602: Ασκήσεις στους Χώρους Hilbert

1. Έστω H χώρος Hilbert και $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq H$. Δείξτε ότι

(i) $B^\perp \subseteq A^\perp$

(ii) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$

(iii) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$

(iv) $A^{\perp\perp} = \overline{\text{span}} A$.

2. Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H. Δείξτε ότι ο γραμμικός χώρος $M = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι πλήρης.

3. Θεωρούμε τον χώρο $(C([0,1]), \|\cdot\|_2)$ όπου $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$ και τις γραμμικές απεικονίσεις $\delta_t : f \to f(t)$ όπου $t \in [0,1]$ και $\phi : f \to \int_0^{1/2} f$.

Εξετάστε (α) αν είναι συνεχείς και (β) αν είναι της μορφής $f \to \int_0^1 fg$ για κατάλληλη $g \in C([0,1])$.

4. Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον χώρο Hilbert H και $M = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, δείξτε ότι $P_M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$ για κάθε $x \in H$.

5. Έστω H χώρος Hilbert, x_n, y_n στη μοναδιαία μπάλα του H, και $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$. Δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \to 0$.

6. Έστω H χώρος Hilbert, και $x_n, x \in H$ με τις ιδιότητες: $\|x_n\| \to \|x\|$, και, για κάθε $y \in H$, $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$. Δείξτε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

7. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Δείξτε ότι

$$(M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp \quad , \quad (M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}.$$

8. Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert H και γραμμικού υπόχωρου F του H με την ιδιότητα $H \neq F + F^\perp$.

9. Έστω H χώρος Hilbert και W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι *κάθετοι*). Δείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.