15 Φεβ 2016

Συναρτησιακή Ανάλυση

Ανάλυση σε χώρους συναρτήσεων

σε χώρους συναρτήσεων

σε χώρους συναρτ.

γραμμικούς

προαπαιτούμενο: Γραμμική Άλγεβρα

προαπαιτούμενο: Πραγματική

Συναρτησιακή Ανάλυση

Τελεστές

(6ος) ⟶ χώροι (με νόρμα, Banach...)

γραμμ. απεικ. μεταξύ τέτοιων χώρων

(7ος)

γεωμετρία χώρων Banach

προσεγγιστική θεωρία

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

$$C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{K} \text{ , συνεχής} \}$$

$$\|f\|_\infty = \sup\{ |f(t)| : t \in [a,b] \} \underset{\uparrow}{<} +\infty$$

συνεχής $\Rightarrow$ φραγμ.

Είναι η $\|\cdot\|_\infty$: νόρμα

$(f_n) \subseteq C([a,b])$, $f \in C([a,b])$

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \cancel{\forall t \in [a,b]} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \forall t \in [a,b]$$

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) = \{ x = (x(n)) : \exists n_x : \forall n \geq n_x, x(n) = 0 \}$

πχ

$$\left.\begin{array}{l} (1, 0, 0, \ldots) = e_1 \\ (0, 1, 0, \ldots) = e_2 \\ \vdots \\ (0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, 0, \ldots) = e_n \end{array}\right\} \text{γρ ανεξάρτητες}$$

$\to \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ άπειρο, γραμμ. ανεξ. σύνολο

και $\forall x \in c_{00}(\mathbb{N})$: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_x}, 0, 0, \ldots)$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_{n_x} e_{n_x}$

$\forall x \in c_{00}(\mathbb{N})$:

$x \in \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

$= \sum_{n=1}^{n_x} \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{K}}}{x_n} \overset{\in c_0}{e_n}$

δηλαδή $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι αλγεβρική βάση (βάση Hamel) του $c_{00}(\mathbb{N})$

$X \to \mathbb{R}: x \mapsto \|x\|$ συνεχής:

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \le \|x-y\| \quad (\text{Ασκ.})$$

άρα, αν $x_n \xrightarrow{\|\,\|} x$ τότε

$$0 \le \big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| \le \|x_n - x\| \to 0$$ ■

$X \times X \to X: (x,y) \to x+y$ συνεχής:

$x_n \to x$, $y_n \to y$

$$\|(x_n+y_n) - (x+y)\| = \|(x_n-x)+(y_n-y)\| \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|x_n-x\| + \|y_n-y\|}$$ ■

$\mathbb{K} \times X \to X: (\lambda, x) \to \lambda x$

$\lambda_n \xrightarrow{|\,|} \lambda \in \mathbb{K}$, $x_n \xrightarrow{\|\,\|} x \in X$

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|(\lambda_n - \lambda)x_n + \lambda(x_n - x)\|$$

$$\le \|(\lambda_n-\lambda)x_n\| + \|\lambda(x_n-x)\|$$

$$= |\lambda_n-\lambda|\,\|x_n\| + |\lambda|\,\|x_n-x\|$$

$\exists M: \forall\ \|x_n\| \le M$

άρα $\le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{|\lambda_n-\lambda|} M + |\lambda| \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|x_n-x\|}$ ■

αλλιώς: $\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{|\lambda_n-\lambda|}\,\underset{\substack{\downarrow \\ \|x\|}}{\|x_n\|} + |\lambda|\,\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|x_n-x\|}$ ■

$(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα

Συμβ: $B(x,\rho) = \{y \in X : \|x-y\| < \rho\}$ ανοικτή μπάλα

$\hat{B}(x,\rho) = \{y \in X : \|x-y\| \leq \rho\}$ κλειστή μπάλα

$S(x,\rho) = \{y \in X : \|x-y\| = \rho\}$

Παραδοσιακά: $B_X := \hat{B}(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

- B_X κλειστό: αν (x_n) με $x_n \in B_X$ και $x_n \xrightarrow{\|\ \|} x$ τότε $x \in B_X$

<u>Απόδ</u> $\|x\| = \lim_n \|x_n\| \leq 1$ διότι $\|x_n\| \leq 1$ $\forall n$

- B_X <u>φραγμ</u>: δηλ $\exists M \in \mathbb{R}_+$: κάθε $x \in B_X$ να ικανοποιεί $\|x\| \leq M$ (προφ: $M=1$)

αλλιώς: (με περιοχές) αν πάρω την εξής ανοικτή περιοχή του $0 \in X$: $B(0,2)$ τότε $B_X \subseteq B(0,2)$

Έπεται ότι: $\forall$ περιοχή V του $0 \in X$ $\exists \lambda > 0$ ώστε $\lambda B_X \subseteq V$

Πράγματι:

$\exists \epsilon > 0$: $B(0,\epsilon) \subseteq V$

τώρα, πάρε $\lambda = \epsilon/2$

οπότε $\lambda B_X = \{\lambda x : x \in B_X\}$

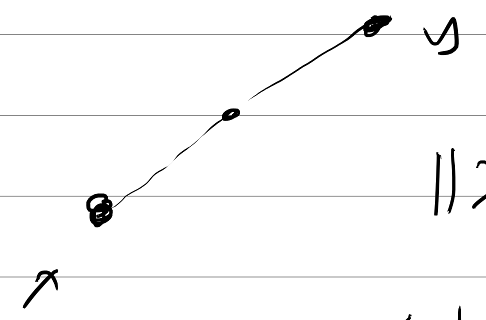
$= \{\lambda x : \|x\| \leq 1\}$

$= \{y \in X : \|y\| \leq \frac{\epsilon}{2}\} \subseteq B(0,\epsilon) \subseteq V$.

∎

B_X είναι κυρτό σύνολο: δηλ. αν $x, y \in B_X$
τότε περιέχει και το ευθ. τμήμα
με άκρα x, y

$$[x,y] = \{\lambda y + (1-\lambda)x : \lambda \in [0,1]\}$$



Πράγματι,

$$\|\lambda y + (1-\lambda)x\| \le$$

$$\le |\lambda| \, \|y\| + |1-\lambda| \, \|x\|$$

$$= \lambda \|y\| + (1-\lambda)\|x\|$$

$$\le \lambda + (1-\lambda) = 1$$

άρα $\lambda y + (1-\lambda)x \in B_X$

- B_X έχει $\neq \emptyset$ εσωτερικό
  Πράγματι, $\forall \delta \in (0,1)$ $\underbrace{B(0,\delta)}_{\text{ανοικτό} \neq \emptyset} \subseteq B_X$

Σειρές σε χώρους με νόρμα $(X, \| \ \|)$

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$

ονομάζω $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \in X$

Λέω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στο X

αν $\exists\, s \in X$ τ.ω. $\|s - s_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Πρτρ Αν η $\sum x_n$ συγκλίνει, τότε $x_n \to 0$
(όχι αντίστροφα)

Αποδ $\quad n > 1$

$$s_n - s_{n-1} = (x_1 + \dots + x_n) - (x_1 + \dots + x_{n-1}) = x_n$$

όμως, $s_n \to s$

άρα $\|s_n - s_{n-1}\| \le \underbrace{\|s_n - s\|}_{\to 0} + \underbrace{\|s - s_{n-1}\|}_{\to 0}$

άρα πράγματι, $x_n \to 0$

Αντίστροφος: Αν $x_n \to 0$ τότε (s_n) συγκλίνει;;;
όχι πάντα.
όταν $X = \{0\}$ τότε ισχύει ...
αν $X \neq \{0\}$ δεν ισχύει:
παίρνω $x \neq 0$
και θέτω $x_n = \frac{1}{n} x$

$$\|x_n - 0\| = \frac{1}{n}\|x\| \to 0$$

αλλά $s_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x$

δεν συγκλίνει
(γιατί $\|s_n\| \to +\infty$)

Ορ. Η $\sum x_n$ συγκλίνει απόλυτα αν

$$\sum \|x_n\| < +\infty$$

Ερώτηση: Είναι αλήθεια ότι κάθε απολ. συγκλίνουσα συγκλίνει;

Λύση: ότι χρειάζεται η πληρότητα

- Αν $(X, \|\ \|)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα (! Banach) τότε κάθε απολ. συγκλίνουσα σειρά είναι συγκλίνουσα. (θα το δούμε)

Όμως πχ στον c_{00} αν πάρω $x_n = e_n/n^2$ $\quad \sum \|x_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} x_n = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{N^2}, 0, 0, \dots\right)$$

$$\text{«}\ s_n \to \underbrace{\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{N^2}, \frac{1}{(N+1)^2}, \dots\right)}_{s \notin c_{00}(\mathbb{N})}\ \text{»}$$

Αν υπάρχει $y \in c_{00}(\mathbb{N})$ ώστε $\|s_n - y\|_\infty \to 0$

τότε θα έπρεπε $\forall k \in \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\qquad |s_n(k) - y(k)| \le \|s_n - y\|_\infty \to 0$

οπότε, $\forall k$, $\quad y(k) = \lim_{n\to\infty} s_n(k) \overset{(*)}{=} \frac{1}{k^2} \neq 0$ ↯

άτοπο, γιατί υπέθεσα $y \in c_{00}(\mathbb{N})$.

($(*)$ διότι, $\forall n \geq k$, $s_n(k) = \frac{1}{k^2}$)