31 Μαρτ 2016

ΜΙΓΑΔΙΚΟ Hahn-Banach

(έχουν αναρτηθεί έντυπες σημειώσεις)

X : $\mathbb{C}$-γραμμ χώρος, $p : X \to \mathbb{R}_+$ ημινόρμα

$Y \subseteq X$ γραμμ υπόχ $f : Y \to \mathbb{C}$ γραμμ

και $|f(y)| \le p(y) \quad \forall y \in Y$

ΝΔΟ: $\exists\, \tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ γραμμ, $\tilde{f}|_Y = f$

και $|\tilde{f}(x)| \le p(x) \quad \forall x \in X$

<u>Απόδ</u> Έστω $f_0(y) = \mathrm{Re} f(y)$ $(y \in Y)$: $f_0 : Y \to \mathbb{R}$

είναι $\mathbb{R}$-γραμμ. και $|f_0(y)| \le |f(y)| \le p(y) \quad \forall y \in Y$

Εφαρμόζω το Θ. επέκτ:

$$\exists\, \tilde{f}_0 : X \to \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}\text{-γραμμ}$$

$$\tilde{f}_0|_Y = f_0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{και} & \tilde{f}_0(x) \le p(x) \quad \forall x \in X \\ \text{άρα} & -\tilde{f}_0(x) = \tilde{f}_0(-x) \le p(-x) = p(x) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}_0(x)| \le p(x) \quad \forall x \in X$$

Θέτω $\forall x \in X$

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_0(x) - i\tilde{f}_0(ix) \quad \text{(έτσι γνωρίζω)}$$

$$\tilde{f} : X \to \mathbb{C} \quad \underline{\text{ισχ}} \text{ γραμμική} \quad (1)$$

επίσης $|\tilde{f}(x)| \le p(x) \quad \forall x \in X \quad (2)$

Επίσης, $\tilde{f}|_Y = f$ διότι:

$$y \in Y : \quad \tilde{f}(y) = \tilde{f}_0(y) - i\tilde{f}_0(iy)$$

$$= f_0(y) - i f_0(iy)$$

$$= f(y) \qquad (3)$$

Λήμμα

(c) $g : X \to \mathbb{C}$ γραμμ.

και $f : X \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{Re} f(x)$

τότε f είναι $\mathbb{R}$-γραμμ. (προφ.)

και $g(x) = f(x) - i f(ix) \quad \forall x \in X$

Απόδ. $g(x) = \operatorname{Re} g(x) + i \operatorname{Im} g(x)$

$\overset{?}{=} \operatorname{Re} g(x) - i \operatorname{Re} g(ix)$

αρκεί !

Def $\operatorname{Re} g(ix) = \frac{1}{2}\left(g(ix) + \overline{g(ix)}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(i g(x) - i \overline{g(x)}\right)$

$= \frac{i}{2}\left(g(x) - \overline{g(x)}\right)$

$= \frac{-1}{2i}\left(g(x) - \overline{g(x)}\right)$

$= -\frac{1}{2i}\left(g(x) - \overline{g(x)}\right) = -\operatorname{Im} g(x)$

(β) : $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-γραμμ.

ορίζω $f_1(x) = f(x) - i f(ix)$ $\forall x \in X$

τότε $f_1 : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμ.

και $\mathrm{Re} f_1(x) = f(x)$

Απόδ. $f_1(x+y) = f(x+y) - i f(ix + iy)$

$= f(x) + f(y) - i f(ix) - i f(iy)$

$= f_1(x) \quad + f(y)$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad f_1(\lambda x) = \lambda f_1(x)$

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$

$f_1(\lambda x) = f(\lambda x) - i f(i\lambda x)$

$= \lambda f(x) - i \lambda f(ix)$

$= \lambda f_1(x)$

(ii) $\lambda = i$:

$f_1(ix) = f(ix) - i f(iix)$

$= f(ix) + i f(x)$

$= i(f(x) - i f(ix)) = i f_1(ix).$

(γ) p ημινόρμα

$f : X \to \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$-γραμμ, $f_1(x) = f(x) - i f(ix)$

τότε $|f(x)| \le p(x)$ $\forall x \iff |f_1(x)| \le p(x)$ $\forall x \in X$

Απόδ. Αν $|f_1(x)| \le p(x)$ τότε $|f(x)| = |\mathrm{Re} f_1(x)| \le$

$|f_1(x)| \le p(x)$

Αντίστροφα,

έστω $\forall x \in X$, $|f(x)| \le p(x)$

$|f_1(x)| = ?$ $\quad f_1(x) = e^{i\theta_x} |f_1(x)|$

$\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$:

$$|f_1(x)| = \lambda f_1(x) \overset{\mathbb{C}\text{-γραμμ}}{=} f_1(\lambda x) = \mathrm{Re} f_1(\lambda x) = f(\lambda x) = |f(\lambda x)| \le p(\lambda x) = p(x)$$

επομένως $|f_1(x)| \le p(x)$ $\forall x$

Υπενθ: Η κανονική εμφύτευση : $\tau : X \longrightarrow X^{**}$

$$\begin{array}{ccc} (f,x) & \in & X^* \times X \\ \downarrow & & \Big\downarrow b \\ f(x) & \in & \mathbb{K} \end{array}$$

b : διγραμμική,
(πολλοί γράφουν $b(f,x) = \langle f, x\rangle$)

$X^* \longrightarrow \mathbb{K}$

Έστω $x \in X$, η $\hat{x} : f \longmapsto b(f,x)$ είναι γραμμική

Επίσης, είναι και φραγμ.:

$$|\hat{x}(f)| = |b(f,x)| = |f(x)| \le \|f\| \, \|x\|$$

και μάλιστα $\|\hat{x}\| \le \|x\|$

όπως έχω

$$\tau : x \longmapsto \hat{x} : X \longrightarrow (X^*)^*$$

Επιπλέον, η τ είναι γραμμική
διότι $\forall f$,
$x \longmapsto \hat{x}(f) = f(x)$ είναι γραμμ.

Τέλος,
$\|x\| = \|\hat{x}\|$ διότι από (HB)
$\exists\, f \in X^*, \|f\| = 1$ ώστε
$f(x) = \|x\|$
$\parallel$
$\hat{x}(f) = \|x\|$
$\|\hat{x}\| \geq \|x\|$ ✓

$\tau : X \longrightarrow X^{**}$ γραμμική ισομετρική εμφύτευση

Ορ. X αυτοπαθής όταν η τ είναι επί

$1 < p < +\infty$: $(\ell_p, \|\ \|_p)$ αυτοπαθής

Κάθε χώρος Hilbert$^{(*)}$ έχει ορθοκανονική βάση $\neq \{0\}$

(*) διαχωρίσιμος ή μη

(έχουν αναρτηθεί ένωσες σημειώσεις)

Υπενθύμιση ΟΚ βάση του H:
$\{e_i : i \in I\}$ με (1) $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$
(2) παράγει τον H ως χώρο Hilbert:
$\overline{\mathrm{Span}\{e_i : i \in I\}} = H$

Απόδ Έστω $A_0 \subseteq H$ ορθοκανονικό, $\neq \emptyset$ (γραμμ. ανεξ.)
(πχ $x \in H \setminus \{0\}$, $A_0 = \{\frac{x}{\|x\|}\}$)

Θεωρώ $\mathcal{M}$ την οικογένεια όλων των $A \subseteq H$:
(α) είναι ορθοκανονικό
(β) $A \supseteq A_0$

$(\mathcal{M}, \subseteq)$: μερικά διατεταγμένο σύνολο

Αν $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{M}$ αλυσίδα
(δηλ. ολικά διατεταγμ.)
τότε ισχ έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{M}$

Απόδ Ονομάζω $A_\infty = \bigcup\{A_i : i \in I\}$
Προφ (i) A_∞ ~~είναι ορθοκανονικ~~ $\supseteq \forall A_i$
άρα $A_\infty \supseteq A_0$
(ii) A_∞ είναι ορθοκανονικό
γιατί αν $x_1, x_2, \dots x_m \in A_\infty$
τότε $\exists$ i_1 i_2 $i_m \in I$
τ.ω. $x_k \in A_{i_k}$ $k = 1 \dots m$

$\exists k_0 \in 1 \dots m$: $A_{i_{k_0}} \supseteq A_k$ για $k = 1 \dots m$
οπότε $\{x_1, x_2 \dots x_m\} \subseteq A_{i_{k_0}}$
$\uparrow$ ΟΚ από υπόθ
άρα $\{x_1 \dots x_m\}$ είναι ΟΚ
δηλαδή $A_\infty \in \mathcal{M}$ και $A_\infty \supseteq A_i$ $\forall i \in I$

Λήμμα Zorn Το $(\mathcal{M}, \subseteq)$ έχει ένα μεγιστικό στοιχείο
Έστω M
δηλ M είναι ΟΚ σύνολο, $M \supseteq A_0$
και δεν μεγαλώνει άλλο, δηλ: αν $N \in \mathcal{M}$
με $M \subseteq N$ τότε $M = N$

Ισχυρ. M είναι ΟΚ βάση του H

Απόδ. (i) Βεβαίως M είναι ΟΚ

(ii) ισχ. $\overline{\operatorname{span} M} = H$

απόδ. αν όχι, δηλ. αν $\overline{\operatorname{span} M} \neq H$

τότε $\exists\, z \in H$, $z \neq 0$

$z \perp \overline{\operatorname{span}(M)}$

θέτω $x = \frac{z}{\|z\|}$

$M \cup \{x\}$ ορθοκανονικό

και $\supseteq A_0$

οπότε $M \cup \{x_0\} \in \mathcal{M}$

άτοπο από μεγιστικότητα.

Έδειξα ότι $\forall$ ΟΚ οικογένεια A_0 του H επεκτείνεται σε ΟΚ βάση.

Ασκήσεις (από σημ. Αργυρού)

(οι ενημερώσεις ανεβαίνουν ως Ασκήσεις ΙΙ)

1 (i) $(X, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα

Y υπόχωρος κλειστός, $x_0 \in X \setminus Y$

τότε ν.δ.ο

$$dist(x, Y) = \cancel{\sup\{}\ \max\{ |f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1 \text{ και } f|_Y = 0 \}$$

$$\Updownarrow$$

$$Y \subseteq \underbrace{\ker f}_{\text{κλειστό υπερεπίπεδο}}$$

Απόδ Ξέρω ότι $\exists\, f_0 \in X^*$, $\|f_0\| = 1$, $f_0|_Y = 0$ και

$$f_0(x) = dist(x, Y) \quad (*)$$

Όμως από την άλλη $\forall f \in X^*$, $\|f\| = 1$ και $f|_Y = 0$

τότε $\forall y \in Y$

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = f(x)$$

άρα $|f(x)| = |f(x-y)| \leq \|f\|\,\|x - y\| = \|x - y\| \quad \forall y \in Y$

παίρ. inf ως προς $y \in Y$

$$|f(x)| \leq \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} = dist(x, Y)$$

άρα

$$\sup\{ |f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1, f|_Y = 0\} \leq d(x, Y) \overset{*}{=} f_0(x)$$

το ζητούμενο.

1. (ii) Έστω $f \in X^*$ $\|f\| = 1$ (και έστω $Y = \ker f$)

τότε $\forall x \in X$, $dist(x, \ker f) = |f(x)|$.

αν $x \in \ker f$, ότι, αλλιώς

Απόδ Από το προηγούμενο, $Y = \ker f$

$\exists\, g \in X^*$, $\|g\| = 1$, $g|_Y = 0$ και

$$dist(x, Y) = g(x)$$

όμως $g|_Y = 0$ σημαίνει $Y \subseteq \ker g$

$\ker f \subseteq \ker g$ και $f \neq 0$, $g \neq 0$

$$\Downarrow$$

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : g = \lambda f$

και επειδή $\|g\| = 1 = \|f\|$

$|\lambda| = 1$

άρα $|g(x)| = |f(x)|$

οπότε $dist(x, Y) = g(x) = |f(x)|$.

2 (i) Αν $Y \subseteq X$ γραμμ. υπόχ. τότε

$$\overline{Y} = \bigcap \{ \ker f : f \in X^* : f|_Y = 0 \}$$

δηλαδή η κλειστή θήκη ενός υπόχ. είναι η τομή των υπερεπιπέδων που τον περιέχουν

$$y \in \overline{Y} \iff f(y) = 0 \quad \forall f \in X^* : f|_Y = 0$$

<u>Απόδ</u>

(i) $Y \subseteq \ker f$ καθώς $f \in X^*$ με $f|_Y = 0$

$$\Downarrow$$

$$\overline{Y} \subseteq \ker f \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{Y} \subseteq \bigcap \{ \ker f : f \in X^*, f|_Y = 0 \}$$

από την άλλη, αν $x \notin \overline{Y}$

τότε από HB, $\exists f \in X^*$

τ.ω $f(x) \neq 0$, $f|_Y = 0$

άρα $f|_Y = 0$ αλλά $x \notin \ker f$

οπότε $\overline{Y} = \bigcap \{ \ker f : f \in X^* : f|_Y = 0 \}$

(ii) $\bigcap \{ \ker f : f \in X^* \} = \{0\}$

δηλ. $\forall x \neq 0 \ \exists f \in X^* : f(x) \neq 0$

με άλλα λόγια :

ο X^* χωρίζει τα σημεία του X