21 Απρ 2016

$T: X \to Y$ συνεχής, επί , Y: Banach
[illegible]

$\exists\, \delta' > 0 : \overline{T(B_X(0,1))} \supseteq B_Y(0,\delta')$

$\Downarrow$

$\forall \epsilon > 0 \ \forall u \in Y$ με $\|u\| < \delta'$
$\exists\, x \in B_X(0,1) : \|Tx - u\| < \epsilon$

Έστω $y \in Y$, $\lambda = \dfrac{\delta'}{2\|y\|} > 0$

Θέτω $u = \lambda y$ $\quad \|u\| = \dfrac{\delta'}{2} < \delta'$

έπεται ότι $\exists\, v \in X$, $\|v\| < 1$ ώστε
$\|Tv - u\| < \lambda \varepsilon$

δηλ. $\left\|\lambda T\left(\dfrac{v}{\lambda}\right) - \lambda y\right\| < \lambda \epsilon$

δηλ. $\|Tx - y\| < \epsilon$

όπου $x = \dfrac{v}{\lambda}$

$\|x\| < \dfrac{2}{\delta'} \|y\|$

Δείξαμε: $\exists G>0 : \forall y \quad \exists (x_n) \; \|x_n\| < G\|y\|$

$$\|Tx_n - y\| \to 0$$

Αν όμως η (x_n) (ή μια υπακολουθία της) συγκλίνει,

έστω $x_n \to x$

τότε $Tx_n \to Tx$, άρα: $Tx = y$

$\longrightarrow$ Αυτό δεν είναι πάντα δυνατό!

Προβ. Έστω επιπλέον ότι T 1-1

τότε από τη σχέση

$$\|x\| \leq G\|Tx\|$$

$$\Downarrow$$

T^{-1} συνεχής

με νόρμα $\leq G$

$(\|x\| \leq G\|Tx\| \Leftrightarrow \|T^{-1}y\| \leq G\|y\|$

οπότε, αφού ο Y είναι Banach, θα έπρεπε

και ο X να είναι Banach

Έχουμε όμως το Προβ(β), όπου αυτό δεν

συμβαίνει.

$X \xrightarrow{T} Y$ συνεχής

$\Downarrow$

$Gr(T) = \{(x,y) : x \in X, y = Tx\} \subseteq X \times Y$

κλειστό

ως προς ∀ μετρική γινόμενο

Δειξη Έστω $(x,y) \in \overline{Gr(T)}$

$\Updownarrow$

$\exists\, (x_n, y_n) \in Gr(T)$

$(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$

$\Updownarrow$ μετρ γινόμενο

$x_n \longrightarrow x$

και

$y_n \longrightarrow y$

Όμως $(x_n, y_n) \in Gr(T) \;:\; y_n = Tx_n$

οπότε $x_n \to x \overset{T\text{συν}}{\Longrightarrow} Tx_n \to Tx$

$Tx_n \to y$ άρα $y = Tx$

δηλ. $(x,y) = (x, Tx) \in Gr(T)$

Προτ. Όταν $(X, \| \|_X)$, $(Y, \| \|_Y)$ χώροι με νόρμα

$X \times Y$ με πράξεις κ.σ.

τότε η

$$\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$$ είναι νόρμα στο γ.χ. $X \times Y$

Προτ. η νόρμα αυτή επάγει μετρική σύγκλιση διότι:

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\| \|} (x,y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow{\| \|_X} x \\ \text{και} \\ y_n \xrightarrow{\| \|_Y} y \end{cases}$$

Απόδ. Έχω: $\|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y = \|(x_n, y_n) - (x,y)\|$

και δεξί $\to 0 \iff$ αριστ. $\to 0$

$Gr(T)$ κλειστό $\iff \forall (x_n, y_n) \in Gr(T)$ με $(x_n, y_n) \to (x,y)$

έχω $(x,y) \in Gr(T)$

$$\iff \left(\begin{array}{c} x_n \to x \\ \text{και} \\ Tx_n \to y \end{array} \implies y = Tx \right) \quad (A)$$

όμως, αν T γραμμικός τότε:

$$\iff \left(\begin{array}{c} x_n \to 0 \\ Tx_n \to y \end{array} \implies y = 0 \right) \quad (B)$$

<u>απόδ</u> $(A) \implies (B)$ προφανές

$(B) \implies (A)$ έστω ότι ισχύει το (B)

και έστω

(u_n) στο X με

$u_n \to u$

<u>και</u>

$Tu_n \to v$

τότε $u_n - u \to 0$

και $T(u_n - u) = Tu_n - Tu \to v - Tu$

άρα από (B) ισχύει $v - Tu = 0$

<u>δηλ</u> <u>$Tu = v$</u>

Προτ. (*)

$(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ Banach

τότε $(X \times Y, \|\ \ \|)$ Banach, όπου

$$\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

Απόδ: αν (z_n) βασική στο $X \times Y$ νδο συγκλίνει

$$z_n = (x_n, y_n)$$

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y$$

αν $\underbrace{\qquad}_{\text{μικρό τότε}}$ $\underbrace{\qquad}_{\text{μικρότερο}}$ και $\underbrace{\qquad}_{\text{μικρότερο}}$

$\Downarrow$ X Banach $\qquad$ $\Downarrow$ Y Banach

$\exists x \in X$: $x_n \to x$ $\qquad$ $\exists y \in Y$: $y_n \to y$

οπότε $\|z_n - (x,y)\| = \|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y \to 0$

άρα ισχύει.

Θ κλ γραφ: X, Y : Banach

$$X \xrightarrow{T} Y \quad \text{γραμμικός}$$

$$G(T) \text{ κλειστό } \subseteq X \times Y$$

$$\Downarrow$$

$$T \text{ συνεχής}$$

<u>Απόδ</u> $G(T) \subseteq X \times Y$ γρ υπόχωρος, κλειστό από υπόθ
αλλά $X \times Y$ Banach (*) άρα, $G(T)$ είναι χώρος Banach

Θεωρώ την Π_1: $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \ni (x, Tx)$

$$\begin{array}{ccc} G(T) & \ni & (x,Tx) \\ \Big\downarrow \Pi_1 & & \Big\downarrow \\ X & & x \end{array}$$

Π_1 : μια χαρά γραμμική, συνεχής: $\|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y$
είναι επί
και επιπλέον είναι 1-1
διότι αν $\Pi_1(x, Tx) = 0$ δηλ $x = 0$
τότε $T(x) = 0$
οπότε $(x, Tx) = (0,0)$

Θεωρ αντίστροφ. απεικόνισης:
η $\Pi_1^{-1} : X \longrightarrow G(T)$ είναι συνεχής
$$x \longmapsto (x, Tx)$$
οπότε $\exists M$: $\|\Pi_1^{-1}(x)\|_{X \times Y} \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X$

$$\|(x, Tx)\|_{X\times Y} \leq M \|x\|_X$$
$$\|$$
$$\|x\|_X + \|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X$$
$$\Downarrow$$
$$\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

<u>δηλ</u> <u>T φραγμ</u>

Παρ/ξ

$T : C_{00} \longrightarrow C_0$

$e_n \longrightarrow n e_n$ ασυνεχής διότι $\left\|\frac{e_n}{n}\right\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$

(επεκτείνω γραμμικά)

ενώ $T(e_n) = e_n \not\to 0$

έχει κλειστό γράφημα:

$Gr(T) = \{(x, Tx) : x \in C_{00}\}$

$= \text{span}\{(e_n, n e_n) : n \in \mathbb{N}\}$

[Απόδ: $x \in C_{00}$: $x = \sum_{n=1}^{n_x} x(n) e_n$

$Tx = \sum_{n=1}^{n_x} n x(n) e_n$

$(x, Tx) = \sum_{n=1}^{n_x} x(n) (e_n, n e_n)$

$\in \text{span}\{(e_n, n e_n) : n \in \mathbb{N}\}$]

νδο $Gr(T)$ κλειστό στον $X \times Y$:

αν (x_i) στο X τ.ω $x_i \xrightarrow{\|\ \|_\infty} 0$ και $Tx_i \xrightarrow{\|\ \|_\infty} y$ $\Big\} \overset{?}{\Rightarrow} y = 0$

$x_i = \sum_{n=1}^{n_i} x_i(n) e_n \longrightarrow 0$ ως προς $\|\ \|_\infty$

και $Tx_i = \sum_{n=1}^{n_i} x_i(n) n e_n \longrightarrow y$ " " "

νδο $y = 0$

Έστω ότι $y \neq 0$: $\exists n_0 :$ $y(n_0) \neq 0$ πχ $|y(n_0)| = d > 0$

αφού $Tx_i \longrightarrow y$ ως προς $\|\ \|_\infty$

έχω $\sup_n \{|(Tx_i)(n) - y(n)|\} \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$

άρα $|Tx_i(n_0) - y(n_0)| \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$

οπότε $\exists i_0 ..$ $|Tx_i(n_0)| > d/2$ $\forall i \geq i_0$

$\| \quad$

$|n_0 x_i(n_0)|$, άρα: $|x_i(n_0)| > \frac{d}{2n_0}$ $\forall i \geq i_0$

όμως, $x_i \xrightarrow{\|\ \|_\infty} 0$ $\Rightarrow x_i(n_0) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$ αντίφαση

Θεώρημα Hellinger-Toeplitz:

H : χώρος Hilbert (πχ σαν ℓ^2)

!!! και μια γραμμική $T : H \to H$

με

$\forall x, y \in H, \quad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

τότε T φραγμ.

Αποδ. Αρκεί να δω $Gr(T)$ κλειστό στο $H \times H$

δηλ. αρκεί αν $x_n \to 0$ και $Tx_n \to y$ να δω $y=0$

$\forall z \in H$

$$\langle y, z\rangle = \langle \lim Tx_n, z\rangle = \lim \langle Tx_n, z\rangle$$

$\Updownarrow$ υποθ.

$$\langle 0, z\rangle = \langle \lim_n x_n, Tz\rangle = \lim \langle x_n, Tz\rangle$$

άρα $\langle y, z\rangle = 0 \ \forall z \in H \Rightarrow y = 0$

X Banach, Y, Z υπόχωροι (κλ.) συμπληρωματικοί:

$Y \cap Z = \{0\}$ και $Y + Z = X$

<u>Ερώτηση</u> αν Y κλειστός, $\exists$ πάντα Z κλειστός συμπλήρωμα;

<u>Απάντηση</u> αν $\dim Y < +\infty$, <u>ναι</u> (γιατί;)

αν X χώρος Hilbert, <u>ναι</u>. Πάρε π.χ. $Z = Y^{\perp}$

αν $X = \ell^\infty$ και $Y = c_0$, <u>όχι</u>

<u>δηλ.</u> $\nexists$ Z <u>κλειστός</u> <u>υπόχ</u> του ℓ^∞:

$$\ell^\infty = c_0 \oplus Z$$

δεν ισχύει ότι $\forall y = x + z$

Πότε μπορεί να βρω κλειστό συμπλήρωμα;

ανν ο Y είναι το σύνολο τιμών μιας <u>συνεχούς</u> προβολής δηλ. ότι $\exists\, P : X \to X$ γραμμ. + φραγμ.

$$Y = P(X) \quad \text{και} \quad P \circ P = P$$

Απόδ. Αν $\exists$ τέτοια P, θέτω $Z = \operatorname{Ker} P$: κλειστός αφού P φραγμ.

Θέλω! $X = Y \oplus Z$

Δείτε!

$$\forall x \in X : \quad x = \underset{\substack{\Uparrow \\ Y}}{Px} + \underset{\substack{\Uparrow \\ Z}}{(x - Px)} \quad \text{διότι}$$

$$P(x - Px) = Px - P(P(x)) = Px - Px = 0$$

αλλά $Y \cap Z = \{0\}$

αν $u \in Y \cap Z$ διότι

τότε $Pu \in Y$ άρα $Pu = u$

αλλά ταυτόχρονα $u \in Z = \operatorname{Ker} P$ οπότε $Pu = 0$

άρα $u = 0$

Αντίστροφα: Έστω ότι ο X γράφεται $X = Y \oplus Z$, Y, Z κλειστοί.

δηλ $\forall x \in X$ γράφεται μοναδικά

$$x = \underset{\substack{\Uparrow \\ Y}}{y} + \underset{\substack{\Uparrow \\ Z}}{z}$$

Θεωρώ την απεικ. $P : X \to X$

$$y + z \longmapsto y$$

καλά ορισμένη λόγω $Y \cap Z = \{0\}$

και γραμμική

και $\forall x \in X$ έχω

$$P(Px) = Px$$

επειδή $Px \in Y$

Μένει νδο P συνεχής (ξέρω ότι $\underbrace{\operatorname{Ker} P = Z \text{ και } P(X) = Y}_{\text{κλειστοί}}$)

Θα δο $Gr(P)$ κλειστό.

Έστω $x_n : x_n \to 0$ και $Px_n \to y$ νδο $y = 0$

Έχω $\forall n$, $Px_n \in Y$ κλειστό $\Rightarrow$ $y = \lim_n Px_n \in Y$

Επίσης, αν $z_n := x_n - Px_n$

έχω $z_n \in Z$ $\forall n$ διότι $Pz_n = Px_n - P(Px_n) = Px_n - Px_n = 0$

όμως, $z_n \to 0 - y$ άρα $-y \in Z$: κλειστό

άρα $y \in Z$ υπόχωρος

άρα $y \in Y \cap Z = \{0\}$ άρα $y = 0$