7 Μαρ

Τυπος δυϊκοί

Εστω $(X, \| \|)$ χώρος Banach

$Y \subseteq X$ γραμμ υπόχ, κλειστή

Ισχ X^* και Y^* είναι "ίδιοι" δηλ. ισομετρικά ισόμορφοι

Απόδ Εστω $f \in X^*$: δηλ. $f : X \to \mathbb{K}$ γρ + συν

θέτω $f_0 = f|_Y : Y \to \mathbb{K}$ " "

επειδή
$$\|f_0\| = \sup\{|f_0(y)| : y \in B_Y\}$$
$$= \sup\{|f(y)| : y \in B_Y\}$$
$$= \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$$
αφού $\overline{Y} = X$
$$= \|f\| \text{ (λεπτομέρειες : άσκ)}$$

οπότε η $\Pi : X^* \to Y^*$, $f \to f|_Y$ ισομετρία προφ. γραμμ.

αντίστροφα $g \in Y^*$ δηλ. $g : Y \to \mathbb{K}$ γρ + συν

έχω δείξει: $\exists!\ \tilde{g} : X \to \mathbb{K}$ " "

$\tilde{g}|_Y = g$

με $\|\tilde{g}\| = \|g\|$

οπότε η Π είναι και επί του Y^*

(Τοπ) Αντίκειται $\ell^2(n) = (\mathbb{K}^n, \|\ \|_2)$ αλγ. βάση $\{e_1 \dots e_n\}$ όπου $e_k = (0, \dots 0, 1, 0, \dots 0)$ κ-θέση

ορίζω: $T: \ell^2(n)^* \longrightarrow (\mathbb{K}^n, \|\ \|_2) = \ell^2(n)$

$f \longmapsto (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$

Ισχ. T είναι 1-1, επί, γραμμ., ισομ.

• T είναι γραμμ.: $T(f+\lambda g) \overset{?}{=} T(f) + \lambda T(g)$

$$T(f+\lambda g) = \left((f+\lambda g)(e_k) \right)_{k=1}^{n}$$

$$= (f(e_k))_k + \lambda (g(e_k))_k$$

$$\overset{\|}{T}(f) + \lambda \overset{\|}{T}(g) \quad \text{οκ}$$

• T είναι 1-1: $T(f) = 0$ ν/δ $f = 0$

(αρκεί, αφού T γρ.)

$$\Updownarrow$$

$$(f(e_1), f(e_2) \dots, f(e_n)) = \vec{0}$$

$$f(e_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

όπως: $\forall x \in \ell^2(n): f(x) = ?$

$$x = \sum x(k) e_k \Rightarrow f(x) = \sum x(k) f(e_k) = \sum x(k)\, 0 = 0$$

• T επί: Αν μου δώσεις μια $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \ell^2(n)$

να βρώ $f \in (\ell^2(n))^*$ με $T(f) = (\beta_1 \dots \beta_n)$

ορίζω: $f(x) = \sum \beta_k x(k) \quad \forall x = (x(k)) \in \ell^2(n)$

f προφανώς γραμμική

και είναι συνεχής, διότι:

(το ξέραμε, αφού $\dim \ell^2(n) < \infty$)

$$|f(x)| \leq \left(\sum |\beta_k|^2 \right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum |x(k)|^2 \right)^{1/2}}_{\|x\|_2}$$

όπως $\exists\, M = \left(\sum |\beta_k|^2 \right)^{1/2}$

ώστε $|f(x)| \leq M \|x\|_2 \quad \forall x \in \ell^2$

και προφανώς $Tf = (f(e_1), \dots f(e_n)) = (\beta_1 \dots \beta_n)$

οκ για το επί

Μένει νδο η $T: (\ell^2(n))^* \to \ell^2(n)$ είναι ισομετρία

δηλ $\forall f \in (\ell^2(n))^* : \|Tf\|_2 = \|f\|_*$ νόρμες

$\|f\| = \sup\{ |f(x)| : x \in B_{\ell^2(n)} \}$

$$\forall x = \sum x(k) e_k \in \ell^2(n)$$

$$f(x) = \sum f(e_k) x(k) \quad (*)$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \sqrt{\sum |f(e_k)|^2}\, \|x\|_2$$

$$\sqrt{\sum |f(e_k)|^2} = \|(f(e_1), \dots, f(e_n))\|_2 = \|Tf\|_2$$

δηλ $\forall x \in \ell_2$, $|f(x)| \leq \|Tf\|_2 \|x\|_2$

$\Downarrow$ πάρε sup ως προς $x \in B_X$

$$\|f\| \leq \|Tf\|_2$$

Για την ισότητα:

Βάζε να $x = \left(\overline{f(e_1)}, \overline{f(e_2)}, \dots \overline{f(e_n)} \right)$

οπότε $f(x) = \sum f(e_k) \overline{f(e_k)} = \sum |f(e_k)|^2$

οπότε $\sum |f(e_k)|^2 = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|_2$, όπου $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |f(e_k)|^2}$

διαιρώ με την $\sqrt{}$

$\Downarrow$

οπότε $\sqrt{\sum |f(e_k)|^2} \leq \|f\|$ άρα ισχύει ισότητα

Ξανά;

$\longrightarrow \quad |f(x)| \le \|f\| \, \|x\|_2 \quad \forall x \in \ell^2$

$$x = \left(\overline{f(e_1)}, \overline{f(e_2)}, \dots, \overline{f(e_n)}\right)$$

$$|f(x)| = \sum_k f(e_k)\overline{f(e_k)} = \sum_k |f(e_k)|^2$$

διότι $x = \sum_k x(k)\, e_k$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \sum_k x(k) f(e_k)$$

$$= \sum_k \overline{f(e_k)} f(e_k) = \sum_k |f(e_k)|^2$$

οπότε

$$\sum_k |f(e_k)|^2 = |f(x)| \le \|f\| \, \|x\|_2$$

$$\|f\| \, \|x\|_2 = \|f\| \left(\sum |\overline{f(e_k)}|^2\right)^{1/2}$$

$$\sqrt{\sum |f(e_k)|^2} \le \|f\|$$

Αλλά είχαμε: $\|f\| \le \|Tf\|_2 = \|(f(e_1), f(e_2) \dots f(e_n))\|_2$

$$= \sqrt{\sum |f(e_k)|^2}$$

Ο $(\ell_1)^*$ είναι ισομετρικός με τον ℓ^∞

<u>Απόδ</u> Έστω $f \in (\ell_1)^*$: $f : \ell_1 \to \mathbb{K}$ γρ+συν

$$f \longmapsto (f(e_1), f(e_2), \dots) := a$$

• Παρατ: Η a είναι φραγμ. (δηλ. $\in \ell^\infty$)

Αποδ: $|f(e_n)| \le \|f\| \, \|e_n\|_1 \le \|f\|$ $\forall n$

άρα $\sup_n |f(e_n)| \le \|f\|$

άρα, ορίζεται $T: f \longrightarrow (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} : (\ell_1)^* \to \ell^\infty$

και μάλιστα $\|Tf\|_\infty \le \|f\|$

$T : (\ell_1)^* \to \ell_\infty$ καλά ορισμένη

• $T(f+\lambda g) = Tf + \lambda Tg$ όπως πριν

• T είναι 1-1: Αν $T(f)=0$ τότε

$(f(e_n)) = 0$

άρα $f(e_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

οπότε $\forall N \in \mathbb{N}$, $f\left(\sum_{k=1}^{N} x(k) e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x(k) f(e_k) = 0$

$\forall x = (x(k)) \in c_{00}$ (!!)

δηλ. $f|_{c_{00}} = 0$. Όμως, ο c_{00} είναι πυκνός στον ℓ_1
και η f είναι συνεχής
άρα μηδενίζεται στο c_{00}
θα μηδενίζεται <u>παντού</u> στον ℓ_1.

• Τελ: Μου δίνεται $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in \ell^{\infty}$

πρέπει να βρω $f \in (\ell_1)^*$ τ.ω

$$Tf = \beta, \text{ δηλ } f(e_n) = \beta_n \quad \forall n$$

ορίζω την f ως εξής:

$\forall x = (x(n)) \in \ell^1$ ονομάζω

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x(n) \quad :$$

καλά το έγραψα, γιατί η σειρά συγκλίνει (απολ)

<u>πράγματι</u>: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n x(n)| \le \sup_n |\beta_n| \left(\sum_n |x(n)|\right)$

$$\le \|\beta\|_{\infty} \|x\|_1 < +\infty$$

Έδειξα λοιπόν ότι f καλά ορισμένη

Είναι προφανές ότι f γραμμική:

$$f(x+\lambda y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (x(n) + \lambda y(n))$$

$$= \sum_n \big(\underbrace{\beta_n x(n)}_{\text{σειρ συγκ}} + \lambda \underbrace{\beta_n y(n)}_{\text{σειρ συγκλ}}\big)$$

$$= \sum \beta_n x(n) + \lambda \sum \beta_n y(n) = f(x) + \lambda f(y)$$

επίσης $|f(x)| \le \|\beta\|_{\infty} \|x\|_1 \quad \forall x \in \ell_1$

άρα φραγμ

$$(\ell_1)^* \longrightarrow \ell^{\infty}$$

$$f \longrightarrow (f(e_n)) \ : \ \|(f(e_n))\|_{\infty} \le \|f\| \quad (1)$$

$$f_\beta \longleftarrow (\beta_n) \ : \ \|f_\beta\| \le \|(\beta_n)\|_{\infty} \quad (2)$$

όπου $f_\beta(x) = \sum \beta_n x(n)$

οι απεικονίσεις: $f \to (f(e_n))$

και $(\beta_n) \to f_\beta$

είναι αντίστροφες (*)

άρα $\|f_\beta\| = \|(\beta_n)\|_{\infty}$

<u>δηλ</u> $\|T(f)\|_{\infty} = \|f\|$

(*) $(\beta_n) \longrightarrow f_\beta \longrightarrow (f_\beta(e_n)) = (\beta_n)$

Ξανά για το 1-1

$$T(f) = (f(e_1), f(e_2) \dots)$$

$$T : (\ell_1)^* \longrightarrow \ell^{\infty}$$

T είναι 1-1 δηλ αν $T(f) = T(g)$
$\Downarrow$
$f = g$

$T(f) = T(g)$
$\Downarrow$
$T(f-g) = 0 \Longleftrightarrow (f-g)(e_n) = 0 \ \forall n$

$x = \sum^{N} x(k) e_k$ $\qquad$ $\overset{\shortparallel}{f'}$ $\Downarrow$

$f'(e_n) = 0 \ \forall n$

$f'(x) = \sum^{N} x(k) \underbrace{f'(e_k)}_{= 0} = f'(x) \ \forall x \in c_{00}$

$\Downarrow$

$f' = 0$ στο ℓ^1

δηλ $f = g$

$f(a e_1 + b e_2)$

$\shortparallel$

$f(a e_1) + f(b e_2) = a f(e_1) + b f(e_2)$

$1<p<+\infty$ ο $(\ell^p)^*$ είναι ισομορφος με το ℓ^q

όπου: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

(με άλλο τρόπο)

Απόδ Έστω μία $(\beta_k)\in\ell^q$: $\sum|\beta_k|^q<+\infty$

ορίζω f_β ως εξής:

$\forall x=(x(k))\in\ell^p$

$$f_\beta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k x(k)$$

συγκλίνει απολ διότι (από Hölder)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k x(k)|\le\underbrace{\left(\sum|\beta_k|^q\right)^{1/q}}_{\|\beta\|_q}\underbrace{\left(\sum|x(k)|^p\right)^{1/p}}_{\|x\|_p}<+\infty$$

και μάλιστα:

$$|f_\beta(x)|\le\|\beta\|_q\,\|x\|_p\quad\forall x\in\ell^p$$

επιπλέον $f_\beta(x+\lambda y)=f_\beta(x)+\lambda f_\beta(y)$ $\forall x,y\in\ell^p$, $\lambda\in\mathbb{K}$

(όπως πριν) άρα f_β γραμμική και συνεχής

και μάλιστα $\|f_\beta\|\le\|\beta\|_q$

Έχω ορίσει:

$$S:\ell^q\longrightarrow(\ell^p)^*$$
$$\beta\longmapsto f_\beta\quad\text{με } \|f_\beta\|\le\|\beta\|_q\quad(1)$$

η S είναι γραμμική:

αν $\beta,\gamma\in\ell^q$, $\mu\in\mathbb{K}$ τότε

$$S(\beta+\mu\gamma)\overset{?}{=}S(\beta)+\mu S(\gamma)$$

$S(\beta+\mu\gamma)=f_{\beta+\mu\gamma}$ όπου, $\forall x\in\ell^p$,

$$f_{\beta+\mu\gamma}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\beta(k)+\mu\gamma(k))x(k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\beta(k)x(k)+\mu\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(k)x(k)$$
$$=f_\beta(x)+\mu f_\gamma(x)$$

$\forall x\in\ell^p$

δηλ

$\therefore$ $f_{\beta+\mu\gamma}=f_\beta+\mu f_\gamma$ δηλ $S(\beta+\mu\gamma)=S(\beta)+\mu S(\gamma)$

Μένει νδο S είναι επί και ισομετρία

Έστω $f \in (\ell^p)^*$, να βρω $a \in \ell^q$ τ.ω

$$S(a) = f$$
δηλ $f_a = f$

Έχω:
$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x(n) \qquad \forall x \in \ell^p$$

Θέλω δηλαδή να βρω $(a_n) \in \ell^q$ τ.ω

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x(n) \qquad \forall x \in \ell^p$$

Περιμένω η (a_n) να είναι η $(f(e_n))$ (γιατί;)

Το πρόβλημα είναι νδο $(f(e_n)) \in \ell^q$

δηλ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|^q < +\infty$

Δοκιμάζω να θέσω στη θέση των $x(k)$:
$$\gamma_n = \begin{cases} \dfrac{|f(e_n)|^q}{f(e_n)} & \text{όταν } f(e_n) \neq 0 \\ 0 & , \text{ όταν } f(e_n) = 0 \end{cases}$$

$\forall N \in \mathbb{N}$
$$f\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k e_k\right) = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{N} |f(e_n)|^q$$

οπότε
$$\sum_{n=1}^{N} |f(e_n)|^q = f\left(\sum \gamma_n e_n\right) \leq \|f\| \left\|\sum \gamma_n e_n\right\|_p$$
$$= \|f\| \left(\sum |\gamma_n|^p\right)^{1/p}$$
$$= \|f\| \left(\sum \left|\frac{f(e_n)|^q}{f(e_n)}\right|^p\right)^{1/p}$$
$$= \|f\| \left(\sum |f(e_n)|^{(q-1)p}\right)^{1/p}$$
(όμως $(q-1)p = q$)

άρα
$$\sum_{n=1}^{N} |f(e_n)|^q \leq \|f\| \left(\sum |f(e_n)|^q\right)^{1/p}$$
$\Downarrow$ διαιρώ με
$$\left(\sum_{n=1}^{N} |f(e_n)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|$$

Όμως $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, άρα: $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |f(e_n)|^q \leq \|f\|^q \qquad \forall N \in \mathbb{N}$

$$\Downarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|^q \leq \|f\|^q$$

Επομένως τελικά από την $f \in (\ell^p)^*$

Εφτιαξα την $a = (f(e_k))_{k=1}^{\infty}$

Έδειξα $a \in \ell^q$

και $\|a\|_q \leq \|f\|$ (2)

όπως ορίζεται

η $f_a(x) = \sum a_k x(k)$

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \sum a_k x(k) \\ &= \sum f(e_k) x(k) \\ &= f(x) \quad \forall x \in \ell^p \end{aligned}$$

τελικά : $f = f_a$

και από τις (1) και (2)

έχω $\|a\|_q = \|f_a\|$ ▨

Μια συνεχής γραμμική μορφή στο $\ell^\infty_{\mathbb{R}} = \{x = (x(n)),\ x(n) \in \mathbb{R}$ φραγμ. $\}$

x ορίζω $f(x) = \limsup x(n)$

$|f(x)| \leq \|x\|_\infty$ (σωστό;)

Επιπλέον $f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ (σωστό;)

οπότε έχω $f : \ell^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ γραμμική + συνεχής

$f\big|_{c_0}$: αν $x \in c_0$ τότε $f(x) = 0$

αν προέρχεται από $a \in \ell^1$ δηλ:

$\forall x \in \ell^\infty \quad f(x) = \sum a_n x(n)$

τότε $\forall x \in c_0$ θα είχα $\sum a_n x(n) = 0 \quad \forall x \in c_0$

οπότε $a_n = 0 \quad \forall n$

άρα $f = 0$ παντού (στο ℓ^∞)

Είναι σωστό αυτό;;

Εσωτ. γινόμενο:

$(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ C-S: $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$

ορίζω $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ καλά, διότι $\langle x,x\rangle \geq 0$

Είναι νόρμα:

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

CS (πρόσ. ότι $\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \in \mathbb{R}$)

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$ OK