10 Μαρτ 2016

νδο $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \quad \forall x,y\in E$

<u>Αποδ</u> $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ (περιέργως)

$$0\leq \langle \lambda x+y,\lambda x+y\rangle = \langle \lambda x,\lambda x\rangle+\langle \lambda x,y\rangle+\langle y,\lambda x\rangle+\langle y,y\rangle$$
$$=\lambda^2\langle x,x\rangle+\lambda(\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle)+\langle y,y\rangle$$

$$=\lambda^2\langle x,x\rangle+2\lambda \,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle$$

· 3νυμο : $\geq 0 \; \forall\lambda$

οπότε πρέπει

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle^2\leq\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \quad (*)$$

κοιτάω το $\langle x,y\rangle=\rho e^{i\theta}$, $\rho=|\langle x,y\rangle|$

$$\Downarrow$$

$$e^{-i\theta}\langle x,y\rangle=|\langle x,y\rangle|$$

$$\langle x,e^{i\theta}y\rangle=|\langle x,y\rangle|\in\mathbb{R}$$

$(*)\Rightarrow$

$$|\langle x,y\rangle|=\mathrm{Re}\langle x,e^{i\theta}y\rangle\leq\langle x,x\rangle\langle e^{i\theta}y,e^{i\theta}y\rangle$$

$e^{-i\theta}$

$$\| \quad \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \quad \blacksquare$$

· Αν x,y (ε)ξαρτημένα (γρ) : ισχύει ισότητα διότι:

$x=\mu y$ με $y\neq 0$ τότε

$$|\langle x,y\rangle|^2=|\langle\mu y,y\rangle|^2=|\mu|^2\langle y,y\rangle^2=(|\mu|\,\|y\|^2)^2$$

$$=(\|\mu y\|\,\|y\|)^2$$

(όταν $y\neq 0$, και όταν $y=0$ τότε πάλι ισχύει $=$)

Αντίστροφα, έστω ότι $|\langle x,y\rangle|=\|x\|\|y\|$ νδο x,y εξαρτ

αρκεί να υποθ $\|x\|\cdot\|y\|\neq 0$

γράφω όπως πριν $|\langle x,y\rangle|=\langle x,e^{i\theta}y\rangle=\langle x,y'\rangle$

με $y'=e^{i\theta}y$, $\|y'\|=\|y\|$

(ΕΝΞ Ρ.)

οπότε $\langle x,y'\rangle=\langle y',x\rangle=|\langle x,y\rangle|=\|x\|\|y\|=\|x\|\|y'\|$

άρα, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle x+\lambda y', x+\lambda y' \rangle = \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda \|x\| \|y\| + \|x\|^2$$

$$= (\lambda \|y\| + \|x\|)^2 \text{ το οποίο } = 0$$

$$\text{ανν } \lambda = \frac{-\|x\|}{\|y\|}$$

<u>άρα</u>

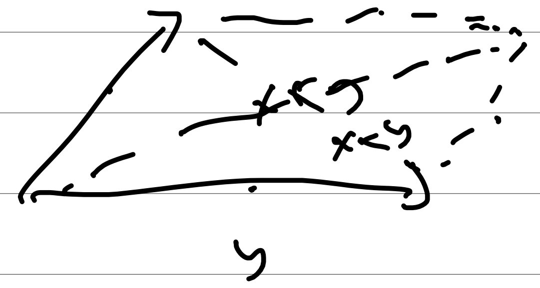
$$x = -\frac{\|x\|}{\|y\|} y' = -\frac{\|x\|}{\|y\|} e^{i\theta} y \quad , \text{ άρα } \{x, y\} \text{ γρ. εξαρτ.} \blacksquare$$

$$x_n \xrightarrow{\|\,\|} x \text{ και } y_n \xrightarrow{\|\,\|} y \text{ τότε } \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$$

<u>Απόδειξη</u>: $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| =$

$$|\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle|$$

$$\underset{\text{CS}}{\overset{\Delta \text{ ΚΝ}}{\leq}} \underbrace{\|x_n\|}_{\downarrow \, \|x\|} \underbrace{\|y_n - y\|}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\|x_n - x\|}_{\downarrow \, 0} \|y\| \longrightarrow 0$$



$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|-y\|^2 + \|-x\|^2$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$\langle x,y\rangle \longrightarrow$ κανόνας $\#$

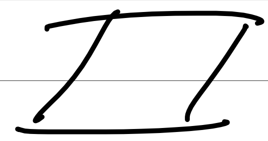
<u>όπου</u> $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$

$\|x-y\|^2 \qquad = \quad '' \quad - \qquad - \qquad + \, ''$

~~αφαιρώ~~ και μετά
πρόσθ $\longrightarrow$ το ζητούμενο

<u>πόρισμα</u> όταν $\langle x,y\rangle = 0$ ισχύει
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (\text{Πυθ!!})$$

Ερώτηση: πότε μια $\|\ \|$ προέρχεται από $\langle \cdot,\cdot\rangle$
<u>δηλ.</u> $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

<u>Απάντηση</u> <u>αν</u> ισχύει ο 

"<u>Απόδειξη</u>" Για <u>πραγμ. χώρους</u>

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

και πρέπει νδο είναι εσωτ. γινόμενο

παρ. αν $x=y$: $\langle x,x\rangle = \frac{1}{4}\|x+x\|^2 = \|x\|^2$

Δες Kolmogorov + Fomin 16.8

<u>Παρ.</u> Για <u>μιγαδικούς</u> χώρους το $\langle x,y\rangle$
ορίζεται αλλιώς:

$$\langle x,y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2 - i\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2$$

$f(t) = \cos(nt)$, $g(t) = \sin(nt)$ στο $\left(C([0,2\pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = 0$$

$f \perp g$

Η οικογένεια $\{f_n, g_m : n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}\}$

έχει την ιδιότητα κάθε δύο διαφορετικές στοιχεία της να είναι $\perp$

και καθένα έχει $\| \; \|_2 = 1$

Αντί για sin, cos, παίρ. $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$

$n \in \mathbb{Z}$

$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ορθοκανονικό σύνολο

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int}\,\overline{e^{imt}}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,dt$$

$$(\text{για } n \neq m) \quad = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$(\text{για } n = m) \quad = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\,dt = 1$$

$\{e_i : i \in I\}$ ο.κ. $\Rightarrow$ γρ. ανεξ.

<u>Απόδ.</u> $\forall$ σχέση εξάρτησης:

$$\lambda_1 e_{i_1} + \lambda_2 e_{i_2} + \lambda_3 e_{i_3} + \dots + \lambda_\nu e_{i_\nu} = 0$$

$(\lambda_\kappa \in \mathbb{K})$ $\Downarrow$ εσωτερικό γινόμενο με το e_{i_κ}

$$\Big(0 + \dots + \lambda_\kappa \underbrace{\langle e_{i_\kappa}, e_{i_\kappa} \rangle}_{=1} + 0 \dots + 0 \Big) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_\kappa = 0$$

<u>Πχ</u>

$f_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$: γρ. ανεξ. αλλά <u>όχι</u> ορθοκανονικά ως προς

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} \, dt$$

Gram-Schmidt:

$(E, \langle \, , \, \rangle)$, $\{x_n : n = 1,2,\dots\}$ γρ. ανεξ.

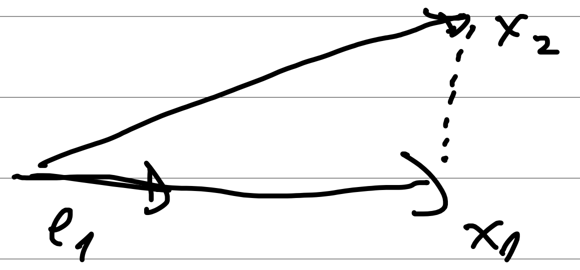
Θέλω να τα ΟΚ-ποιήσω:

$x_1 \longrightarrow e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ $\quad$ $\text{span}\{x_1\} = \text{span}\{e_1\}$

ΟΚ διότι $x_1 \neq 0$

$\{x_1, x_2\} \longrightarrow \{e_1, e_2\}$

. Θέτω $y_2 = x_2 - P_{e_1}(x_2)$



$= x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$

$y_2 \perp e_1$

Θέτω $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$

ΟΚ! γιατί $y_2 \neq 0$ διότι x_2 όχι παράλληλο του e_1

συνεχίζω "επαγωγικά":

Αν έχω βρει $\{e_1, \dots, e_n\}$ ΟΚ τ.ω.

$\text{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$

παίρνω το $x_{n+1} \notin \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

Θέλω να βρω $a_1, \dots, a_n$ ώστε

$$x_{n+1} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + \underbrace{y_{n+1}}_{\perp \text{ στα } e_1, \dots, e_n}$$

έχω $\forall k \leq n$,

$$\langle x_{n+1}, e_k \rangle = 0 + a_k \underbrace{\langle e_k, e_k \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle y_{n+1}, e_k \rangle}_{\text{θέλω: } = 0}$$

αρκεί να θέσω $a_k = \langle x_{n+1}, e_k \rangle$, $k = 1,2,\dots,n$

οπότε θα έχω $x_{n+1} = \langle x_{n+1}, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x_{n+1}, e_n \rangle e_n + \underbrace{y_{n+1}}_{\perp e_k}$

Άλλως: θέτω $y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_k \rangle e_k$

Παρατηρώ: $\langle y_{n+1}, e_k \rangle = 0$ $\forall k = 1, \dots, n$

και επίσης παρατηρώ $y_{n+1} \neq 0$ διότι $x_{n+1} \notin \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

οπότε μπορώ:

$e_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$ $\quad$ ΟΚ.

$(E, \langle\ \rangle)$, $F \subseteq E$ γρ υπόχ $\dim F = n < +\infty$

τότε $\exists$ ορθ βάση για F
που είναι και ορ
$\{e_1 \dots e_n\}$

οπότε : $\forall x \in F$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

ποια είναι τα c_m;;

$\Downarrow$ εσωτ γι $\forall e_k$

$$\langle x, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_m \rangle$$

$\langle e_k, e_m \rangle = \delta_{km}$

$= c_m$ βρήκα τα c_m

$\{e_i : i \in I\}$ είναι $(E, \langle\ \rangle)$ λέγεται ΟΚ βάση (ΠΟΚΣ)

αν (i) $\{e_i : i \in I\}$ ΟΚ

(ii) $\overline{\text{span}\{e_i : i \in I\}} = E$

$\underline{\pi\chi}$ στο ℓ^2, $e_n = (0, \dots, 0, \overset{\overset{n}{\downarrow}}{1}, 0, \dots)$

$\underline{\text{Είναι}}$ ΟΚ βάση του ℓ^2

(i) αποτελούν ΟΚ σύνολο

(ii) $\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ = πυκνό, διότι

$= \{(x(1), x(2), \dots, x(n_0), 0, 0, \dots)\}$

$= c_{00} \neq \ell^2$

αλλά $\overline{c_{00}}^{\|\ \|_2} = \ell^2$

$\underline{\text{όχι}}$ αλγ βάση του ℓ^2

πλήρ $\rightarrow$

Είναι αλγ βάση του c_{00}

όχι πλήρ $\rightarrow$

$(E, \langle , \rangle)$ διαχωρίσιμος, τότε έχει μια (αριθμ.) ορθοκανονική βάση

<u>Απόδ</u> Υπάρχει $\underbrace{\{x_1, x_2 \ldots\}}_{=D}$ αριθμ. και πυκνό στο E

$$\overline{\{x_1 \ldots x_n\}} = E$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, πετάω από τα $\{x_1 \ldots x_n\}$ όσα είναι γραμμ. εξαρτημένα από τα προηγούμενα τους προκύπτει

$$\{y_1, y_2, \ldots\} \subseteq D$$

γραμμ. ανεξ. και

$$\mathrm{span}\{y_1 \ldots y_n \ldots\} \supseteq \{x_1 \ldots x_n \ldots\} = D$$

άρα $\mathrm{span}\{y_1, y_2, \ldots\}$ <u>πυκνός</u> στον E

Τώρα: $\{y_1, y_2 \ldots\} \xrightarrow[\text{schmidt}]{\text{Gram}} \{e_1, e_2, \ldots\}$ ορθοκανονικά

και

$$\mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, \ldots\} = \mathrm{span}\{y_1, y_2, \ldots\} \supseteq D$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots\}} \supseteq \overline{D} = E$$

οπότε τα $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση.

Έστω: $\{x_n\}$ ορθ. βάση του $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$

$$U: E \longrightarrow \ell^2$$
$$x \longrightarrow (\langle x, x_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\in \ell^2 \text{ λόγω Bessel})$$

γραμμ. ισομετρία. (ισότητα Parseval: $\|x\|^2 = \sum |\langle x, x_n\rangle|^2$

- Αν η U είναι επί του ℓ^2
  τότε, επειδή είναι ισομετρία,
  στέλνει βασ. ακολ. σε βασ. ακολ.
  Αφού ο ℓ^2 είναι πλήρης
  αναγκαστικά και ο E θα είναι πλήρης

αντίστροφα: Έστω ότι E πλήρης
νδο U επί
με δίνεται ένα τυχαίο $(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell^2$
να βρω $x \in E$: $Ux = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

δηλ

$$\forall n, \ \langle x, e_n \rangle = \lambda_n$$

Ορίζω $\forall N$: $y_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n \in E$

$N > M$

$$y_N - y_M = \sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x_n$$

$$\|y_N - y_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |\lambda_n|^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1}$$

Όμως, $(\lambda_n) \in \ell^2$
άρα $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0: \sum_{n > n_0} |\lambda_n|^2 < \varepsilon^2$

οπότε $\forall \ N > M \geq n_0 \ \|y_N - y_M\|^2 < \varepsilon^2$

άρα η (y_N) είναι βασική, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $x \in E$

Όμως $Ux = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ διότι

$\forall n$

$$\langle x, e_n \rangle = \langle \lim_N y_N, e_n \rangle = \lim_N \langle y_N, e_n \rangle$$
$$= \lim_N \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \underbrace{\langle e_k, e_n \rangle}_{\delta_{kn}} = \lambda_n$$

οπότε $\langle x, e_n \rangle = \lambda_n \ \forall n.$

δηλ) $Ux = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

∎