9 Μαΐου 2016

Καλημέρα, Χρόνια Πολλά σε όλους

Σήμερα:

Διαφορικές και Ολοκληρωτικές εξισώσεις!

$$f(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s) f(s)\,ds \qquad : K, g \text{ συνεχείς}, \; J=[a,b]$$

ορίζω T: $$(Tf)(t) = \int_a^b \underbrace{K(t,s) f(s)}_{\text{συνεχής}}\,ds \quad \forall t \in J$$

Ισχ. Tf συνεχής στο J

$$|(Tf)(t) - (Tf)(t')| \leq \int |K(t,s) - K(t',s)|\,|f(s)|\,ds$$

Ισχ. $t \to t' \Rightarrow (Tf)(t) \to (Tf)(t')$

Απόδ. K συνεχής στο $J \times J \Rightarrow$ ομοιόμορφα συνεχής

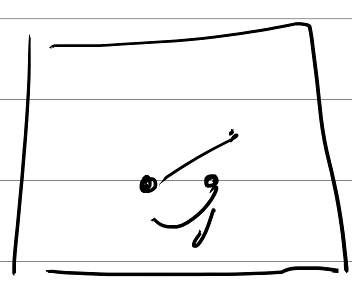
άρα $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall (t,x), (s,y) \in J \times J$

με $\|(t,x) - (s,y)\|_2 < \delta \Rightarrow |K(t,x) - K(s,y)| < \varepsilon$

όπως αν $t, t' \in J : |t - t'| < \delta$ τότε $\forall s \in J$

$$\|(t,s) - (t',s)\|_2 = |t - t'| < \delta$$

$$\Downarrow$$



$$|K(t,s) - K(t',s)| < \varepsilon \quad \forall s \in J$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b |K(t,s) - K(t',s)|\,|f(s)|\,ds \leq \varepsilon (b-a) \|f\|_\infty$$

άρα $|(Tf)(t) - (Tf)(t')| \leq \varepsilon (b-a) \|f\|_\infty$

άρα Tf συνεχής

$$S(f) = g + \mu T(f) \qquad S : \left(C([a,b]), \|\ \|_\infty\right) \to$$

$$\to \left(C([a,b]), \|\ \|_\infty\right)$$

Banach, άρα πλήρης μχ

Θέλω νδο S έχει $!$ σταθερό σημείο: $f \in S(f) = f$

αρκεί νδο S είναι γνήσια συστολή $\exists\, c \in (0,1)$

$$\|S(f) - S(f')\|_\infty \overset{?}{\leq} c\,\|f - f'\|_\infty \quad \forall f, f' \in C([a,b])$$

$$\cancel{S(f)} (Sf)(t) - (Sf')(t) = \mu Tf(t) - \mu Tf'(t)$$

$$= \mu \int_a^b K(t,s)\big(f(s) - f'(s)\big)\,ds$$

$\forall t \in J$

$$\Rightarrow |(Sf)(t) - (Sf')(t)| \leq |\mu| \int_a^b |K(t,s)|\,|f(s) - f'(s)|\,ds$$

$$\leq |\mu| \int_a^b \underbrace{|K(t,s)|}_{\leq M}\,ds\ \|f - f'\|_\infty$$

$$\leq \big(|\mu| M (b-a)\big)\ \|f - f'\|_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\|Sf - Sf'\|_\infty \leq \big(|\mu| M (b-a)\big)\ \|f - f'\|_\infty \quad \forall f, f'$$

όταν $\mu \in \mathbb{R}$ είναι τ.ω. $|\mu| M (b-a) < 1$

τότε $\exists!$ σταθερό σημείο $f : S(f) = f$

Volterra: $S(f)(t) = g + \mu \int_a^t k(t,s) f(s)\, ds$

$$S(f) = g + \mu T f \quad \text{όπου}$$

$$(Tf)(t) = \int_a^t k(t,s) f(s)\, ds$$

όπως πριν: $\forall t \in J$

$$|Tf(t)| \le M \|f\|_\infty (t-a) \qquad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\|Tf\|_\infty \le M(b-a)\, \|f\|_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$|\mu|\, \|T\| \le \underbrace{M(b-a)|\mu|}_{<?\, 1} \text{ δεν αρκεί}$$

Επαγωγικά δείχνουμε $\forall m \in \mathbb{N}$

$$|(T^m f)(t)| \le \frac{(M(t-a))^m}{m!} \|f\|_\infty \quad \forall t \in J$$

Επαγωγικό βήμα:

$$|T^{m+1} f(t)| = \left| \int_a^t k(t,s) (T^m f)(s)\, ds \right|$$

$$\le \int_a^t \underbrace{|k(t,s)|}_{\le M} \frac{M^m (s-a)^m}{m!} \|f\|_\infty\, ds$$

$$\le \frac{M^{m+1}}{m!} \Big(\underbrace{\int_a^t (s-a)^m\, ds}_{= \frac{(t-a)^{m+1}}{m+1}} \Big) \|f\|_\infty$$

$$= \frac{M^{(m+1)}}{(m+1)!} (t-a)^{m+1} \|f\|_\infty$$

$\forall m,\ f, f' \in C(J):$ $\quad Sf = g + \mu T(f)$

$\quad S(f) - S(f') = \mu T(f) - \mu T(f')$

$$\| S^m(f) - S^m(f') \|_\infty = \| (\mu T)^m (f) - (\mu T)^m (f') \|_\infty$$

$$S^2(f) - S^2(f') =$$

$$\big(g + \mu T(Sf)\big) - \big(g + \mu T(Sf')\big)$$

$$\mu T(Sf) - \mu T(Sf')$$

$$\mu T(Sf - Sf') = \mu T\big(\mu T(f) - \mu T(f')\big)$$

$$= (\mu T)^2 (f - f')$$

κ.ο.κ.

$$\| S^m(f) - S^m(f') \|_\infty = \| (\mu T)^m (f) - (\mu T)^m (f') \|_\infty$$

$$\leq \| (\mu T)^m \| \, \| f - f' \|_\infty$$

$$\leq |\mu|^m \frac{M^m (b-a)^m}{m!} \| f - f' \|_\infty$$

$\forall \mu \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{N}:$

$$|\mu|^m \frac{M^m (b-a)^m}{m!} < 1$$

οπότε για αυτό το m: S^m είναι συστολή

άρα (Banach) $\exists!\, f_0 \in C([a,b]) : S^m(f_0) = f_0$

Ισχ. $S(f_0) = f_0$

έστω $S^m = \varphi$: γνήσια συστολή

Από Ξέρουμε ότι $\forall f \in C(J)$ τότε

$$\varphi^n(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} f_0$$

το εφαρμόζω $f = S(f_0)$

οπότε

$$\lim_{n \to \infty} (S^m)^n (Sf_0) = f_0$$

Picard! $\quad f'(t) = F(t, f(t))$, $f(t_0) = x_0$

$$\Downarrow \int_{\text{με}}$$

$$f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))\,ds$$

δηλ $\quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))\,ds$

ονομάζω

$$(\Phi f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))\,ds$$

ψάχνω για σταθ. σημείο της Φ

~~Θέτω~~ Έστω $h \in (0, \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}))$

όπου $M = \max\{ |F(s,x)| : (s,x) \in A \}$
L = σταθ. Lip για την F

Θέτω $\quad J = [t_0 - h, t_0 + h]$

Θεωρώ $\left(C(J), \| \, \|_{\infty} \right)$: πλήρης μ.χ.

$$C_1 = \{ f \in C(J) : \| f - x_0 \mathbb{1} \|_J \leq Mh \}$$

$$\mathbb{1}(t) = 1 \quad \forall t$$

$B_{\| \|_J}(x_0 \mathbb{1}, Mh)$: κλειστό $\subseteq C(J)$

άρα είναι πλήρης μ.χ.

$$\varphi(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))\,ds, \quad f \in C_1, \; t \in J$$

- Ύπαρξη διότι $\forall t \in J, \; f \in C_1$,
$|f(t) - x_0| \leq Mh$
άρα $(t, f(t)) \in A$

αλλά F συνεχής στο A, έτσι ώστε το ∫μα υπάρχει

- $\forall f \in C_1$, τότε $\varphi(f) \in C_1$ διότι

$$|(\varphi f)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{F(s, f(s))}_{\leq M}\,ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh$$

$$\Rightarrow \| \varphi f - x_0 \mathbb{1} \|_J \leq Mh$$

δηλ $\varphi(f) \in C_1$

όπως έχω $\varphi : C_1 \longrightarrow C_1$

<u>Ισχ</u> φ γνήσια συστολή:

$\forall f, g \in C_1$ έχω:

$$|(\varphi f)(t) - (\varphi g)(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left(F(s, f(s)) - F(s, g(s)) \right) ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \left| F(s, f(s)) - F(s, g(s)) \right| ds$$

$$\cancel{|K(s,t)| \, |f(s) - g(s)|} \leq \|f - g\|_J$$

όμως: $|F(s, f(s)) - F(s, g(s))| \leq L |f(s) - g(s)|$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |f(s) - g(s)| \, ds$$

$$\leq L \, |t - t_0| \, \|f - g\|_J \leq (Lh) \|f - g\|_J$$

Έστω ότι $h < \frac{1}{L}$ οπότε $Lh < 1$

άρα η φ είναι γνήσια συστολή

άρα $\exists!\, f_0 \in C_1 : \varphi(f_0) = f_0$

<u>δηλ</u> $f_0 \in C(J)$, $|f_0(t) - x| \leq Mh \quad \forall t \in J$

και $f_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f_0(s)) \, ds \quad \forall t \in J$

$$\Downarrow$$

η f_0 <u>είναι</u> παραγωγίσιμη στο J και

$f_0'(t) = F(t, f_0(t)) \quad \forall t \in J$

και $f_0(t_0) = x_0$

$\blacksquare$

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

__Πρτ__ $(X, \| \|)$ χώρος με νόρμα, $Y \subseteq X$ γραμμ. υποχ. με $\dim Y = n < +\infty$

τότε $\exists\, Z \subseteq X$ κλειστός υποχ. με $X = Y \oplus Z$

(δηλ. $\forall x \in X$ γράφεται $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$, κατά μοναδικό τρόπο)

__Απόδ.__ Έστω $y_1 \dots y_n$ μια αλγεβρ. βάση του Y (μπορώ $\|y_i\| = 1$ $\forall i = 1 \dots n$)

Τι να κάνουμε;

$\forall i = 1 \dots n$ θεωρώ τη γραμμ. μορφή $f_i : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ με

$$f_i\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k\right) = \lambda_i \quad \text{δηλ:} \quad f_i(y_k) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Είναι γραμμ. μορφή, επειδή $\dim Y < +\infty$ η f_i είναι αυτομάτως συνεχής

__Οπότε__ (H-B) η f_i έχει συνεχή επέκταση

$$\tilde{f}_i : X \longrightarrow \mathbb{K}$$

__δηλ__ $\tilde{f}_i(y) = f_i(y)$ $\forall y \in Y$

Ορίζω $Z = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \tilde{f}_i = \{x \in X : \tilde{f}_i(x) = 0 \ \forall i = 1 \dots n\}$

↑ κλειστοί υπόχωροι, διότι $\tilde{f}_i$ συνεχείς

↑ Z κλειστός υπόχωρος

__ν.δ.ο.__ $X = Y \oplus Z$

Έστω $x \in X$ θέτω $\underline{y = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k(x) y_k \in Y}$

Επίσης θέτω $z = x - y$ οπότε $x = y + z$

Παρατηρώ $z \in Z$ διότι $z \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \tilde{f}_i$

__Απόδ:__ $\forall i = 1, \dots, n$

$$\tilde{f}_i(z) = \tilde{f}_i(x) - \underset{\tilde{f}_i(x)}{\underset{\|}{\tilde{f}_i(y)}} = 0$$

$$\left(\text{διότι } \tilde{f}_i\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k(x) y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k(x) \underbrace{\tilde{f}_i(y_k)}_{=\delta_{ik}} = \tilde{f}_i(x)\right)$$

__Τέλος__ $Y \cap Z = \{0\}$

διότι, αν $y \in Y \cap Z$

τότε αφού $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$

αφενός $\forall i$, $\tilde{f}_i(y) = 0$ αφού

$\tilde{f}_i(y) = f_i(y) = \lambda_i$ } $\lambda_i = 0$ $\forall i$ άρα $y = 0$