21 Μαρτίου

Hilbert, ακόμα...

$H$: Hilbert, $E \subseteq H$ κλειστός γραμμ. υπόχ.

Τότε $\forall x \in H$ $\exists !\, y \in E : \|x-y\| = d(x,E) = d$

<u>Αποδ.</u> Αν $d=0$, οκ.
Υποθέτω $d>0$

$$d = \inf\{\|x-y\| : y \in E\}$$

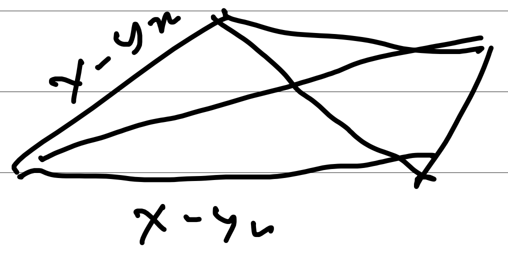
Ορ. του inf:

$$\forall n, \ \exists\, y_n \in E : d \le \underbrace{\|x-y_n\|}_{a_n \to d} < d + \frac{1}{n}$$

Ελπίδα $\exists\, y_0 = \lim y_n$ κλπ.
ΝΔΟ $(y_n)$ είναι βασική

$$\|(x-y_n + x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n-(x-y_m))\|^2$$

$$= 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right)$$




άλλως:

$$\|2(x - \tfrac{y_n+y_m}{2})\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right) - \|2(x - \overbrace{\tfrac{y_n+y_m}{2}}^{\in E})\|^2$$

$$< 2\left(\left(d+\tfrac{1}{n}\right)^2 + \left(d+\tfrac{1}{m}\right)^2\right) - 4d^2$$

($4\|x - y_{nm}\|^2 \geq 4d^2$, $y_{nm} \in E$)

($z = \frac{y_n+y_m}{2} \in E$

$\|x-z\| \geq \inf\{\|x-y\| : y \in E\} = d$ )

$\|x-z\| \geq d$

$$+\ 2\left(\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2d}{m} + \frac{1}{m^2}\right) \text{ : μικρό}$$

δηλ. $\forall \varepsilon > 0$ μπορώ $n_0$: $\forall n,m \geq n_0$ $\quad < \varepsilon^2$

επομένως η $(y_n)$ είναι βασική

$\Longrightarrow$ ($H$: πλήρης)

$\exists\, y_0 = \lim_n y_n$

$E$ κλειστό, $y_n \in E \Rightarrow y_0 \in E$

και επειδή $\|x-y_n\| \to d$

$\Rightarrow \|x-y_0\| = d$

Μοναδικότητα: έστω ότι $\exists\, y, y' \in E$
τ.ω $\|x - y\| = d = \|x - y'\|$

$$4\left\|x - \frac{y+y'}{2}\right\|^2 + \|y - y'\|^2 = 2\left(\|x-y'\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

$$\underset{4d^2}{\ge} \qquad\qquad \underset{d^2}{\parallel} \qquad \underset{d^2}{\parallel}$$

$0 \le 4d^2 + \|y - y'\|^2 \le 4d^2 \Rightarrow \|y - y'\|^2 = 0$
δηλ. $y = y'$

<u>Πρόταση</u> Το $y_x = P_E(x)$ που βρήκαμε
έχει την ιδιότητα $(x - y_x) \perp E$
και είναι το μόνο $y \in E$ με $(x - y) \perp E$

<u>Απόδ</u> Θέλω νδο $x - y_x \perp E$ δηλ.
$\forall z \in E$, $x - y_x \perp z$ ; δουλεύω με τα
$x, y_x, z$

Ονομάζω $E_z = \text{span}\{y_x, z\} \subseteq E$
πεπερ. διάστατος υποχ. του $E$

$y_x \in E_z$

$\|x - y_x\| \ge d(x, E_z) \ge d(x, E) = \|x - y_x\|$

πεπερ. διάστασης

όπως $\|x - y_x\| = d(x, E_z)$

Έχουμε δείξει $x - y_x \perp E_z$
όπως $x - y_x \perp z$

αντίστρ: αν $y_0 \in E$ και $x - y_0 \perp E$ τότε:
$\forall y \in E$ έχω $x - y_0 \perp y_0 - y$
$\Downarrow$ Πυθ

$\|x - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \ge \|x - y_0\|^2$

παίρ. inf:
$d(x, E) \ge \|x - y_0\| \ge d(x, E)$
άρα $y_0 = y_x$ αφού $y_x$
μοναδικό πλησιέστερο διαν.

**Παρ/γ** Για την ύπαρξη $\perp$ διανύσματος, η πληρότητα δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί

**Παρ/γ** $E = (c_{00}, \|\ \|_2)$ $\quad \langle x, y\rangle = \sum_n x(n)\overline{y(n)}$

$$M = \{ x \in E : \sum_n \frac{x(n)}{n} = 0 \}$$

$= \ker f$ όπου $f(x) = \sum \frac{x(n)}{n}$

$f$ γραμμ. $\Rightarrow$ $M$ γραμμ. χώρος

Είναι $M$ κλειστό, διότι $f$ συνεχής:

$$|f(x)| = \left|\sum \frac{x(n)}{n}\right| \leq \underbrace{\sqrt{\sum |x(n)|^2}}_{=\|x\|_2} \sqrt{\sum \frac{1}{n^2}}$$

άρα $f$ φραγμ. $\Rightarrow$ συνεχής

Έστω $y \in E$, $y \perp M$ $\quad$ Π.χ. $(1, -2, 0, \dots) \in M$

$e_1 - 2e_2 \in M$

άρα $y \perp (e_1 - 2e_2)$

ομοίως $\forall n$

$y \perp (e_1 - n e_n)$

δηλ.

$$\langle y, e_1\rangle = \langle y, n e_n\rangle$$

$$\langle y, e_n\rangle = \frac{1}{n}\langle y, e_1\rangle$$

οπότε:

αν $\langle y, e_1\rangle \neq 0$ τότε $\forall \langle y, e_n\rangle \neq 0$

άτοπο, γιατί $y \in c_{00}$

άρα $\langle y, e_1\rangle = 0$ τότε $\forall n$ $\langle y, e_n\rangle = 0$

άρα $y = 0$

Με άλλα λόγια, το μόνο $y \in \ell^2$ (πλήρωση του $(c_{00}, \|\ \|_2)$)

που είναι $\perp M$

είναι $y = \langle y, e_1\rangle(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \notin c_{00}$

**Πρότ** Αν $A \subseteq H$ τότε η $\overset{M}{\overset{\shortparallel}{span(A)}}$ πυκνό στον $H$

ανν $\nexists\, x \in H,\ x \neq 0$
$x \perp A$

Αν $\exists\, x \in H, x \neq 0,\ x \perp A \Rightarrow x \perp span(A)$ $(\langle\ ,\ \rangle$ γρ$)$

$\Rightarrow x \perp \underset{\underset{M}{\shortparallel}}{\overline{span(A)}}$ $(\langle\ ,\ \rangle$ συν$)$

$\Rightarrow x \notin M$, μάλιστα: $d(x,M) \geq \|x\|$
διότι $\forall\, y \in M$
$\underset{\perp}{\|x - y\|^2} = \|x\|^2 + \|y\|^2$

αντίστροφα, αν $span(A)$ όχι πυκνό
τότε $M = \overline{span(A)}$ κλειστός και
γνήσιος
άρα, $\exists\, z \in H,\ z \neq 0$ με $z \perp M$
άρα $z \perp A$.

Θεώρ. H: Hilbert, $M \subseteq H$ κλειστός:

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

δηλ. $\forall x \in H$ γράφεται ! $x = x_M + x_{\perp}$
όπου $x_M \in M$
και $x_{\perp} \perp M$

Απόδειξη:

Αν $x \in M$, οκ
Αν $x \notin M$ τότε $P_M(x) \in M$ (Που δείξαμε ότι $\exists$ και είναι !)
$P_M(x) \neq x$ $\exists$ (μοναδικό)
όπως γράφω

$$x = \underset{\substack{\cap \\ M}}{P_M(x)} + \underbrace{(x - P_M(x))}_{\perp M \text{ όπως δείξαμε}}$$

(μοναδικότητα ισχύει διότι $P_M(x)$ μοναδικό $\in M$
ώστε $x - P_M(x) \perp M$)

άρα: $H = M \oplus M^{\perp}$
Επιπλέον:

$$x = P_M(x) + (x - P_M(x))$$

Πυθ. $\perp$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$$

όπως $\|P_M(x)\|^2 \leq \|x\|^2$

ισχυρίζομαι: $P_M: x \longmapsto P_M(x): H \longrightarrow H$
πρέπει ότι είναι γραμμική:

$$P_M(x + \lambda y) \overset{?}{=} P_M(x) + \lambda P_M(y)$$

Πράγματι, γράφω:

$$x = \underset{\substack{\cap \\ M}}{x_M} + \underset{\substack{\cap \\ M^{\perp}}}{x_{\perp}}, \quad y = y_M + y_{\perp}, \quad x + \lambda y = (x+\lambda y)_M + (x + \lambda y)_{\perp}$$

$$(x_M + x_{\perp}) + \lambda(y_M + y_{\perp}) = (x+\lambda y)_M + (x+\lambda y)_{\perp}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{x_M + \lambda y_M - (x+\lambda y)_M}_{M \text{ (υπόχ)}} \cap \underbrace{= (x+\lambda y)_{\perp} - x_{\perp} - \lambda y_{\perp}}_{\in M^{\perp} \text{ (υπόχ)}} = \{0\}$$

άρα $= 0$

$$\Rightarrow x_M + \lambda y_M - (x+\lambda y)_M = 0$$

$$\Rightarrow P_M(x + \lambda y) = P_M(x) + \lambda P_M(y)$$

και επιπλέον $\|P_M(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x$

$$\Downarrow$$

$$\|P_M\| \leq 1$$

αν υπάρχει $x \in M \setminus \{0\}$ τότε $P_M(x) = x$
όπως $\|P_M(x)\| = \|x\|$
άρα $\|P_M\| = 1$ όταν $M \neq \{0\}$

Αν ένας χώρος Banach $(E, \|\ \|)$
έχει την ιδιότητα:

$\forall\, M$ κλ. υποχ. $\exists\, N$ κλ. υποχ.

: $M \cap N = \{0\}$

$M + N = E$

τότε ο $E$ είναι τοπολογικά ισόμορφος
με χώρο Hilbert

($\exists$ ισοδύναμη $\|\ \|'$ στο $E$
που προέρχεται από $\langle\ ,\ \rangle$)

(Lindenstrauss + Tzafriri, 1971)

Είδαμε ότι τα $\ell^p$, $1 \le p \le \infty$
<u>υπάρχουν</u> $\neq 0$ συνεχείς
γραμμ. μορφές

<u>πχ</u> αν μου δώσουν μια
$(a_n)$ φραγμ. ακολουθία στο $\mathbb{K}$
ορίζω
$$f_a(x) = \sum a_n x(n) \quad \forall\, x = \big(x(n)\big) \in \ell^1$$

και η $f_a$ είναι συνεχής γραμμ. μορφή

Σε έναν $(E, \langle\,,\rangle)$ μπορώ να δημιουργήσω
$f$ από το $\langle\,,\rangle$:
Έστω ένα $a \in E$ και ορίζω

$$f_a : E \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \langle x, a\rangle \quad \text{γραμμική}$$
συνεχής
$$|f_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \le \|x\|\,\|a\|$$
και μάλιστα
$$\|f_a\| \le \|a\|$$
Μάλιστα, αν $a \neq 0$ και πάρω $x = \dfrac{a}{\|a\|}$

τότε $f_a(x) = \langle x, a\rangle = \langle \frac{a}{\|a\|}, a\rangle = \|a\|$

οπότε $\|f_a\| = \|a\|$

Έχω ορίσει: $E \longrightarrow E^*$, $a \longmapsto f_a$ || αντιγραμμική ισομετρία. Επί;;

- $f_{a+a'} = f_a + f_{a'}$ διότι
$$f_{a+a'}(x) = \langle x, a+a'\rangle = \langle x, a\rangle + \langle x, a'\rangle$$
$$= f_a(x) + f_{a'}(x) \quad \forall x$$

όμως $f_{\lambda a}(x) = \langle x, \lambda a\rangle = \bar{\lambda}\langle x, a\rangle$
$= \bar{\lambda} f_a(x) \quad \forall x$

άρα $f_{\lambda a} = \bar{\lambda} f_a$

οπότε η $a \mapsto f_a$ είναι αντιγραμμική (ή συζυγώς γραμμική - conjugate linear).

<u>Προσ.</u> Αν αντί για την $f_a$ θεωρούσα την $g_a : x \longmapsto \langle a, x\rangle$ τότε
$g_a(x) = \langle a, x\rangle \qquad g_a(\lambda x) = \bar{\lambda} g_a(x)$ : δεν είναι γραμμική

Αν η $a \mapsto f_a : E \to E^*$ είναι επί

τότε επειδή ο $E^*$

είναι πλήρης

και η $a \mapsto f_a$

ισομετρία,

θα είναι και ο $E$ πλήρης

δηλ $E$: Hilbert

αντίστροφα:

<u>Θεώρημα</u> (Riesz - Fréchet)

Αν $H$ χώρος Hilbert τότε

$\forall f \in H^* \ \exists! \, a \in H$ ώστε

$f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H$

<u>Απόδ</u> Αν $f = 0$ ok (παίρνω $a = 0$)

Αν $f \neq 0$, θεωρώ τον $M = \operatorname{Ker} f$ είναι γνήσιος ($f \neq 0$)

υπόχωρος ($f$ γρ)

κλειστός ($f$ συν)

άρα $\exists \, z \in H, \ z \neq 0, \ z \perp M$

Παρατηρώ ότι $\forall x \in H$

$$f\big(f(z)x - f(x)z\big) = f(z)f(x) - f(x)f(z) = 0$$

οπότε

$f(z)x - f(x)z \in M$ άρα

$(\qquad\qquad) \perp z$

<u>δηλ</u> $\langle f(z)x - f(x)z, z \rangle = 0$

$f(z)\langle x, z \rangle - f(x)\langle z, z \rangle = 0 \qquad (z \neq 0)$

$$f(x) = \frac{f(z)}{\langle z, z \rangle}\langle x, z \rangle = \left\langle x, \frac{\overline{f(z)}\, z}{\|z\|^2} \right\rangle$$

$= \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H$

όπου $a = \dfrac{\overline{f(z)}\, z}{\|z\|^2}$

Μοναδικό γιατί αν $f(x) = \langle x, b \rangle \ \forall x \in H$

τότε $\quad \| $

$\langle x, a \rangle$ άρα $\langle x, b - a \rangle = 0 \ \forall x \in H$

$\Rightarrow \langle b - a, b - a \rangle = 0$

δηλ $b - a = 0$