**Στοχαστικές ανελίξεις**

**Εξέταση 24 Σεπτεμβρίου 2018**

**1.** (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ αλυσίδα Markov στο $\mathcal{X} = \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ με πιθανότητες μετάβασης $p(k, k+1) = p_k, p(k, 0) = 1 - p_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ όπου $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ δεδομένη ακολουθία με όρους στο $[0, 1]$.

(α) Να δοθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη στα $p_k$ ώστε η αλυσίδα να είναι μη υποβιβάσιμη

(β) Να δοθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη στα $p_k$ ώστε η κατάσταση 0 να είναι επαναληπτική.

(γ) Να δοθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη στα $p_k$ ώστε η κατάσταση 0 να είναι γνήσια επαναληπτική.

(δ) Στην περίπτωση που η αλυσίδα είναι μη υποβιβάσιμη και γνήσια επαναληπτική, να βρεθεί η στάσιμη κατανομή με τη βοήθεια των $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

[Υποδειξη: Βρείτε την κατανομή του πρώτου πρώτου χρόνου επαναφοράς στο 0 αν η αλυσίδα ξεκινάει από το 0.]

**2.** (15 Βαθμοί) Έστω αλυσίδα Markov σε αριθμήσιμο σύνολο $\mathcal{X}$ και $x \in \mathcal{X}$ παροδική κατάσταση. Αν η $y \in \mathcal{X}$ επικοινωνεί με την $x$ (δηλαδή $x \leftrightarrow y$) τότε και η $y$ είναι παροδική.

**3.** (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ αλυσίδα Markov στο $\mathcal{X} = \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ με πιθανότητες μετάβασης $p(k, k+1) = 1/(k+1), p(k, k-1) = k/(k+1)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι η αλυσίδα είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί μια αναλοίωτη κατανομή της. Είναι αυτή μοναδική;

**4.** (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τον τυχαίο περίπατο $(X_n)_{n\geq 0}$ στο παρακάτω γράφημα ΑΒΓΔΕ (από κάθε κορυφή μεταβαίνουμε σε οποιαδήποτε από τις γειτονικές της με ίση πιθανότητα). Υποθέτουμε ότι $X_0$ =Α.

(α) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος πρώτης επιστροφής στην Α.

(β) Να βρεθεί ο μέσος αριθμός επισκέψεων στη Γ μέχρι την πρώτη επιστροφή στην Α.

(γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο περίπατος πριν την πρώτη επιστροφή του στην Α να μην περάσει από τη Δ.

**5.** (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ αλυσίδα Markov στο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2/5 & 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

όπου $P_{i,j} = \mathbf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(α) Ποιες είναι οι κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας, ποιες από αυτές είναι παροδικές, και ποιες επαναληπτικές;

(β) Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 2, X_{n+1} = 3 \mid X_0 = 1), \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 2, X_{n+1} = 3 \mid X_0 = 5)$.

**6.** (20 Βαθμοί) Έστω $P = (p_{x,y})_{x,y\in\mathcal{X}}$ στοχαστικός πίνακας που αντιστοιχεί σε μη υποβιβάσιμη αλυσίδα Markov στο πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(α) Να δειχθεί ότι ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής 1 είναι ο χώρος που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$.

(β) Αν το $-1$ είναι ιδιοτιμή του $P$, τότε το $\mathcal{X}$ χωρίζεται σε δύο σύνολα $A, B$ (δηλαδή είναι ξένα μεταξύ τους και έχουν ένωση το $\mathcal{X}$) ώστε $p_{i,j} = 0$ αν $i.j \in A$ ή $i, j \in B$.

(γ) Αν η αλυσίδα είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $U$ ώστε ο $\hat{P} := UPU^{-1}$ να είναι συμμετρικός.

**Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι** 3 **ώρες.** **Καλή επιτυχία!**

**Απαντήσεις**

**1**. (α) Η ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι $p_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $p_k < 1$ για άπειρα $k \in \mathbb{N}$.

(β) Πρέπει $\mathbf{P}(T_0^+ = \infty) = 0$. Αυτή η πιθανότητα είναι $\prod_{k=0}^{\infty} p_k$. Το απειρογινόμενο είναι 0 στις εξής δύο περιπτώσεις: (i) Υπάρχει $k$ με $p_k = 0$. (ii) $p_k > 0$ για κάθε $k$ και $\sum_{k=0}^{\infty}(1 - p_k) = \infty$ (γνωστό κριτήριο από τη θεωρία των απειρογινομένων).

**2**. Θεωρία. Λήμμα 3, σελίδα 25 στο σύγγραμμα του μαθήματος.

**3**. Η στάσιμη κατανομή είναι $\pi_k = \frac{1}{2e} \cdot \frac{k+1}{k!}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

**4**. Η στάσιμη κατανομή έχει $\pi_A = \pi_B = 1/6, \pi_\Gamma = 1/3$. (α) Είναι 6. (β) Είναι 2. (γ) Είναι 5/8.

**6**. Θεωρία που είδαμε στην τάξη.