Στοχαστικές ανελίξεις

Εξέταση 17 Ιανουαρίου 2018

1. (10 Βαθμοί) Έστω μη υποβιβάσιμη αλυσίδα Markov σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathcal{X}$ με πίνακα μετάβασης P και $N := |\mathcal{X}|$. Να δειχθεί ότι για κάθε $i, j \in \mathcal{X}$ υπάρχει $r \leq N$ τέτοιο ώστε $P^r(i, j) > 0$.

2. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ αλυσίδα Markov σε αριθμήσιμο σύνολο $\mathcal{X}$ και $I = \{0, 1, \dots, 30\}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(X_{10} = a_{10} \mid X_i = a_i \text{ για κάθε } i \in I\backslash\{10\}) = \mathbf{P}(X_{10} = a_{10} \mid X_9 = a_9, X_{11} = a_{11})$$

για κάθε $a_0, a_1, \dots, a_{30} \in \mathcal{X}$ ώστε το γεγονός στην πρώτη δέσμευση να έχει θετική πιθανότητα.

3. (10 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι ο απλός συμμετρικός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ δεν έχει αναλλοίωτη κατανομή. Τι λέει αυτό για την επαναληπτικότητά του;

4. (25 Βαθμοί) Έστω ακέραιος $N \geq 1$. Διαθέτουμε δυό κάλπες A και B, N άσπρα, και N μαύρα σφαιρίδια. Τη χρονική στιγμή 0 η κάλπη A (όπως και η B) έχει N σφαιρίδια. Για κάθε επόμενη ακέραια χρονική στιγμή κάνουμε το εξής πείραμα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την A και ένα από την B και μεταφέρουμε το καθένα σε κάλπη άλλη από αυτήν από την οποία το επιλέξαμε. Για $n \geq 1$ έστω X_n το πλήθος των μαύρων σφαιριδίων στην κάλπη A μετά το πείραμα της χρονικής στιγμής n. X_0 είναι το πλήθος των μαύρων σφαιριδίων στην κάλπη A τη χρονική στιγμή 0.

(α) Ποιος ο πίνακας μετάβασης της μαρκοβιανής ανέλιξης $X = (X_n)_{n\geq 0}$;

(β) Είναι η ανέλιξη αντιστρέψιμη;

(γ) Να υπολογιστεί μια αναλλοίωτη κατανομή της. Είναι μοναδική;

5. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ αλυσίδα Markov στο $\{1, 2, \dots, 7\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $P_{i,j} = \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, \dots, 7\}$.

(α) Ποιες είναι οι κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας, ποιες από αυτές είναι παροδικές, και ποιες επαναληπτικές;

(β) Αν $\mathbf{P}(X_0 = 6) = 1$, να βρεθεί η μέση τιμή του χρόνου εξόδου της αλυσίδας από την κλάση που περιέχει το 6. Ποιές είναι οι πιθανότητες, μετά την έξοδο, η αλυσίδα να μεταβεί σε καθεμία από τις άλλες κλάσεις;

(γ) Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 7 \mid X_0 = 6), \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 4 \mid X_0 = 6), \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 1)$.

6. (20 Βαθμοί) Έστω P στοχαστικός $n \times n$ πίνακας.

(α) Να δειχθεί ότι κάθε ιδιοτιμή λ του P ικανοποιεί την $|\lambda| \leq 1$.

(β) Για δεδομένο $r \in [1/2, 1]$ θέτουμε $P_r := (1 - r)P + rI$, όπου I είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας. Να δειχθεί ότι ο P_r είναι στοχαστικός πίνακας και το πραγματικό μέρος κάθε ιδιοτιμής του είναι στοιχείο του $[0, 1]$.

Η ταυτότητα του Vandermonde λέει ότι για κάθε ακέραιους $m, n, r \geq 1$ ισχύει

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή επιτυχία!