακολουθία 65656.

Άσκηση 8 Επαναλαμβάνουμε ρίψεις ενός ζαριού και για $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με S_n το άθροισμα των n πρώτων ζαριών μας. Αν $X_n = S_n(\text{mod}5)$, δείξτε ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα και βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασής της.

Άσκηση 9 Αυτή η άσκηση μας διδάσκει πώς να προσομοιώσουμε μια κατανομή στον $\mathbb{X}$ με τη βοήθεια μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών. Έστω $\mathbb{X} = \{v_1, v_2, \dots\}$ ένας αριθμήσιμος χώρος καταστάσεων. Για μια σ.μ.π. $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{X}$ ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\Phi_p : (0,1] \to \mathbb{X}, \qquad \Phi_p(x) = v_k, \quad \text{αν } \sum_{j=1}^{k-1} p_i < x \le \sum_{j=1}^{k} p_i.$$

Δείξτε ότι, αν η τυχαία μεταβλητή U έχει ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1], τότε η $\Phi_p(U)$ έχει σ.μ.π. $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Άσκηση 10 Θεωρήστε έναν αριθμήσιμο χώρο $\mathbb{X}$ και μια συνάρτηση $\Phi : \mathbb{X} \times [0,1] \to \mathbb{X}$. Αν $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1] και ορίσουμε αναδρομικά τη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως

$$X_0 = x \in \mathbb{X}, \qquad X_n = \Phi(X_{n-1}, U_n) \text{ για } n \in \mathbb{N},$$

τότε η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μαρκοβιανή αλυσίδα. Ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας; Με τη βοήθεια και της προηγούμενης άσκησης, εξηγήστε πώς μπορούμε να προσομοιώσουμε μια μαρκοβιανή αλυσίδα με δεδομένες πιθανότητες μετάβασης.

Άσκηση 11 Σ' ένα ράφι της βιβλιοθήκης σας υπάρχουν τρία βιβλία: Algebra, Basic Topology, Calculus, που θα συμβολίζουμε με A,B,C για συντομία. Κάθε πρωί παίρνετε τυχαία ένα βιβλίο από τη θέση του με πιθανότητες p, q, r, αντίστοιχα. Όταν τελειώνετε το διάβασμά σας για την ημέρα, το ξαναβάζετε στο ράφι στην αριστερότερη θέση. Η διάταξη των βιβλίων είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο $\mathbb{X}$ των μεταθέσεων των συμβόλων $\{A, B, C\}$. Ποιος είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης αυτής της αλυσίδας;

Άσκηση 12 Στο μοντέλο διάχυσης του Ehrenfest, N σωματίδια τοποθετούνται σε ένα δοχείο με δύο διαμερίσματα, Α και Β. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε τυχαία ένα από τα N σωματίδια και του αλλάζουμε διαμέρισμα. Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ η μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{0, 1, \ldots, N\}$ που περιγράφει το πλήθος των σωματιδίων στο διαμέρισμα Α μετά από n βήματα. Ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης της $\{X_n\}_n$;

Άσκηση 13 Ένας παντοπώλης εφοδιάζεται κάθε πρωί με δύο πακέτα μπισκότα Alfajor. Η ημερήσια ζήτηση για τα μπισκότα αυτά είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/2$. Αν χθες βράδυ δεν είχαν μείνει καθόλου μπισκότα Alfajor και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι το πλήθος των πακέτων που υπάρχει στο παντοπωλείο το βράδυ της n-οστής ημέρας, δείξτε ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μαρκοβιανή αλυσίδα και βρείτε τις πιθανότητες μετάβασής της.

Άσκηση 14 Θεωρήστε δύο ακολουθίες $\{X_n, Y_n\}_{0\le n\le N-1}$ από ανεξάρτητα, τυχαία, δεκαδικά ψηφία. Σχηματίστε τους ακεραίους

$$X = X_0 + X_1 \times 10 + \cdots + X_{N-1} \times 10^{N-1}, \qquad Y = Y_0 + Y_1 \times 10 + \cdots + Y_{N-1} \times 10^{N-1}$$

και προσθέστε τους, όπως μάθαμε στο δημοτικό, ξεκινώντας από τα ψηφία των μονάδων X_0, Y_0, συνεχίζοντας με τα ψηφία των δεκάδων X_1, Y_1 κ.λπ., μεταφέροντας το κρατούμενο, όπου χρειάζεται. Αν $C_n \in \{0, 1\}$ είναι το κρατούμενο της πρόσθεσης που μεταφέρουμε στο n-οστό βήμα, δείξτε ότι η $\{C_n\}_{0\le n\le N-1}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{0, 1\}$ και βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας.

1.6 Αριθμητικά πειράματα

Άσκηση 15 Κατεβάστε και εγκαταστήστε τη γλώσσα Python 2.7.7. Μπορείτε να βρείτε τα σχετικά αρχεία εδώ. Ανάλογα με το λειτουργικό σύστημα του Η/Υ σας, μπορείτε να βρείτε και ολοκληρωμένα πακέτα. Αν ο υπολογιστής σας δεν τρέχει το λειτουργικό σύστημα Linux, πιθανά να βρείτε χρήσιμο να εγκαταστήσετε έναν εξομοιωτή, σύμφωνα με τις οδηγίες που θα βρείτε εδώ.

Άσκηση 16 Κατεβάστε το πρόγραμμα `simple_markov_chain_lib.py` και αποθηκεύστε το στον κατάλογο που θα δουλέψετε. Σ' αυτή την φάση δεν χρειάζεται καν να το ανοίξετε. Το πρόγραμμα αυτό υλοποιεί τον αλγόριθμο της Άσκησης 10. Θα το χρησιμοποιούμε σαν βιβλιοθήκη στα επόμενα προγράμματα που θα φτιάξουμε.

Άσκηση 17 Κατεβάστε και τρέξτε το πρόγραμμα `test.py`. Το πρόγραμμα αυτό προσομοιώνει τα πρώτα δέκα βήματα μιας αλυσίδας που κινείται στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ξεκινώντας από την κατάσταση 1. Τρέξτε το πρόγραμμα μερικές φορές και στη συνέχεια φτιάξτε ένα πρόγραμμα που προσομοιώνει τα είκοσι πρώτα βήματα της Άσκησης 11.

2.6 Ασκήσεις

Άσκηση 18 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n = 1 \,| X_0 = 1\big]$ στις περιπτώσεις: α) $p = 1/16$, β) $p = 1/6$, γ) $p = 1/12$.

Άσκηση 19 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ p & 2/3-p & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n = 1 \,| X_0 = 1\big]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, στις περιπτώσεις: α) $p = 0$, β) $p = 1/6$, γ) $p = 2/3$. Πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε το $\lim_{n\to\infty} P^n$, χωρίς πολλές πράξεις;

Άσκηση 20 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/12 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αν π_n είναι η κατανομή της αλυσίδας μετά από n βήματα, δείξτε ότι, ανεξάρτητα από την αρχική της κατανομή π_0 έχουμε $\pi_n \to \pi_*$ για κάποια κατανομή π_* που θα προσδιορίσετε. Δείξτε επιπλέον ότι

$$\|\pi_n - \pi_*\| = \sum_{x\in\mathbb{X}} |\pi_n(x) - \pi_*(x)| \le C(n+1)2^{-n}$$

για κάποια σταθερά $C > 0$.

Άσκηση 21 Δείξτε ότι το ενδεχόμενο μια μαρκοβιανή αλυσίδα να ξαναγυρίσει σε μια ανοιχτή κλάση από την οποία έχει φύγει έχει πιθανότητα 0. Υπόδειξη: Το εν λόγω ενδεχόμενο είναι η αριθμήσιμη ένωση

$$E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{x\in\mathcal{C}} \bigcup_{z\notin\mathcal{C}} \bigcup_{y\in\mathcal{C}} \{X_i = x, X_{i+j} = z, X_{i+j+k} = y\}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\mathbb{P}\big[X_i = x, X_{i+j} = z, X_{i+j+k} = y\big] = 0$, για κάθε $i \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ και $x, y \in \mathcal{C}$, $z \notin C$.

Άσκηση 22 Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ταξινομήστε τις κλάσεις σε ανοιχτές και κλειστές. Ποιες κλάσεις είναι παροδικές και ποιες επαναληπτικές;

Άσκηση 23 Θεωρήστε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_n$ στο σύνολο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, \ldots, 8\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα. Αν $X_0 = 1$, υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n = k\big]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $k \in \mathbb{X}$. Υπόδειξη για το τελευταίο ερώτημα: μην επιχειρήσετε να διαγωνιοποίησετε τον 8×8 πίνακα P. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

Άσκηση 24 Δείξτε ότι η πρώτη φορά που μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ επισκέπτεται την κατάσταση $x \in \mathbb{X}$ μετά τη χρονική στιγμή 10, $T = \inf\{k > 10 : X_k = x\}$, είναι χρόνος διακοπής.

Άσκηση 25 Δείξτε ότι η *δεύτερη* φορά που μια μαρκοβιανή αλυσίδα επισκέπτεται ένα σύνολο καταστάσεων A είναι χρόνος διακοπής.

Άσκηση 26 Δείξτε ότι ο $T = \inf\{k \geq 5 : X_k = X_2\}$ είναι χρόνος διακοπής για την αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Άσκηση 27 Αν ο T είναι χρόνος διακοπής και $A \subset \mathbb{X}$, δείξτε ότι ο χρόνος

$$S = \inf\{k > T : X_k \in A\}$$

είναι κι αυτός χρόνος διακοπής.

Άσκηση 28 Δώστε ένα παράδειγμα μιας αλυσίδας που έχει μόνο ανοιχτές κλάσεις.

Άσκηση 29 Για τη μαρκοβιανή αλυσίδα της Άσκησης 22 υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[T_4^+ < +\infty \,|\, X_0 = 4\big]$ και τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων στην κατάσταση 4, $\mathbb{E}\big[V(4) \,|\, X_0 = 4\big]$. Κάντε το ίδιο για την κατάσταση 2.

Άσκηση 30 Θεωρήστε τη μαρκοβιανή αλυσίδα του Παραδείγματος 17. Χρησιμοποιώντας την ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα κατά τον χρόνο άφιξης στο $x-1$, $T_{x-1} = \inf\{k \geq 0 : X_k = x-1\}$, δείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mathbb{P}_x\big[T_0 < \infty\big] = \big(\mathbb{P}_1\big[T_0 < \infty\big]\big)^x$$

Άσκηση 31 Θεωρήστε έναν απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο στο $\mathbb{Z}$ και ορίστε τον χρόνο πρώτης άφιξης στο 0, $T_0 = \inf\{k \geq 0 : X_k = 0\}$. Χρησιμοποιώντας την ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα κατά τον χρόνο πρώτης άφιξης στο 1, $T_1 = \inf\{k \geq 0 : X_k = 1\}$, δείξτε ότι, για έναν περίπατο που ξεκινά από το 2, έχουμε $T_0 = S_1 + S_2$, όπου οι S_1, S_2 είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, που έχουν την ίδια κατανομή όπως ο T_0 για έναν περίπατο που ξεκινά από το 1. Χρησιμοποιήστε στη συνέχεια αυτό το αποτέλεσμα, για να δείξετε ότι, αν ορίσουμε $\psi(s) = \mathbb{E}\big[s^{T_0} \big| X_0 = 1\big]$, $s \in (0,1)$, τότε η $\psi(s)$ λύνει την εξίσωση

$$\psi(s) = \frac{s}{2} + \frac{s}{2}\psi(s)^2.$$

Λύστε την εξίσωση αυτή για να βρείτε την $\psi(s)$ και συμπεράνετε ότι $\mathbb{E}\big[T_0 \big| X_0 = 1\big] = \infty$. Το συμπέρασμα είναι ότι, παρότι ο απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ είναι επαναληπτικός, ο αναμενόμενος χρόνος για να φτάσει από το 1 στο 0 είναι άπειρος.

Άσκηση 32 Ένας απλός, συμμετρικός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}^2$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα, που σε κάθε της βήμα μετατοπίζεται είτε βόρεια, είτε νότια, είτε ανατολικά, είτε δυτικά, με πιθανότητα 1/4, ανεξάρτητα για κάθε βήμα. Επομένως, αν ορίσουμε $e_1 = (1, 0)$ και $e_2 = (0, 1)$, έχουμε

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} W_i,$$

όπου οι $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, που παίρνουν τις τιμές $\pm e_1, \pm e_2$ με πιθανότητα 1/4. Οι πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας είναι

$$p(x, x + e_1) = p(x, x - e_1) = p(x, x + e_2) = p(x, x - e_2) = \frac{1}{4}, \quad p(x, y) = 0, \text{ διαφορετικά.}$$

Αν X_n, Y_n είναι οι συντεταγμένες του περιπάτου τη χρονική στιγμή $n \in \mathbb{N}_0$, αν δηλαδή $S_n = (X_n, Y_n)$ και ορίσουμε

$$U_n = X_n + Y_n, \quad V_n = X_n - Y_n,$$

δείξτε ότι οι $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ανεξάρτητοι, απλοί, συμμετρικοί τυχαίοι περίπατοι στο $\mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, αν $S_0 = (0, 0)$, τότε

$$\{S_n = (0, 0)\} = \{U_n = 0\} \cap \{V_n = 0\}$$

και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4 και το Λήμμα 2.5, για να δείξετε ότι ο $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι επαναληπτικός.

2.7 Αριθμητικά πειράματα

Η *μέθοδος Monte Carlo* είναι μια υπολογιστική μέθοδος, που βασίζεται στον νόμο των μεγάλων αριθμών. Υπενθυμίζουμε ότι, αν $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με πεπερασμένη μέση τιμή $\mathbb{E}\big[X\big]$, τότε

$$\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{E}\big[X\big]\Big] = 1.$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $\mathbb{E}\big[X\big]$ μιας τυχαίας μεταβλητής X, μπορούμε λοιπόν να πάρουμε τον μέσο όρο ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων δειγμάτων αυτής της μεταβλητής. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να προσεγγίσουμε υπολογιστικά την πιθανότητα ενός ενδεχομένου από το κλάσμα των πραγματοποιήσεών του σε μια σειρά από ανεξάρτητες προσομοιώσεις. Σ' αυτή την ιδέα θα βασιστούν τα επόμενα αριθμητικά πειράματα.

Άσκηση 33 Κατεβάστε τον κώδικα `ex1.py`. Το πρόγραμμα αυτό εκτιμά με τη μέθοδο Monte Carlo την πιθανότητα της Άσκησης 18 για $p = 1/6$. Τρέξτε το. Προσεγγίζει το αριθμητικό αποτέλεσμα εκείνο που βρήκατε θεωρητικά; Τρέξτε το πρόγραμμα μερικές ακόμα φορές. Είναι η εκτίμηση που δίνει η ίδια κάθε φορά; Ποια είναι η δειγματική διασπορά;

Άσκηση 34 Διαβάστε τώρα τον κώδικα και προσπαθήστε να καταλάβετε πώς λειτουργεί. Αλλάξτε το πλήθος των επαναλήψεων N που κάνουμε από 1.000 σε 100.000 και επαναλάβετε την Άσκηση 33. Ποια είναι τώρα η δειγματική διασπορά; Κάντε το ίδιο και για τις άλλες τιμές του p της Άσκησης 18.

2.9 Conceptual Exercises

2.1 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ is a time homogeneous DTMC on $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ with transition probability matrix P. Show that

$$\mathsf{P}(X_{n+2} \in B, X_{n+1} \in A | X_n = i, X_{n-1}, \cdots, X_0) = \mathsf{P}(X_2 \in B, X_1 \in A | X_0 = i),$$

where A and B are subsets of S.

2.2 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ and $\{Y_n, n \geq 0\}$ are two independent DTMCs with state-space $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Prove or give a counterexample to the following statements:
(a) $\{X_n + Y_n, n \geq 0\}$ a DTMC.
(b) $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ is a DTMC.

2.3 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ is a time homogeneous DTMC on $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Prove or give a counterexample to the following statements:
(a) $\mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n \in A, X_{n-1}, \cdots, X_0) = \mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n \in A)$, where $A \subset S$ has more than one element.
(b) $\mathsf{P}(X_n = j_0 | X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \cdots, X_{n+k} = j_k) = \mathsf{P}(X_n = j_0 | X_{n+1} = j_1)$, where $j_0, j_1, \cdots, j_k \in S$ and $n \geq 0$.
(c) $\mathsf{P}(X_n = j_0, X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \cdots, X_{n+k} = j_k) = \mathsf{P}(X_0 = j_0, X_1 = j_1, X_2 = j_2, \cdots, X_k = j_k)$.

2.4 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ is a time homogeneous DTMC on $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Prove or give a counterexample to the following statements:
(a) Let $b_j = \mathsf{P}(X_k = j)$, for $j \in S$, and a given $k > 0$. Then $\{X_n, n \geq 0\}$ is completely described by $[b_j, j \in S]$ and the transition probability matrix.
(b) Let $f : S \to S$ be any function. $\{f(X_n), n \geq 0\}$ is a DTMC.

2.5 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ and $\{Y_n, n \geq 0\}$ are two independent DTMCs with state-space $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Let $\{Z_n, n \geq 0\}$ be a sequence iid Ber(p) random variables. Define

$$W_n = \begin{cases} X_n & \text{if } Z_n = 0 \\ Y_n & \text{if } Z_n = 1. \end{cases}$$

Is $\{W_n, n \geq 0\}$ a DTMC (not necessarily time homogeneous)?

2.6 Let $\{Y_n, n \geq 0\}$ be a sequence of iid random variables with common pmf

$$\alpha_k = \mathsf{P}(Y_n = k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

We say that Y_n is a record if $Y_n > Y_r,\ 0 \leq r \leq n-1$. Let $X_0 = Y_0$, and X_n be the value of the n-th record, $n \geq 1$. Show that $\{X_n, n \geq 0\}$ is a DTMC and compute its transition probability matrix.

2.7 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ is a time homogeneous DTMC on $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ and transition probability matrix P. Define

$$N = \min\{n > 0 : X_n \neq X_0\}.$$

Thus N is the first time the DTMC leaves the initial state. Compute

$$\mathsf{P}(N = k | X_0 = i), \quad k \geq 1.$$

2.8 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ is a time homogeneous DTMC on $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ and transition probability matrix P. Let A be a strict non-empty subset of S. Assume $X_0 \in A$ with probability 1. Define $N_0 = 0$ and

$$N_{r+1} = \min\{n > N_r : X_n \in A\}, \quad r \geq 0.$$

Thus N_r is the time of the r-th visit by the DTMC to the set A. Define

$$Y_r = X_{N_r}, \quad r \geq 0.$$

Is $\{Y_r, r \geq 0\}$ a DTMC? Prove or give a counterexample.

2.9 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ is a time homogeneous DTMC with the following property: there is a $j \in S$ such that $p_{ij} = p$ for all $i \in S$. Show that $\mathsf{P}(X_n = j) = p$ for all $n \geq 1$, no matter what the initial distribution is.

2.10 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ is a time non-homogeneous DTMC with the following transition probabilities:

$$\mathsf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} a_{ij} & \text{if } n \text{ is even} \\ b_{ij} & \text{if } n \text{ is odd,} \end{cases}$$

where $A = [a_{ij}]$ and $B = [b_{ij}]$ are two given stochastic matrices. Construct a time homogeneous DTMC $\{Y_n, n \geq 0\}$ that is equivalent to $\{X_n, n \geq 0\}$, i.e., a sample path of $\{X_n, n \geq 0\}$ uniquely determines that of $\{Y_n, n \geq 0\}$ and vice-versa.

2.11 Let $\{X_n, n \geq 0\}$ be a simple random walk of Example 2.19. Show that $\{|X_n|, n \geq 0\}$ is a DTMC. Compute its transition probability matrix.

2.12 Suppose $\{X_n, n \geq 0\}$ is a time homogeneous DTMC on $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ and transition probability matrix P. Let $f : S \to \{1, 2, \cdots, M\}$ be a given on-to function, that is, $f^{-1}(i)$ is non-empty for all $1 \leq i \leq M$. Give the necessary and sufficient condition under which $\{f(X_n), n \geq 0\}$ is a DTMC.