3 Μαρ 2016

<u>Προβ</u> $\exists$ γραμμ απεικόνιση $T: c_{00} \to c_{00}$
με $\ker T$ κλειστό που δεν
είναι συνεχής

(ενώ για γραμμ. μορφές
$\varphi: E \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$
φ συνεχής $\iff$ $\ker \varphi$ κλειστός)

Αν T είναι 1-1, τότε $\ker T = \{0\}$ είναι κλειστό

<u>Προβ</u> ορίζω $T: c_{00} \to c_{00}$
$e_n \mapsto n e_n$

δηλ ισοδύναμα
$$T(x(n)) = (n x(n))$$

$(E, \| \ \|)$ χώρος με νόρμα, $(F, \| \ \|)$ χώρος Banach

$D \subseteq E$: γραμμ υποχ του E
πυκνό $\overline{D} = E$

$T : D \longrightarrow F$ γραμμ

ΝΔΟ :

T επεκτείνεται σε φραγμ τελ $T_1 : E \to F$

$\Updownarrow$

T φραγμ.

<u>Αποδ</u> Προφανώς, αν $\exists$ T_1 φραγμ επεκτ, τοτε $T = T_1|_D$
είναι φραγμ

Επίσης, αν $\exists$ φραγμ. επεκτ
τοτε είναι μοναδική
γιατί αν S είναι μια άλλη
τ.ω. $S|_D = T_1|_D$

δυο συνεχείς συναρτήσεις που ταυτίζονται σε
πυκνό, είναι ίσες

Για τον ίδιο λόγο, $\|T_1\| = \|T\|$

πράγματι: $\|T_1\| = \sup\{ \|T_1 x\| : \|x\| \leq 1, x \in E\}$ (1)

$\|T\| = \sup\{ \|Tx\| : \|x\| \leq 1, x \in D\}$

(αφού $T = T_1|_D$) $= \sup\{ \|T_1 x\| : \|x\| \leq 1, x \in D\}$ (3)

Ομως, (1) = (3) αφού $\overline{D} = E$.

Τώρα:

Εστω οτι η T είναι φραγμ, νδο οτι επεκτείνεται κλπ

Εστω $x \in E$, θελω να ορισω $T_1 x$

Ξερω $\overline{D} = E$, άρα $\exists (x_n) : x_n \in D$ $\forall n$
τ.ω $\|x_n - x\| \to 0$

Θέλω να ορίσω $T_1 x = \lim_n T_n x$. Προβλήματα:

(i) υπάρχει το lim ;;

(ii) Μήπως εξαρτάται
απο την (x_n) ;;

(i) Ναι υπάρχει! (x_n) συγκλ., άρα βασική!

άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 : \forall n, m \geq n_0$

$\|x_n - x_m\| < \dfrac{\varepsilon}{\|T\|}$

T φρ

τοτε $\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|$
$< \varepsilon$

Ομως εχω υποθεσει οτι F πλήρης, άρα $\lim_n Tx_n$ $\exists$

(ii) Το lim εξαρτάται μόνο από το x, όχι απ' την (x_n)

<u>Δηλ.</u> αν (x_n'), $x_n' \in D$: $\|x_n' - x\| \to 0$

τότε $\lim T x_n' = \lim T x_n$

<u>Αυτό</u> $\|x_n' - x_n\| \to 0$ από τριγ

$$\Downarrow \;!!$$

$$\|Tx_n' - Tx_n\| \le \|T\| \, \|x_n' - x_n\| \to 0$$

<u>Άρα</u> μπορώ να ορίσω $T_1 : E \longrightarrow F$

$$x \longrightarrow \lim_n T(x_n)$$

- Ελέγχω ότι T_1 είναι γραμμ.: αν $x_n \to x$, $y_n \to y$:
$\lim T(x_n + \lambda y_n) = \lim(Tx_n + \lambda T y_n) = \lim Tx_n + \lambda \lim Ty_n$
↑ διότι $\exists$ τα δύο lim

- $T_1|_D = T$ διότι αν $x \in D$, $T_1(x) = \lim T x_n$
όπου μπορώ να πάρω $x_n = x$ $\forall n$

- T_1 συνεχής

δείχνω $x \in E$ ν.δ.ο.:

$$\|T_1 x\| \le \|T\| \, \|x\| \quad \Big(\Rightarrow \|T_1\| \le \|T\|$$

$$\|T_1\| \geq \|T\| \Big)$$

↑ τετρ

έχω $T_1 x = \lim_n T x_n$

όπου $x_n \to x$

$$\|T_1 x\| = \lim_n \|T x_n\| \le \lim_n \|T\| \, \|x_n\| = \|T\| \, \|x\|$$

$T : E \to F$ 1-1, επί, γραμμ.

$$\Downarrow$$

$T^{-1} : F \to E$ γραμμική

<u>και</u> συνεχής

$$\not\Downarrow$$

T^{-1} συνεχής

<u>Παρ/γ</u> $E = F = (c_{00}, \| \ \|_\infty)$

$T : c_{00} \to c_{00}$

$e_n \to \frac{1}{n} e_n \ \forall n$ και επεκτ. γραμμ.

<u>δηλ</u> $T(x(n)) = \left(\frac{1}{n} x(n)\right)$ γραμμ.

και $\|Tx\|_\infty = \sup_n \left|\frac{x(n)}{n}\right|$

$\leq \sup_n |x(n)| = \|x\|_\infty$

μια χαρά συνεχής

Όμως:

$T^{-1}(e_n) = n e_n$ άρα, ασυνεχής

και $\|T^{-1}(\frac{e_n}{n})\|_\infty = \|e_n\|_\infty = 1 \ \forall n$

ενώ $\frac{e_n}{n} \xrightarrow{\| \ \|_\infty} 0$

αν $T(x) = 0$
τότε $\frac{x(n)}{n} = 0$
$\forall n$,
άρα $x = 0$
<u>δηλ</u>
T είναι 1-1
άρα
$\ker T$ = μηδενικό

Παρατ. Όταν μια γρ. απεικ. $T: E \to E$ είναι 1-1 δεν είναι απαραίτητα επί (ακόμα κι αν είναι συνεχής)

Παράδ. $T : (c_0, \| \|_\infty) \longrightarrow (c_0, \| \|_\infty)$

Αρχικά θέτω $T(e_n) = \frac{1}{n} e_n \ \forall n$

και επεκτείνω γραμμικά:

$$T : (c_{00}, \| \|_\infty) \to (c_{00}, \| \|_\infty)$$

$$T(x(n)) = \left(\frac{1}{n} x(n)\right)$$

Δείξαμε ότι T φραγμ. στον c_{00}

και ο c_{00} είναι πυκνός στον c_0

άρα η T επεκτείνεται σε φραγμ. $T_1 : c_0 \to c_0$

Αλλιώς: μπορώ εξαρχής να ορίσω

$\forall x = (x(n)) \in c_0 \quad T_1(x(n)) = \left(\frac{1}{n} x(n)\right) \in c_0$

διότι μηδενική × μηδενική
είναι μηδενική

η T_1 είναι γραμμική, 1-1 και συνεχής

Αλλά, όχι επί

π.χ. αν $y = \left(\frac{1}{n}\right)$ τότε $\nexists\, x \in c_0 : Tx = y$

διότι θα έπρεπε $\forall n \quad (Tx)(n) = y(n) = \frac{1}{n}$

$$\| \quad \frac{1}{n} x(n) \quad \forall n$$

$\frac{1}{n} x(n) = \frac{1}{n}, \ \forall n$ δηλ.

$x(n) = 1 \ \forall n$

$x(n) \not\to 0$

$$E \xrightarrow{T} T(E) \quad (\subseteq F)$$

Ισομορφισμός

$$\Updownarrow$$

$\exists$ σταθερές $\quad m, M \in (0, +\infty)$:

$$m\|x\|_E \overset{(*)}{\leq} \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

<u>Απόδ</u> $\quad T$ συνεχής: $\quad \|Tx\|_F \leq \|T\|\,\|x\|_E$

$$T^{-1} : (T(E), \|\ \|_F) \longrightarrow (E, \|\ \|_E)$$

συνεχής

άρα, $\forall y \in T(E)$, $\|T^{-1}(y)\|_E \leq \|T^{-1}\|\,\|y\|_F$

<u>δηλ</u> $(y = Tx)$

$$\|x\|_E \leq \|T^{-1}\|\,\|Tx\|_F$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\|_E \leq \|Tx\|_F \quad \forall x \in E$$

$$\Downarrow (*)$$

Αντίστροφα, αν $\|Tx\| \leq M\|x\|$ $\forall x$ και T συνεχής

αν $m\|x\| \leq \|Tx\|$ $\forall x$ και

$\forall y = T(x) \in T(E)$ έχω

$$m\|T^{-1}(y)\| \leq \|y\|$$

<u>δηλ</u> $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$

άρα $T^{-1} : T(E) \to E$ συνεχής

Το shift στον ℓ^2 : $S(e_n) = e_{n+1}$

$x = x(n) \in \ell^2$

$$S(x(0), x(1), x(2), \ldots) = (0, x(0), x(1), \ldots)$$

καλά ορισμένος και γραμμικός

$$\|Sx\|_2^2 = 0 + |x(0)|^2 + |x(1)|^2 + |x(2)|^2 + \ldots$$

$$= |x(0)|^2 + |x(1)|^2 + |x(2)|^2 + \ldots$$

$$= \|x\|_2^2 \quad \text{ισομετρία}$$

Όμως, $S(\ell^2) = \{(y(1), y(2), \ldots) \in \ell^2 : y(0) = 0\} \subsetneq \ell^2$

$\underline{\text{πχ}}$ $e_1 \notin S(\ell^2)$

$T : E \to F$ γρ + φρ

$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \le 1\}$

$A = \{\|Tx\|_F : \|x\|_E = 1\}$ $\quad \alpha = \sup A$

$B = \left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$ $\quad \beta = \sup B$

$\Gamma = \{M : \forall x, \ \|Tx\|_F \le M\|x\|_E\}$

$\gamma = \inf \Gamma$

Δ/ο $\|T\| \ge \alpha \ge \beta \ge \gamma \ge \|T\|$

$\|T\| \ge \alpha$ διότι $\{\|Tx\|_F : x \in B_E\} \supseteq \{\|Tx\|_F : \|x\| = 1\}$

$\alpha \ge \beta$: Έστω $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \in B$ $\quad \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$

$= \|T(y)\|$

(όπου $y \in S_x$)

άρα $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \alpha$

και συνεπώς $\beta \le \alpha$

$\beta \ge \gamma$: Έστω $x \neq 0$ $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \in B$ άρα

$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \beta$

δηλ. $\|Tx\| \le \beta\|x\|$ ισχύει $\forall x \in E$

(και για $x=0$)

οπότε $\beta \in \Gamma$

άρα $\beta \ge \gamma$

$\gamma \ge \|T\|$ Έστω $M \in \Gamma$ δηλ. $\|Tx\| \le M\|x\|$ $\quad \forall x \in E$

άρα

$\forall x \in B_E : \|Tx\| \le M$

$\sup\{\|Tx\| : x \in B_E\} \le M$

$\|$

δηλ. $\|T\| \le M$ $\quad \forall M \in \Gamma$

άρα $\|T\| \le \gamma$

Τελικά

$$\|T\| = \alpha = \beta = \gamma$$

και επιπλέον: $\forall x \in E,\ x \neq 0$

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \beta = \|T\|$$

δηλ $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \quad \forall x \neq 0$

και ισχύει

και για $x = 0$

οπότε το

$$\inf\{\mu : \|Tx\| \leq \mu \|x\| \ \forall x\} = \|T\|$$

είναι minimum

Αν $T, S : (E, \| \cdot \|) \longrightarrow (F, \| \cdot \|)$

ορίζω $T+S : E \longrightarrow F$ κατά σημείο (κσ)

$\forall x : (T+S)(x) := Tx + Sx$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ορίζω $\lambda T : E \longrightarrow F$ κσ

δηλ. $\forall x, \ (\lambda T)(x) = \lambda T(x) \in F$

προφ. $T+S, \lambda T$ που όρισα είναι γραμμικές (δείξτε το)

επίσης: $\forall x$

$\|(T+S)x\| = \|Tx + Sx\|$ (πράξεις στον F)

$\le \|Tx\| + \|Sx\|$ (νόρμα του F)

$\le \|T\| \|x\| + \|S\| \|x\|$ (συνέχεια των T, S)

$= (\|T\| + \|S\|) \|x\|$

οπότε ο $T+S$ είναι φραγμ. και

$\|T+S\| \le \|T\| + \|S\|$

επίσης, λT είναι φραγμ. με $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$

Έχω δείξει ότι ο $\mathcal{B}(E,F)$ είναι γραμμ. χώρος

και η απεικόνιση $T \longrightarrow \|T\|$

ικανοποιεί:

(i) $\|T+S\| \le \|T\| + \|S\|$

(ii) $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$

Επίσης; (iii) $\|T\| = 0 \iff T = 0$

διότι αν $\|T\| = 0$ τότε $\forall x \in E$

$0 \le \|Tx\| \le \|T\| \|x\| = 0$

άρα $\|Tx\|_E = 0$

άρα $Tx = 0$ άρα $T = 0$

άρα η νόρμα είναι νόρμα

Θεώρ $(\mathcal{B}(E,F), \|\ \|)$ είναι Banach (άσκ)
αν (και μόνο αν)
ο F είναι Banach

Απόδ Έστω (T_n) στο $\mathcal{B}(E,F)$ που είναι βασική

δηλ $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : \forall n,m \geq n_0\ \|T_n - T_m\| < \varepsilon$

όπως, $\forall x \in E$,

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F$$
$$\leq \|T_n - T_m\|\,\|x\|_E \quad (*)$$

άρα η $(T_n x)$ είναι βασική στο χώρο F
που είναι πλήρης

$\exists$ ένα μοναδικό $Tx = \lim_n T_n x \in F$

προφανώς ότι T είναι γραμμική
διότι είναι ως όριο γραμμικών

Έχω $(*)$: $\forall \varepsilon>0$, αν $n,m \geq n_0$:

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\,\|x\| < \varepsilon\|x\|$$

Σταθ. $n \geq n_0$ και αφήνω το $m \to \infty$

$$\|T_m x - T_n x\| < \varepsilon\|x\| \quad \forall m \geq n_0$$
$$\Downarrow$$
$$\|\lim_m T_m x - T_n x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

δηλ. $\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon\|x\| \quad \forall x \in E,\ \forall n \geq n_0$

άρα από τριγωνική:
$$\|Tx\| \leq \|T_{n_0}x\| + \varepsilon\|x\|$$
$$\leq (\|T_{n_0}\| + \varepsilon)\|x\|$$
άρα η T φραγμένη δηλ. συνεχής

Όπως $\forall n \geq n_0$, $T - T_n \in \mathcal{B}(E,F)$ με

$$\|(T - T_n)x\| \leq \varepsilon\|x\| \quad \forall x$$
$$\Downarrow$$
$$\|T - T_n\| \leq \varepsilon \quad \text{όταν } n \geq n_0$$

δηλ $T_n \xrightarrow{\|\ \|} T$