Συναρτησιακή 18/2/2016

χώρα Banach

Πρότ. $\Gamma \neq \emptyset$ σύνολο $\ell^\infty(\Gamma) = \{x : \Gamma \to \mathbb{K} \text{, φραγ.}\}$

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < +\infty$$

↳ Είναι νόρμα

$(\ell^\infty(\Gamma), \| \, \|_\infty)$ είναι χώρος Banach

Δηλ. Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $\| \, \|_\infty$ - βασική $(*)$

αποδ. ότι $\exists\, x \in \ell^\infty(\Gamma) : \|x_n - x\|_\infty \to 0$

Απόδ $(*) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : n, m \geq n_0 \;\; \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \gamma \in \Gamma \quad |x_n(\gamma) - x_m(\gamma)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \gamma$, $(x_n(\gamma))$ είναι βασ. στο $(\mathbb{K}, |\,|)$

πλήρης χώρος!!!

άρα $\exists\, x(\gamma) \in \mathbb{K} : |x_n(\gamma) - x(\gamma)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ονομάζω $x : \Gamma \to \mathbb{K}$

$\gamma \mapsto x(\gamma) = \lim_n x_n(\gamma)$ (ξέρω ότι $\exists$)

Πρέπει να δ. 2 πράγματα (i) $x \in \ell^\infty(\Gamma)$

και (ii) $\|x_n - x\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Αφού η $(\|x_n\|)$ είναι βασική στο $\mathbb{K}$

(διότι $\big|\|x_n\| - \|x_m\|\big| \leq \|x_n - x_m\|$)

έπεται ότι είναι φραγ.:

$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} \;\; \|x_n\|_\infty \leq M$

άρα $\forall n \, \forall \gamma$, $|x_n(\gamma)| \leq M$

$\downarrow n \to \infty$

$|x(\gamma)|$

$\forall \gamma \qquad |x(\gamma)| = \lim_n |x_n(\gamma)| \leq M$

άρα $x \in \ell^\infty(\Gamma)$

τώρα νδο $\|x_n - x\|_\infty \to 0$

- (x_n) είναι $\| \, \|_\infty$ - βασική!

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : n, m \geq n_0 \;\; \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon/2$

οπότε $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall n \geq n_0$, $|x_n(\gamma) - x_{n_0}(\gamma)| \leq \|x_n - x_{n_0}\|_\infty < \varepsilon/2$

από την άλλη μεριά, $x(\gamma) = \lim_{n\to\infty} x_n(\gamma)$ (κσ)

$\forall \gamma$, $\exists n_1(\gamma) \geq n_0 : \forall n \geq n_1(\gamma)$

$|x(\gamma) - x_n(\gamma)| < \varepsilon/2$

Έστω $n \geq n_0$

$$|x(\gamma) - x_n(\gamma)| \leq |x(\gamma) - x_{n_0}(\gamma)| + |x_{n_0}(\gamma) - x_n(\gamma)|$$

$$\leq |x(\gamma) - x_{n_0}(\gamma)| + \|x_{n_0} - x\|_\infty$$

$$< \underbrace{|x(\gamma) - x_{n_0}(\gamma)|}_{\text{μικρό;}} + \varepsilon/2$$

2ο πρόβλημα (ευχαριστώ!)

Έχω: $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall n, m \geq n_0$:

άρα:

$$\forall \gamma \qquad |x_n(\gamma) - x_m(\gamma)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$\forall \gamma \qquad |x(\gamma) - x_m(\gamma)| < \epsilon \qquad \forall m \geq n_0 \ (\text{ανεξ. του } \gamma!)$$

$$\Downarrow \ \sup \text{ ως προς } \gamma$$

$$\|x - x_m\|_\infty \leq \epsilon$$

__Πρότ.__ Αν $(X, \| \ \|)$ Banach, τότε
απολ. συγκλ. $\Rightarrow$ συγκλ.

__Απόδ.__ $S_n = x_1 + \dots + x_n$ έχουμε ότι συγκλίνει απόλυτα

__δηλ.__ $\sum \|x_k\| < +\infty$ (*) συγκλίνει

$$\Downarrow$$

$$n > m : \ \|S_n - S_m\| = \Big\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\Big\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \|x_k\|$$

όμως από (*): $\sum_{k=m} \|x_k\| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

__δηλ.__ $\forall \epsilon > 0 \ \exists m_0 : \ \forall m \geq m_0$:

$$\sum_{k=m} \|x_k\| < \epsilon$$

άρα $\forall \ n > m \geq m_0 \quad \|S_n - S_m\| < \epsilon$

άρα είδαμε ότι η (S_n) είναι __βασική__

αφού X πλήρης, $\exists \ S = \lim S_n \in X$ ◻

Θεώρ Έστω $(X, \| \, \|)$ είναι Banach $\Longleftrightarrow$ ($\Downarrow$ και) κάθε απολ. συγκλ. σειρά είναι συγκλίνουσα

Απόδ ($\Uparrow$) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $(X, \| \, \|)$

ν.δ.ο. $\exists x \in X : \|x_n - x\| \to 0$

Επειδή βασική:

για $\epsilon = 1$ $\exists n_1 : \forall n,m \geq n_1$ $\|x_n - x_m\| < 1$

για $\epsilon = \frac{1}{2}$ $\exists n_2 > n_1$ $\forall n,m \geq n_2$ $\|x_n - x_m\| < 1/2$

$\vdots$ $\forall n,m \geq n_{k-1}$ $\| \quad \| < 1/2^{k-1}$

για $\epsilon = \frac{1}{2^k}$ $\exists n_k > n_{k-1} : \forall n,m \geq n_k$

$\|x_n - x_m\| < 1/2^k$

Ειδικότερα: (αφού $n_k > n_{k-1}$)

$\forall k$, $\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < \frac{1}{2^{k-1}}$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < +\infty$$

οπότε η σειρά

$\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ συγκλ. απολ.

άρα συγκλίνει, δηλ. $\exists s \in X$ ώστε:

$$\sum_{k=1}^{K} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \xrightarrow[K \to \infty]{} s$$

$$\|$$

$$(\cancel{x_{n_2}} - x_{n_1}) + (\cancel{x_{n_3}} - \cancel{x_{n_2}}) + \dots + (x_{n_{K+1}} - \cancel{x_{n_K}})$$

$$= x_{n_{K+1}} - x_{n_1} \xrightarrow[K \to \infty]{} s$$

δηλαδή

(x_{n_k}) συγκλίνει στο $s + x_{n_1} = x$

$\Downarrow$ επειδή (x_n) είναι βασική

(x_n) συγκλίνει ολόκληρη στο x.

(γνωστό και εύκολο)

Ορισμός $(X, \| \|)$ λέγεται διαχ
αν έχει ένα $Y \subseteq X$ που είναι
(i) αριθμήσιμο
(ii) $\overline{Y} = X$.

Πρότ $(X, \| \|)$ είναι διαχ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ αριθμήσιμο υποσύνολο $E \subseteq X$ που "τον παράγει", δηλ.

$$\overline{\text{span}}(E) = X$$

$$\|$$

κλειστή γραμμική θήκη του E

Απόδ ($\Longrightarrow$) Προφανής: αν Y αριθμ και $\overline{Y} = X$ τότε $\overline{\text{span}}(Y) \supseteq \overline{Y} = X$

$$\|$$

$$X$$

($\Longleftarrow$) Έχω E αριθμήσιμο $\subseteq X$ (ΕΝΞ)
θεωρώ

$$Y = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k : \begin{array}{l} e_k \in E \\ \lambda_k \in \mathbb{K}_0 \end{array}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

όπου $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$ είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{K}$ (πχ όταν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, πάρε $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, για το $\mathbb{C}$ πάρε $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) παρατηρώ ότι το Y είναι επίσης αριθμήσιμο
(γιατί;)

και είναι πυκνό στο X από υπόθεση ■

Λήμμα $(X, \| \|)$, $x_1 \dots x_m$ γραμμ. ανεξ.

$\Longrightarrow \exists\, c>0 : \forall\, \vec{\lambda} = (\lambda_1 \dots \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$

να ισχύει:

παρατήρηση:

$$\underbrace{c\left(\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k|\right) \le \left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k\right\|} \le \left(\max_{1\le k\le m}\|x_k\|\right)\left(\sum|\lambda_k|\right)$$

τριγ

$$\left(\begin{array}{c}\text{δηλαδή } \exists\, c, M : \forall\, \vec{\lambda}\in\mathbb{K}^m \\ c\|\vec{\lambda}\|_1 \le \left\|\sum \lambda_k x_k\right\| \le M\|\vec{\lambda}\|_1\end{array}\right)$$

Απόδ. Ονομάζω $S = \{\vec{\lambda}\in\mathbb{K}^m : \sum_{k=1}^{m}|\lambda_k| = 1\}$

κλ. και φραγμ. $\subseteq (\mathbb{K}^m, \| \|_1)$

άρα συμπαγές!! (Bolzano-Weierstrass)

Ορίζω:

$$f : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$\vec{\lambda} \longrightarrow \left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k\right\|$$

η f είναι συνεχής:

αν $\vec{\lambda}, \vec{\mu} \in S$

$$|f(\vec{\lambda}) - f(\vec{\mu})| = \left|\left\|\sum_k \lambda_k x_k\right\| - \left\|\sum_k \mu_k x_k\right\|\right|$$
$$\le \left\|\sum \lambda_k x_k - \sum \mu_k x_k\right\|$$
$$= \left\|\sum_k(\lambda_k - \mu_k)x_k\right\|$$
$$\le \left(\sum|\lambda_k - \mu_k|\right)\max_{k=1\dots m}\|x_k\|$$

άρα η f είναι συνεχής

$\vec{\lambda} \longrightarrow \vec{\mu}$ στο $S \subseteq (\mathbb{K}^m, \| \|_1)$ τότε $\lambda_k \longrightarrow \mu_k$ για $k=1,\dots,m$, είρα $\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k - \mu_k| \longrightarrow 0$

Έχω μια συνεχή συνάρτηση ορισμένη σε συμπαγές S άρα παίρνει ΕΛΑΧΙΣΤΟ!!

$$\exists\, \vec{\lambda}^0 \in S : \forall\, \vec{\lambda}\in S : f(\vec{\lambda}) \ge f(\vec{\lambda}^0)$$

δηλ. $\left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k\right\| \ge \left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda^0_k x_k\right\| \ge 0$

άρα αν ήταν $=0$ θα είχαμε

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda^0_k x_k = 0$$

όμως $(x_1 \dots x_m)$ γρ. ανεξάρτητα, άρα:

$$\lambda^0_1 = \lambda^0_2 = \dots = \lambda^0_m = 0$$

άτοπο

διότι $\vec{\lambda}^0 \in S$

οπότε $\left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda^0_k x_k\right\| := c > 0$

Καταλήξαμε ότι: $\exists\, c>0$ ώστε αν $\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k| = 1$ τότε

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k\right\| \geq c$$

Τώρα: πάρε $\vec{\lambda} = (\lambda_1 \ldots \lambda_m) \in \mathbb{K}$ τυχον, $\neq \vec{0}$

ορίζω $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{\|\vec{\lambda}\|_1}$

οπότε $\left\|\sum_{k=1}^{m}\mu_k x_k\right\| \geq c$ διότι

$$\sum|\mu_k| = \sum\frac{|\lambda_k|}{\|\vec{\lambda}\|_1} = \frac{\sum|\lambda_k|}{\sum|\lambda_k|} = 1$$

οπότε $\left\|\dfrac{\sum\lambda_k x_k}{\|\vec{\lambda}\|_1}\right\| \geq c$

άρα $\left\|\sum\lambda_k x_k\right\| \geq c\,\|\vec{\lambda}\|_1$
όταν $\vec{\lambda}\neq\vec{0}$
και προφανώς ισχύει $(0 \geq c\cdot 0)$
και όταν $\vec{\lambda}=\vec{0}$.

$\blacksquare$

Θεωρ $(X, \| \ \|)$, $Y \subseteq X$ γραμμ. υποχ. με $\dim Y = d < +\infty$

τότε ο $(Y, \| \ \|)$ είναι πλήρης.

Αποδ Έστω (y_n) βασ. ακολ. στον Y

Αφού $\dim Y = d < +\infty$, πάρε μια αλγεβρική βάση $x_1 \dots x_d$ του Y

οπότε κάθε y_n γράφεται μοναδικά

$$y_n = \sum_{k=1}^{d} \lambda_n(k) x_k \quad \text{όπου } \lambda_n(k) \in \mathbb{K}$$

Τώρα

∃ c>0 ώστε:

$$\|y_n - y_m\| = \left\| \sum_{k=1}^{d} (\lambda_n(k) - \lambda_m(k)) x_k \right\| \overset{\text{λήμμα}}{\geq} c \sum_{k=1}^{d} |\lambda_n(k) - \lambda_m(k)|$$

$$= c \, \|\vec{\lambda}_n - \vec{\lambda}_m\|_1 \quad (*)$$

Επειδή (y_n) βασική,
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0$
$\|y_n - y_m\| < \varepsilon c$

άρα από $(*)$ $\|\vec{\lambda}_n - \vec{\lambda}_m\| < \varepsilon$

οπότε η $(\vec{\lambda}_n)$ στο χώρο $(\mathbb{K}^d, \| \ \|_1)$ είναι βασική (πλήρης)

άρα, $\exists \, \vec{\lambda} = (\lambda(1), \lambda(2), \dots \lambda(d)) \in \mathbb{K}^d : \|\vec{\lambda}_n - \vec{\lambda}\|_1 \to 0$

ονομάζω τώρα $y = \sum_{k=1}^{d} \lambda(k) x_k$

και παρατηρώ ότι

$$\|y_n - y\| = \left\| \sum_{k=1}^{d} (\lambda_n(k) - \lambda(k)) x_k \right\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{d} |\lambda_n(k) - \lambda(k)| \max_{1 \leq k \leq d} \|x_k\|$$

$$= (\max \|x_k\|) \, \|\vec{\lambda}_n - \vec{\lambda}\|_1 \to 0$$

οπότε $y_n \xrightarrow{\| \ \|} y$

άρα έδειξα ότι κάθε βασική στο Y συγκλίνει ∎

Έστω $(X, \| \ \|)$ απειρο-~~διάστατος~~ χώρος Banach με αριθμήσιμη αλγεβρική βάση $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$

Τότε θδο $\dim X < +\infty$

Απόδειξη: $\forall x \in X$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός
$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b, \quad \text{όπου } \lambda_b = 0 \text{ εκτός πεπερ. πλήθους.}$$
δηλ $\exists n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x = \sum_{k=1}^{n_x} \lambda_{b_k} b_k$

οπότε αν ονομάσω
$Y_1 = span\{b_1\}$, $Y_2 = span\{b_1, b_2\}$, κοκ

τότε $\forall x \in X$ $\exists n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in Y_{n_x}$

δηλ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ όμως $\forall Y_n$ έχει πεπερ. διάσ. άρα είναι κλειστό σύνολο

(!!) από Baire $\exists k \in \mathbb{N}$ ώστε $Y_k^{\circ} \neq \emptyset$ (δείξτε!)

άρα ο Y_k περιέχει κάποια ανοιχτή μπάλα, $B(x,\rho) = x + B(0,\rho)$ (γιατί;)

επειδή Y_k γραμμικός χώρος

Έπεται $B(0,\rho) \subseteq Y_k$

άρα $\forall x \in X$, το $\frac{x}{\|x\|}\frac{\rho}{2} \in B(0,\rho)$

άρα $\frac{x}{\|x\|}\frac{\rho}{2} \in Y_k$

άρα $x \in Y_k$

δηλ. τελικά $Y_k = X$ άρα $\dim X < +\infty$ ∎

$\exists\, a,b>0 : a\|x\|' \le \|x\| \le b\|x\|' \quad \forall x \in X$

άρα $x_n \xrightarrow{\| \|} x \iff x_n \xrightarrow{\| \|'} x$

απόδ. $(\Rightarrow)$ $\|x_n - x\|' \le \frac{1}{a}\|x_n - x\|$

$(\Leftarrow)$ $\|x_n - x\| \le b\|x_n - x\|'$

(β) οι $(X, \| \|)$, $(X, \| \|')$ έχουν τις ίδιες βασικές ακολουθίες

απόδ. ίδια

Συμπέρασμα: Αν ο X είναι Banach ως προς κάποια νόρμα $\| \|$, τότε είναι Banach ως προς οποιαδήποτε άλλη ισοδύναμη νόρμα.

Έστω $1 \le p < q < +\infty$

- ισχύει $\forall x \in \ell^p$, ισχύει $\|x\|_q \le \|x\|_p$ ✓

άρα $\ell^p \subseteq \ell^q$

απόδ. Έστω πρώτα $\|x\|_p = 1$ δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p = 1$

$$\Downarrow$$
$$\forall\ |x(n)| \le 1$$
$$\Downarrow$$
$$|x(n)|^q \le |x(n)|^p$$
$$\Downarrow$$
$$\sum |x(n)|^q \le \sum |x(n)|^p = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\sum |x(n)|^q\right)^{1/q} \le 1$$

Γενικά, αν $\|x\|_p = 0$ οκ

αλλιώς, θεωρώ $y = \dfrac{x}{\|x\|_p}$

Παρατηρώ ότι $\|y\|_p = 1$ άρα από το ειδ. απο

$$\|y\|_q \le 1$$

δηλ $\left\| \dfrac{x}{\|x\|_p} \right\|_q \le 1$

δηλ $\|x\|_q \le \|x\|_p$

- Για την άλλη ανισότητα,

περιορίζομαι στον $\mathbb{K}^m$

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \right\|_p = \left(\sum |\lambda_n|^p 1 \right)^{1/p}$$

$a > 1$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

Hölder

$$\le \left(\sum |\lambda_n|^{ap} \right)^{1/ap} \left(\sum 1^b \right)^{1/bp}$$

$$\le \left\| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \right\|_{ap} m^{1/bp}$$

Έχω $q > p$ οπότε θέτω $a = \frac{q}{p} > 1$ άρα $ap = q$

Ειδικά: $\forall x \in \mathbb{K}^m$

$\|x\|_p \le \|x\|_q\, m^{\frac{1}{bp}}$ όπως: $\frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{a}$

$\frac{1}{bp} = \frac{1}{p} - \frac{1}{ap}$

$$\|x\|_q \le \|x\|_p \le \|x\|_q\, m^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}$$

- Στον c_{00}, βάζε $x_n = (1, 1, 1, \dots, \overset{n}{1}, 0, \dots)$

τότε $\|x\|_q = n^{1/q}$ ενώ $\|x\|_p = n^{1/p}$

οπότε: $\dfrac{\|x\|_p}{\|x\|_q} = n^{\left(1/p - \frac{1}{q}\right)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

δηλ $\nexists$ σταθερά M ώστε $\|x\|_p \le M \|x\|_q$ $\forall x \in c_{00}$ ▨