Ερώτηση (Φ.Α.) 7 Απρ.

- $(C(K), \| \|_\infty)$ : πλήρης (*)

Ανάλογο:

- $(\mathcal{B}(E,F), \| \|_\infty)$ : πλήρης αν $F$: Banach

Απόδ. της (*)

Έστω $(f_n)$ : $\| \|_\infty$-βασ. $\exists !\, f \in C(K)$ : $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n,m \geq n_0 \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ (1)

$\forall t \in K$ : $|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon$

$(f_n(t))$ βασική στο $\mathbb{R}$ (: πλήρης)

$\Rightarrow \exists f(t) \in \mathbb{R}$ : $f_n(t) \to f(t)$

ΝΔΟ (i) $f$ συνεχής (ii) $f_n \to f$ ομοιόμ.

Από την (1) έχω, $\forall n,m \geq n_0$ : $|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in K$

στέλνω $m \to \infty$

$|f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in K$

$\Downarrow$ sup ως προς $t$

$\forall n \geq n_0 \quad \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$

άρα έδειξα $f_n \to f$ ομοιόμορφα

Μένει ΝΔΟ $f$ συνεχής

(γνωστό από Πραγματική)

(Θα αναρτηθούν ενιαίες σημειώσεις)

Αρχή ομοιόμορφου φρ.

$(X, \|\ \|)$ Banach $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$

συνεχείς ημινόρμες, δηλ. $p_i : X \to \mathbb{R}_+$

$p_i(x+y) \le p_i(x) + p_i(y)$

$p_i(\lambda x) = |\lambda| p_i(x)$

$\forall x, y \in X$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

Νδο ή η $\mathcal{P}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ή αλλιώς πολύ χάλια.

<u>Απόδ</u> $\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_n = \{x \in X : \sup_{i \in I} p_i(x) \le n\}$$

(μπορεί $A_n = \{0\}$)

<u>Πρώτα</u> $A_n$ είναι κλειστό $\subseteq X$

διότι

$$A_n = \bigcap_{i \in I} \{x \in X : \underset{\uparrow \text{συνεχής}}{p_i(x)} \le n\}$$

$$= \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(\underbrace{[0, n]}_{\text{κλειστό}})$$

Ας υποθέσουμε ότι $\exists n_0$ ώστε $A_{n_0}^o \ne \emptyset$

δηλ

$$\exists B(x_0, \rho) \subseteq A_{n_0}$$

(Θδο $\mathcal{P}$ είναι ομοιόμ. φραγμ.)

Έστω $y \in X$, $y \ne 0$ τρέχω $z = \frac{\rho}{2\|y\|} y$

$$\|x_0 + z - x_0\| = \left\|\frac{\rho}{2\|y\|} y\right\| = \frac{\rho}{2} < \rho$$

$$x_0 + z \in B(x_0, \rho) \subseteq A_{n_0}$$

δηλ $\forall i \in I$, $p_i(x_0 + z) \le n_0$

όμως $p_i(x_0) \le n_0$

άρα $\forall i$ $p_i(z) \le p_i(x_0 + z) + p_i(-x_0) \le 2n_0$

$$p_i\left(\frac{\rho}{2\|y\|} y\right) \le 2n_0 \Rightarrow p_i(y) \le \frac{4n_0\|y\|}{\rho}$$

Έδειξα ότι $\exists M = \frac{4n_0}{\rho}$ ώστε $\forall y \in X$

$$\sup_i p_i(y) \le M\|y\|$$

Επομένως, αν η $\mathcal{P}$ όχι ομοιόμορφα φραγμένη,

τότε κάθε $A_n$ θα έχει $A_n^\circ = \emptyset$

Όμως το σύνολο

$$A = \{x \in X : \sup_i p_i(x) < +\infty\}$$

$$\| \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \sup_i p_i(x) \leq n\}$$

Είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών με κενό εσωτερικό ("1ης κατηγορίας")

Θυμάμαι ότι ο $X$ είναι πλήρης μ.χ.
οπότε το συμπλήρωμα $A^c$ του $A$ θα είναι αναγκαστικά πυκνό σύνολο, διότι:

$$B = A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

$A_n$ : κλειστό με $A_n^\circ = \emptyset$

$A_n^c$ : ανοιχτό + πυκνό

ανοιχτό + πυκνό

Baire : $B$ πυκνό (και $G_\delta$ διότι $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ ανοιχτών)

Όμως, $B = \{x \in X : \sup_i p_i(x) = +\infty\}$

Banach-Steinhaus: $(X, \|\ \|)$ Banach, $(Y, \|\ \|)$ με νόρμα

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n : X \to Y$ γρ + φρ.

υποθ. $\forall x \in X$ η $(T_n(x))$ συγκλίνει στον $Y$

ορίζω $T(x) = \lim_n T_n(x)$

$\Rightarrow T : X \to Y$ είναι γραμμ.
και φραγμ.
?

Αποδ. $T$ είναι κ.σ. όριο γραμμ. άρα γραμμική

διότι: $\forall x, x' \in X$ και $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ από την υποθ. ξέρω ότι

$$T_n(x) \to y$$

και $$T_n(x') \to y'$$

$$\Downarrow \quad \text{γρ}$$

$$T_n(x + \lambda x') = T_n(x) + \lambda T_n(x')$$

$$\downarrow$$

$$T(x) + \lambda T(x')$$

Ισχ. $T$ συνεχής! $\forall x$
φραγμ. $(T_n(x))$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία
άρα είναι φραγμ.
δηλ. $\exists M_x$ (εξαρτάται απ' το $x$)
$\forall n$ : $\|T_n(x)\| \le M_x$

δηλ η $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κ.σ. φραγμ.

άρα (PUB) είναι ομοιόμορφα φραγμ.

δηλ $\exists M$ : $\forall n$ $\forall x$ $\|T_n(x)\| \le M\|x\|$

όπως $\forall x$ $\|Tx\| = \|\lim T_n(x)\| = \lim \|T_n x\|$
όμως επειδή $\|T_n x\| \le M\|x\|$

$\Rightarrow \|Tx\| \le M\|x\| \quad \forall x$

$T$ φραγμ., $\|T\| \le M$

$\{x_n\}$ σ' ένα χώρο με νόρμα, $X$

• Παρατ. Αν η $\{x_n\}$ είναι φραγμ. ($\exists M: \forall n\ \|x_n\| \le M$)

τότε $\forall f: X \to \mathbb{K}$ συνεχή γραμμ.

$$|f(x_n)| \le \|f\|\|x_n\| \le M\|f\|$$

άρα

$\forall f \in X^*$, $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}$ φραγμ.

Προτ. Αντίστροφα: Ας υποθέσουμε ότι $\{x_n\}$ είναι ασθενώς φραγμ. δηλ:

$$\forall f \in X^*, \exists M_f < +\infty : \forall n\ |f(x_n)| \le M_f$$

Τότε $\exists M: \forall n\ \|x_n\| \le M$

(δηλ νορμ-φραγμ.)

Απόδ. Παρατ. ότι ο $(X^*, \|\ \|)$ είναι Banach

Θεωρώ $\forall n$

$$\hat{x}_n : X^* \to \mathbb{K}$$
$$f \mapsto f(x_n)$$

Παρατ: $\hat{x}_n$ είναι γραμμική και συνεχής

$\{\hat{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ απο φραγμ. τελεστές στον χώρο Banach $X^*$

και από υπόθ: $\forall f \in X^*$ ισχύει

$$\{\hat{x}_n(f) : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\|$$
$$\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$$ είναι φραγμ. στο $\mathbb{K}$

δηλ η $\{\hat{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κατά σημείο φραγμ.

$\Downarrow$ από PUB

η $\{\hat{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμ.

δηλ $\sup_n \|\hat{x}_n\| < +\infty$

Θυμάμαι όμως ότι $\|x_n\| = \|\hat{x}_n\|$, διότι:

$$\|\hat{x}_n\| = \sup\{|\hat{x}_n(f)| : f \in B_{X^*}\}$$
$$= \sup\{|f(x_n)| : f \in B_{X^*}\} \overset{HB}{=} \|x_n\|$$

($\forall x_n \in X\ \exists f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ ώστε $f(x_n) = \|x_n\|$)

άρα έδειξα ότι

$$\sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Μια $(x_n)$ στον $X$ λέγεται ασθενώς συγκλίνουσα
αν $\exists\, x \in X$:
$\forall f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x)$

Επομένως, αν $(x_n)$ είναι $w$-συγκλ., τότε
$\forall f \in X^*$, η $(f(x_n))$ συγκλίνει

Άλλο ερώτημα: αντίστροφα. Αν πάρω μια
ακολουθία $(x_n)$ στον $X$ να
ισχύει ότι $\forall f \in X^*$ η $(f(x_n))$
συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $a_f \in K$

Δεν είναι πάντα ότι $\exists\, x \in X$
ώστε $a_f = f(x)$ $\forall f \in X^*$

<u>Παρ/γ</u> Έστω $c_0$:

$$x_n = (1, 1, 1, \ldots \overset{n}{\downarrow}{1}, 0, 0, \ldots)$$

<u>Ισχ</u> ότι $\forall f \in c_0^*$, $n\big(f(x_n)\big)$ είναι συγκλίνουσα

Πράγματι:

$\forall f \in c_0^*$ $\exists!\, y \in \ell^1$ ώστε $\left\{ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) y(n) \quad \forall x \in c_0 \right.$

οπότε $f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} y(k)$ όπως συγκλίνει, το $\sum_{k=1}^{\infty} y(k) \in \mathbb{K}$

Όμως, $\nexists\, x \in c_0 : f(x_n) \to f(x) \quad \forall f \in X^*$

διότι θα έπρεπε, αν πάρω $f_i(x) = x(i)$ θα είχα

$\forall i \quad f_i(x_n) \to f_i(x)$

$$x_n(i) \to x(i)$$

Όμως, $\forall i \in \mathbb{N}$, αν $n \geq i$ τότε $x_n(i) = 1$

άρα θα έπρεπε $x(i) = 1$

οπότε $x = (1, 1, 1, \ldots) \notin c_0$

<u>Παρατήρηση</u> Έστω $(X, \| \|)$ χώρος με νόρμα (αρκεί) και $(x_n)$ μια ακολουθία με την ιδιότητα
$\forall f \in X^*$, η $(f(x_n))$ να είναι συγκλίνουσα

Τότε $\exists\ \varphi \in X^{**}$ : $\forall f \in X^*$
$\varphi(f) = \lim_n f(x_n)$

<u>δηλ</u> $\varphi(f) = \lim_n \hat{x}_n(f)$

<u>Απόδ</u> Ξέρω ότι $\forall f \in X^*$, το όριο $\lim_n f(x_n)$ υπάρχει στο $\mathbb{K}$
το ονομάζω $\varphi(f)$

Ισχυρίζομαι ότι η
$f \longrightarrow \varphi(f) : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$
είναι γραμμ + συνεχής

(i) γραμμική:
$\varphi(f + \lambda g) = \lim_n (f + \lambda g)(x_n)$

$= \lim_n \big( \underset{\text{συγ}}{f(x_n)} + \lambda \underset{\text{συγ}}{g(x_n)} \big)$

$= \varphi(f) + \lambda \varphi(g)$

επίσης, $\forall f \in X^*$
$\{f(x_n)\}$ είναι συγκλίνουσα, άρα φραγμ

<u>δηλ</u> $(x_n)$ είναι ασθενώς φραγμένη
άρα (PUB) είναι $\| \|$-φραγμ

<u>δηλ</u> $\exists M : \forall\ \|x_n\| \leq M$
και συνεπώς $\forall f \in X^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$|f(x_n)| \leq \|f\| \|x_n\|$
$\leq M \|f\|$

οπότε $|\varphi(f)| = \lim |f(x_n)| \leq M \|f\|$

$\Rightarrow \varphi \in X^{**}$

__Συμπέρασμα__ Αν $X$ αυτοπαθής (__πχ__ $\ell^p$, $1<p<+\infty$)
και $(x_n)$ έχει την ιδιότητα
$\forall f\in X^*$, $(f(x_n))$ συγκλίνει

τότε $\exists\, x\in X : f(x_n)\to f(x)$ $\forall f\in X^*$
__δηλ__ $x_n \xrightarrow{w} x$.

__πχ__ σε $\ell^2$, τα $(e_n)$ δεν συγκλίνουν
$\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$
$n\neq m$

όμως, $\forall x\in \ell^2$, $f_x(e_n) = \langle e_n, x\rangle$

τότε βέβαια $f_x(e_n)\to 0$

γιατί τα $(\langle e_n, x\rangle)\in \ell^2$

από $\sum |\langle e_n, x\rangle|^2 \le \|x\|^2$

άρα τα $(e_n)$ είναι $w$-μηδενικά
(παρόλο που $\|e_n\| = 1$)

Πρότ. $(\eta_\kappa)$ : $\forall\, x(\kappa)\to 0$, η σειρά $\sum \eta_\kappa x(\kappa)$ συγκλίνει (απλά)

$$\Downarrow$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} |\eta_\kappa| < +\infty$$

Απόδ. θέλω να δείξω ότι $\exists\, M$:

$$\forall n \quad \sum_{\kappa=1}^{n} |\eta_\kappa| \leq M$$

Θέτω, $\forall n$, $f_n(x) = \sum_{\kappa=1}^{n} \eta_\kappa x(\kappa)$ όπου $x=(x(\kappa))\in c_0$

προφανώς, $f_n$ γραμμική και φραγμ.

$$|f_n(x)| \leq \sum_{\kappa=1}^{n} |\eta_\kappa|\,|x(\kappa)| \leq \Big(\sum_{\kappa=1}^{n} |\eta_\kappa|\Big) \underbrace{\sup|x(\kappa)|}_{\|x\|_\infty}$$

δηλ. $\{f_n : n\in\mathbb{N}\} \subseteq (c_0)^*$.

η υπόθεση είναι ότι $\forall x\in c_0$, $\Big(\sum_{\kappa=1}^{n} \eta_\kappa x(\kappa)\Big)_n$ συγκλίνει (στο $\sum^{\infty} \eta_\kappa x(\kappa)$)

δηλ. ότι $\forall x$ $\{f_n(x) : n\in\mathbb{N}\}$ είναι συγκλίνουσα

άρα $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι κσ φραγμ.

από PUB είναι ομοιόμορφα φραγμ.
δηλ. $\exists\, M$: $\forall n$, $\|f_n\| \leq M$.

Όμως, αφού $f_n(x) = \sum_{\kappa=1}^{n} \eta_\kappa x(\kappa)$, έχω: $\|f_n\| = \sum_{\kappa=1}^{n} |\eta_\kappa|$.

(η απεικόνιση $f \longmapsto (f(e_n)) : c_0^* \to \ell^1$ ισομετρία)

οπότε, $\forall n\in\mathbb{N}$ έχω $\sum_{\kappa=1}^{n} |\eta_\kappa| \leq M$

άρα $\sum_{\kappa=1}^{\infty} |\eta_\kappa| \leq M$ δηλ. $(\eta_\kappa)\in\ell^1$ ∎