24 Μαρτίου 2016

Ειδική περίπτωση: $(X, \| \|)$ διαχωρίσιμος

Y υπόχωρος

$f : Y \to \mathbb{K}$ γραμμ. + συνεχή

$\overset{?}{\Longrightarrow} \exists \tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ " " $\tilde{f}|_Y = f$

και $\|\tilde{f}\| = \|f\|$

<u>δηλ</u> $\sup\{|\tilde{f}(x)| : x \in B_X\} = \sup\{|\tilde{f}(y)| : x \in B_Y\}$

$\tilde{f}(y) = f(y)$, δηλ. $|\tilde{f}(y)| = |f(y)|$

Απόδειξη (Θεωρώντας γνωστό το Λήμμα:)

Δείτε καλύτερα το αρχείο ..

hbdiax.pdf

Θ. H-B για γραμμ. χώρους:

$(X, \|\ \|)$ γραμμ. χώρος. Y υποχ. του X

$f: Y \to \mathbb{R}$ γραμμ. συνεχής

Τότε $\exists \tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ γραμμ. συνεχής $\tilde{f}|_Y = f$

με $\|\tilde{\ }\| = \|f\|$

<u>Απόδ.</u>

Έστω $c = \|f\| = \sup\{|f(y)| : y \in B_Y\}$

Ορίζω $p: X \to \mathbb{R} : x \mapsto c\|x\|$

: κυρτή μορφή

και $\forall y \in Y$, ισχύει

$$f(y) \leq |f(y)| \leq \|f\|\|y\| = p(y)$$

από το θεώρημα επέκτασης $\exists \tilde{f}: X \to \mathbb{R}$

$\tilde{f}|_Y = f$, γραμμική, και

$$\forall x \in X: \quad \tilde{f}(x) \leq p(x) = \|f\|\,\|x\| \quad (1)$$

Επίσης, $\underbrace{\tilde{f}(-x)}_{\overset{(\gamma\rho)}{=} -\tilde{f}(x)} \leq p(-x) = \|f\|\,\|x\| \quad (2)$

Από (1) και (2): $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|\,\|x\|$ $\forall x \in X$ άρα $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$

και έχω ισότητα

αφού $\tilde{f}|_Y = f$

Θεώρημα Επέκτασης X $\mathbb{R}$-γραμμ. χώρος
Y_0 υπόχωρος
$p: X \to \mathbb{R}$ κυρτή μορφή

Αν $f_0: Y_0 \to \mathbb{R}$ γραμμ. με $f_0(y) \le p(y)$ $\forall y \in Y_0$
τότε $\exists\ \tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ " " $\tilde{f}(x) \le p(x)$ $\forall x \in X$
και $\tilde{f}|_Y = f_0$

Απόδ: Από το Λήμμα, αν $x_1 \in X \setminus Y_0$ $\exists\ f_1: Y_1 \to \mathbb{R}$
όπου $Y_1 = span(Y_0 \cup \{x_1\})$ γραμμ. επέκτ. της f_0 με
$f_1(x) \le p(x)$ $\forall x \in Y_1$

Ονομάζω $\mathcal{F} = \{ (Y,f) : Y_0 \subseteq Y \subseteq X$ (υπόχ.) και $f: Y \to \mathbb{R}$ γραμμ., $f|_{Y_0} = f_0$ και $f(x) \le p(x)$ $\forall x \in Y \}$

ορίζω $(Y_1, f_1) \le (Y_2, f_2)$ όταν $Y_1 \subseteq Y_2$ και $f_2|_{Y_1} = f_1$
είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathcal{F}$

Αν όμως $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ ολικά διατεταγμένο (αλυσίδα)
Ισχυρισμός: τότε το $\mathcal{B}$ έχει ένα "άνω φράγμα" στο $\mathcal{F}$

δηλ. $\exists\ (Z,g) \in \mathcal{F}$ τ.ω. $\forall (Y,f) \in \mathcal{B}$: $(Y,f) \le (Z,g)$

Απόδ: Ονομάζω $Z = \bigcup \{ Y : (Y,f) \in \mathcal{B} \}$
Πρέπει Z είναι γραμμ. χώρος!
Απόδ: $\forall z, z' \in Z$ και $\lambda \in \mathbb{R}$
τότε $\exists (Y,f), (Y',f') \in \mathcal{B}$
ώστε $z \in Y$, $z' \in Y'$

Όμως η $(\mathcal{B}, \le)$ είναι ολικά διατεταγμένη!
Οπότε $Y \subseteq Y'$ ή $Y' \subseteq Y$
οπότε $z, z' \in Y$ (πχ)
άρα $z + \lambda z' \in Y$ οπότε $z + \lambda z' \in Z$

Μπορώ να ορίσω
$g: Z \to \mathbb{R}$ ως εξής
$\forall z \in Z$ $\exists (Y,f) \in \mathcal{B}$ με $z \in Y$, ορίζω $g(z) = f(z)$

Πρέπει g είναι καλά ορισμένη, γιατί αν $z \in Y'$
τότε λόγω ολικής διάταξης:
ή $(Y,f) \le (Y',f')$ ή $(Y',f') \le (Y,f)$
ας πούμε
οπότε $f = f'|_Y$ άρα $f'(z) = f(z)$

και προφανώς $g(z) \le p(z)$
αφού "$f(z)$.
δηλ $(Z,g) \in \mathcal{F}$
και $(Z,g) \ge (Y,f)$
$\forall (Y,f) \in \mathcal{B}$

Ας υποθέσουμε ότι $\exists\, (E,\varphi) \in \mathcal{F}$
το οποίο είναι "μεγιστικό για $(\mathcal{F}, \leq)$"
δηλ δεν μεγαλώνει άλλο
δηλ αν $(Y,f) \in \mathcal{F}$ με $(Y,f) \geq (E,\varphi)$
τότε $Y = E$
(και άρα $f = \varphi$)

Ισχυρίζομαι τότε ότι $E = X$
(οπότε θα έχω τελειώσει: διότι
$\varphi : X \to \mathbb{R}$ γραμμ. και
$\varphi|_{Y_0} = f_0$

και $\varphi(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$)

Αποδ. Ισχ. Αν $E \neq X$
θα $\exists\, x \in X \setminus E$ θεωρώ τότε $E_1 = \text{span}\{E, x\}$
Από το Λήμμα 1
$\exists\ f_1 : E_1 \to \mathbb{R}$
γραμμ., $f_1|_E = \varphi$

και $f_1(x) \leq p(x)\ \forall x \in E_1$

δηλ $(E_1, f_1) \in \mathcal{F}$
και επειδή $f_1|_E = \varphi$

δηλ $(E_1, f_1) \geq (E, \varphi)$
αλλά λόγω μεγ. θα ίσχυε
$E_1 = E$ άτοπο

Υπάρχει ένα πράγμα στη Συνολοθεωρία
που μου λέει ότι αυτό είναι αι:

Λήμμα Zorn Αν $(\mathcal{F}, \leq)$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο
με την ιδιότητα: κάθε ολικά διατεταγμένο
υποσύνολό του να έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{F}$,
τότε το $(\mathcal{F}, \leq)$ έχει ένα (πολλά ίσως)
μεγιστικό στοιχείο

Λήμμα $p: X \to \mathbb{R}$ κυρτή

$Y \subseteq X$ υποχ.

$f: Y \to \mathbb{R}$ γραμμ, $f(y) \leq p(y) \ \forall y \in Y$

$x_1 \notin Y$.

$Y_1 = \mathrm{span}\{Y, x_1\}$

Τότε: $\exists \tilde{f} : Y_1 \to \mathbb{R}$ γραμμ

$\tilde{f}|_Y = f$ και

$\tilde{f}(z) \leq p(z) \ \forall z \in Y_1$.

Απόδ $\forall x \in Y_1$ γράφεται (μοναδικά) $x = y + \lambda x_1$, $y \in Y$, $\lambda \in \mathbb{R}$

κάθε επέκταση, ας πούμε f_1, της f

αναγκαστικά είναι:

$$f_1(x) = f_1(y) + \lambda f_1(x_1) = f(y) + \lambda f_1(x_1)$$

καθορίζεται από την τιμή της $f_1(x_1)$ στο x_1

και αντίστροφα,

$\forall \mu \in \mathbb{R}$ η $f_\mu(x) := f(y) + \lambda\mu$ είναι γραμμ

επέκταση της f στον Y_1 (με $\mu = f_1(x_1)$)

Θέλω να βρω κατάλληλη επέκταση (δηλ. κατάλληλο $\mu \in \mathbb{R}$):

$$f_\mu(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y_1$$

δηλ

$$f(y) + \lambda\mu \leq p(y + \lambda x_1) \quad \forall y \in Y \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Για $\lambda = 0$ είναι οκ από υπόθεση.

Έστω $\lambda > 0$:

Η $(*) \iff \underline{f(y) + \lambda\mu} = f_1(y + \lambda x_1) \leq \underline{p(y + \lambda x_1)}$

$$\Rightarrow \mu \leq \frac{1}{\lambda} p(y + \lambda x_1) - \frac{1}{\lambda} f(y)$$

$$= p\left(\frac{y}{\lambda} + x_1\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \quad \forall y \in Y \quad \forall \lambda > 0$$

όμως $\frac{y}{\lambda} \in Y$

$\Rightarrow$ Πρέπει:

$$\mu \leq p(z + x_1) - f(z) \quad \forall z \in Y \quad (1)$$

Αντίστροφα, αν μ ικανοποιεί την (1)

τότε το $f_1(x)$ θα φράσσεται από $p(x)$

για κάθε $x = y + \lambda x_1$ με $\lambda > 0$

Έστω $\lambda < 0$ $\quad (\lambda = -|\lambda|)$

Πρέπει: $f(y) + \lambda \mu_1 = f_1(y - |\lambda| x_1) \leq p(y - |\lambda| x_1)$

$$\Rightarrow \mu_1 \geq \frac{-1}{|\lambda|}\left(p(y - |\lambda| x_1) - f(y)\right)$$

$$\quad\quad \parallel \quad -p\left(\frac{y}{|\lambda|} - x_1\right) + f\left(\frac{y}{|\lambda|}\right)$$

$\frac{y}{|\lambda|} \in Y$ άρα

$$\Rightarrow \mu_1 \geq -p(w - x_1) + f(w) \quad \forall w \in Y \qquad (2)$$

συμπέρασμα, αν μ_1 ικανοποιεί την (2) τότε το $f_1(x)$ θα φράσσεται από $p(x)$ με κάθε $x = \lambda y + x_1$ με $\lambda < 0$.

Θέλουμε να ικανοποιούνται και οι δύο ανισότητες ισοδύναμα

$$\mu_1 \leq \inf\{p(z + x_1) - f(z) : z \in Y\} =: \beta$$

και

$$\mu_1 \geq \sup\{-p(w - x_1) + f(w) : w \in Y\} = \alpha$$

άρα $\exists$ λύση στο πρόβλημα της επέκτασης αν $\exists\, \mu_1$ που ικανοποιεί και τις δύο

$$\Leftrightarrow \alpha \leq \beta$$

ισοδύναμα

$$f(w) - p(w - x_1) \leq p(z + x_1) - f(z) \quad \forall z, w \in Y$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(w) + f(z) \leq p(z + x_1) + p(w - x_1)$$

όμως $p(z + x_1) + p(w - x_1) \geq p(z + x_1 + w - x_1) = p(z + w)$

άρα αρκεί $f(w + z) \leq p(z + w)$ η οποία ισχύει διότι $z + w \in Y$

άρα $f(z + w) \leq p(z + w)$ από υπόθεση.

Παρ. Η επέκταση (που βρήκαμε) πάντα υπάρχει. δεν είναι μοναδική εκτός αν $\alpha = \beta$