Στοχαστικές Ανελίξεις

Εργασία 3

(1) Από το σύγγραμμα του μαθήματος, τις Ασκήσεις 76, 79, 83, 94, 97, 102, 107.

(2) Αποδείξτε το Θεώρημα 25 (σελ. 91) από τις σημειώσεις. Πιο συγκεκριμένα δείξτε ότι
(α) Τα σύνολα $(C_\nu)_{\nu=0,1,\ldots,d-1}$ είναι ξένα ανά δύο.
(β) Κάθε C_ν είναι κλειστό για την $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$ και η Y είναι μη υποβιβάσιμη και απεριοδική στο C_ν.
(γ) Αν η αλυσίδα $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι γνήσια επαναληπτική με αναλλοίωτη κατανομή π, τότε $\sum_{w\in C_\nu} \pi(w) = \sum_{w\in C_{\nu+1}} \pi(w)$ για κάθε $\nu \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ με τη σύμβαση ότι για $\nu = d-1$ το $\nu + 1$ ισούται με 0. Επιπλέον, η αναλλοίωτη κατανομή π_ν της αλυσίδας Y που δίνει μάζα 1 στην κλάση C_ν είναι η (6.3) στις σημειώσεις.
(δ) Αν $x_0 \in C_0$ και $y \in C_\nu$ για κάποιο $\nu \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} p^{(dn+\nu)}(x_0, y) = \pi(y)d.$$

(3) Έστω P ο πίνακας μετάβασης μιας μη υποβιβάσιμης και απεριοδικής αλυσίδας Markov σε ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{X}$ (έστω r η πληθικότητα του $\mathcal{X}$). Να δειχθεί ότι το -1 δεν είναι ιδιοτιμή του P (δηλαδή δεν υπάρχει διάνυσμα στήλη $u \in \mathbb{R}^r$ ώστε $Pu = -u$).

(4) Έστω P ο πίνακας μετάβασης μιας μη υποβιβάσιμης και απεριοδικής αλυσίδας Markov $(X_k)_{k\geq 0}$ σε ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{X}$ και π η στάσιμη κατανομή της. Αν ο P είναι διαγωνίσιμος και υπάρχει $k \geq 1$ ώστε για οποιαδήποτε κατανομή της X_0 η X_k να έχει κατανομή π, να δειχθεί ότι οι $\{X_i : i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

Συνιστώ επίσης να δείτε τις Ασκήσεις 80, 85, 98, 99, 101.